К ТЕОРИИ НАСАДКА БОРДА ДЛЯ ГАЗА

Я. И. Секерж-Зенькович

(Москва)

В качестве примера на приложение своих общих уравнений газовой динамики Чаплыгин [1] рассмотрел задачу об истечении газа при дозвуковых скоростях из бесконечного сосуда с плоскими стенками, продолжающими друг друга, и указал прием решения в случае стенок с углом $q\pi$ между собой.

В настоящей статье мы разбираем несколько другим способом частный случай общей задачи Чаплыгина, считая $q = 2$; этот случай отвечает течению в насадке Борда и характеризуется, как мы покажем, упрощением формулы для сжатия струи. Эта формула (2.6) получается одночленной; входящие в нее функция и ее производная оказались табулированными. Мы также определяем форму свободной струи.

Заметим, что применение формул для любого q при $q = 2$ дает нули в знаменателях при определении уравнения свободной струи, а выражение для сжатия струи становится неопределенным. Поэтому сначала приходится находить потенциал скоростей при $q = 2$, а затем элементы струи. Напомним основные уравнения задачи.

Насадок Борда, как известно, состоит из двух плоских, параллельных между собой твердых стенок, ограниченных только с одной стороны, примыкающей к сосуду. Эти плоские стенки являются единственными границами сосуда, занимающего все пространство вне насадка. Из сосуда через этот насадок вытекает плоская, симметричная относительно оси (линии сечения плоскости симметрии с плоскостью течения) струя газа. Ось x прямоугольной системы координат совмещаем с осью насадка; за положительное направление оси x принимаем направление внутрь сосуда. Пусть стенки насадка расположены горизонтально и влево от входного отверстия в сосуде. Начало координат O помещаем в точке пересечения с осью x вертикали, соединяющей концы насадка, примыкающие к сосуду. Ось y направляем вертикально вверх.

Если $\varphi(x, y)$ — потенциал скоростей, то компоненты u и v скорости $\mathbf{V}$ будут равны: $u = \partial\varphi / \partial x$ и $v = \partial\varphi / \partial y$.

Пусть $\psi(x, y)$ — функция тока. Тогда имеем

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = (1-\tau)^{\beta} \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -(1-\tau)^{\beta} \frac{\partial\varphi}{\partial y} \tag{0.1}$$

$$\left(\beta = \frac{1}{\gamma - 1}, \quad \tau = \frac{V^2}{2\alpha}, \quad \alpha = \frac{k\gamma\rho_0^{\gamma-1}}{\gamma - 1}\right)$$

где γ — отношение теплоемкостей газа (для воздуха принимаем $\gamma = 1.4$, тогда $\beta = 2.5$), $\rho_0 = \mathrm{const}$ — плотность в той точке текущего газа, где $\mathbf{V} = 0$, $k = 4.6$ — коэффициент в уравнении адиабаты. Обозначим через θ угол вектора скорости $\mathbf{V}$ с осью x. Перейдя в уравнениях (0.1) к независимым переменным τ и θ, получаем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{2\tau}{(1-\tau)^{\beta}} \frac{\partial\psi}{\partial\tau}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = -\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \tag{0.2}$$

Исключение из системы (0.2) функции φ дает

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{2\tau}{(1-\tau)^{\beta}} \frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right] + \frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}} \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = 0 \tag{0.3}$$

Уравнение (0.3) и система (0.2) являются основными в методе Чаплыгина.

Из уравнения (0.3) находится функция $\psi(\theta, \tau)$. Система (0.2) определяет $\varphi(\theta, \tau)$. При фактическом отыскании функции $\psi(\theta, \tau)$ С. А. Чаплыгин строит ее, исходя из комплексного потенциала скоростей для несжимаемой жидкости.

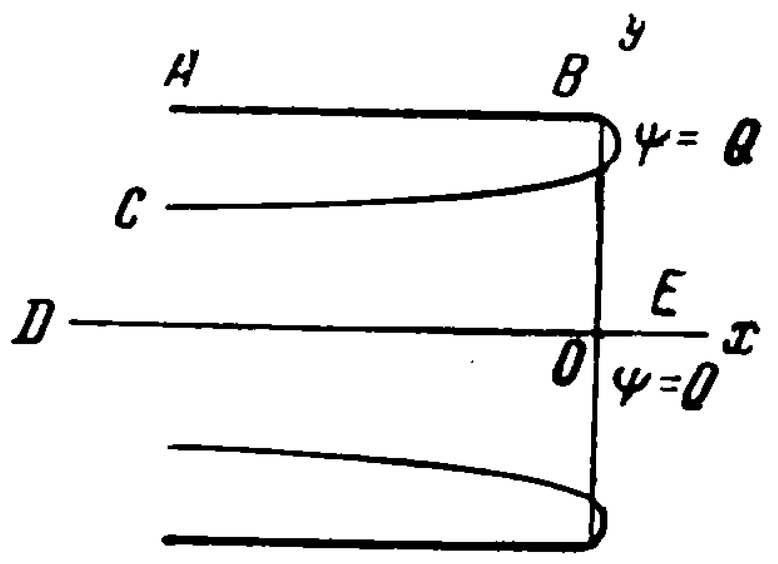
Мы же непосредственно решаем соответствующую краевую задачу для уравнения (0.3). Этот прием впервые применил Л. Н. Сретенский в его работе по газовым струям, доложенной на заседании ученого совета механико-математического факультета Московского университета в декабре 1955 г. и опубликованной в Трудах Международного конгресса по механике в Брюсселе в 1956 г.

§ **1. Определение функции** $\psi(\theta, \tau)$. Плоскость течения с насадком Борда представим на фиг. 1, располагая систему координат xy так, как указано во введении. По симметрии течения достаточно рассматривать лишь верхнюю полуплоскость xy.

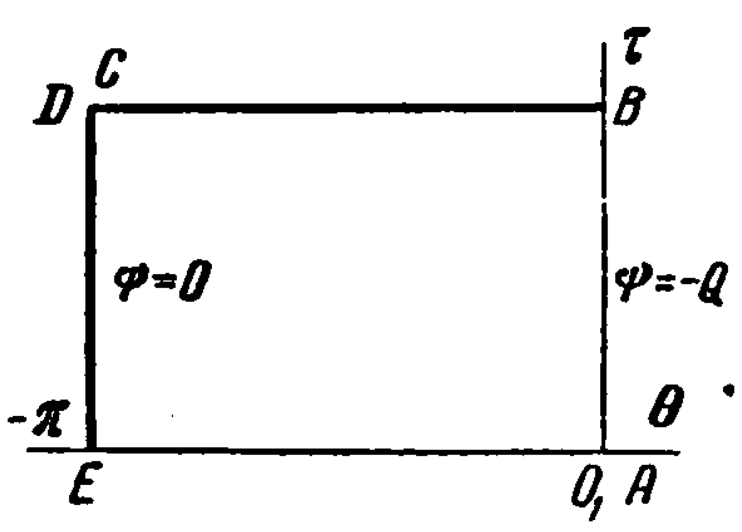
На годографической плоскости $\theta\tau$ найдем область, отвечающую течению в верхней полуплоскости.

Пусть $\psi = -Q = \mathrm{const}$ на линии тока ABC, отвечающей стенке AB и свободной струе BC.

Обозначим через $\tau = \tau_0$ значение τ вдоль свободной струи, на которой постоянная по величине скорость $V = V_0$. Примем, что $\psi = 0$ вдоль оси x.



Фиг. 1



Фиг. 2

Тогда на годографической плоскости верхней половине потока будет отвечать внутренность изображенного на фиг. 2 прямоугольника $CBAED$, включая его стороны. На фиг. 1 и 2 соответствующие точки обозначены одинаковыми буквами.

Пользуясь фиг. 1 и 2, приходим для функции ψ к следующей краевой задаче.

Определить функцию $\psi(\theta, \tau)$ так, чтобы, во-первых, внутри прямоугольника $CBAED$ функция ψ была регулярной и удовлетворяла уравнению (0.3); во-вторых, выполнялись граничные условия вида

$$\psi(0, \tau) = -Q \qquad \psi(-\pi, \tau) = 0, \qquad \psi(\theta, \tau_0) = -Q \tag{1.1}$$

Заметим, что уравнению (0.3) удовлетворяет функция $-Q(\theta + \pi)/\pi$, для которой выполняются первые два из условий (1.1). Заменим искомую функцию ψ функцией Ψ по формуле

$$\psi = -\frac{Q}{\pi}(\theta + \pi) - \Psi(\theta, \tau) \tag{1.2}$$

Граничные условия (1.1) для функции $\Psi(\theta, \tau)$ примут вид:

$$\Psi(0, \tau) = 0, \qquad \Psi(-\pi, \tau) = 0, \qquad \Psi(\theta, \tau_0) = \frac{Q}{\pi}\theta \tag{1.3}$$

Функция $\Psi(\theta, \tau)$, так же как и $\psi(\theta, \tau)$, должна удовлетворять уравнению (0.3). Разделяя переменные, полагаем

$$\Psi = T\Theta \tag{1.4}$$

Подставляем это выражение Ψ в (0.3); применяя обычный прием, находим

$$\frac{d}{d\tau}\left[\frac{2\tau}{(1-\tau)^{\beta}}\frac{dT}{d\tau}\right] - n^2\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}T = 0 \tag{1.5}$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + n^2\Theta = 0 \qquad (n^2 = \mathrm{const}) \tag{1.6}$$

Обозначив частные регулярные (при $\tau = 0$) решения (1.5) через T_n, заметим, что

$$T_n = T_{2m} = \tau^m y_m(\tau)$$

где $y_m(\tau) = y_{1/2,\, n}(\tau)$ — гипергеометрическая функция,

рассмотренная Чаплыгиным [1].

Беря общее решение (1.6) при фиксированном n и удовлетворяя первым двум из условий (1.3), получаем

$$\Psi = \Psi_n = B_n \sin n\theta T_n(\tau)$$

где n — целые положительные числа, B_n — неопределенный числовой коэффициент.

Составляя бесконечный ряд из Ψ_n и соблюдая третье из условий (1.3), находим

$$\Psi = \frac{2Q}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{T_n(\tau)}{T_n(\tau_0)} \sin n\theta \tag{1.7}$$

Из (1.7) и (1.2) получаем

$$\psi = -\frac{Q}{\pi}(\theta + \pi) + \frac{2Q}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{T_n(\tau)}{T_n(\tau_0)} \sin n\theta \tag{1.8}$$

Заметим, что равномерная сходимость ряда (1.8) и возможность его почленного двукратного дифференцирования по τ и θ может быть доказана при помощи оценок, данных Чаплыгиным [1] при

$$\tau < \frac{1}{2\beta + 1} \tag{1.9}$$

Это неравенство равносильно требованию, чтобы скорость текущего газа нигде не превзошла скорости распространения звука при тех физических условиях, которые имеют место в рассматриваемой точке.

§ 2. **Определение сжатия струи и ее формы.** Вдоль свободной струи, являющейся линией тока, на которой $\tau = \tau_0$, имеем

$$dy = \left[\frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} d\theta\right]_{\tau=\tau_0} \tag{2.1}$$

Так как $\dfrac{\partial y}{\partial \varphi} = \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2\tau\alpha}}$, то в силу (0.2) находим

$$dy = \frac{2\tau_0}{(1-\tau_0)^{\beta}} \frac{1}{\sqrt{2\alpha\tau_0}} \sin\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\right)_{\tau=\tau_0} d\theta \tag{2.2}$$

Обозначим ширину насадка через H, а ширину струи в бесконечности через h. Тогда интегрируем (2.2) по θ от $-\pi$ до 0; учтя (1.8), получаем

$$\frac{1}{2}(H - h) = \frac{2\tau_0}{(1-\tau_0)^{\beta}\sqrt{2\alpha\tau_0}} \frac{T'_1(\tau_0)}{T_1(\tau_0)} Q \qquad \left(T'_1(\tau_0) = \left[\frac{dT_1}{d\tau}\right]_{\tau=\tau_0}\right) \tag{2.3}$$

Выразим Q через h. Из определения функции ψ имеем $Q\rho_0 = 1/2\, hv_{\infty}\rho_{\infty}$, где v_{∞} и ρ_{∞} — скорость и плотность газа в бесконечно удаленных точках струи. Так как $\rho = \rho_0(1-\tau)^{\beta}$, то, учтя соотношение между τ и v, имеем

$$Q = \tfrac{1}{2} h\sqrt{2\alpha\tau_0}\,(1-\tau_0)^{\beta} \tag{2.4}$$

Из (2.3) и (2.4) получаем

$$H = h\frac{2\tau_0 T_1'(\tau_0)}{T_1(\tau_0)} + h \tag{2.5}$$

Отсюда h/H — сжатие струи для насадка Борда — выражается следующей формулой:

$$\frac{h}{H} = \frac{T_1(\tau_0)}{2\tau_0 T_1'(\tau_0) + T_1(\tau_0)} \tag{2.6}$$

Пользуясь зависимостью $\rho = \rho_0(1-\tau)^{\beta}$, имеем

$$\tau_0 = 1 - \left(\frac{\rho_{\infty}}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \quad \text{или} \quad \tau_0 = 1 - \left(\frac{p_{\infty}}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \tag{2.7}$$

Здесь отношение плотностей выражено через отношение давлений при помощи уравнения адиабаты $p = k\rho^{\gamma}$, из которого, если принять во внимание значение β, следует

$$\left(\frac{\rho_\infty}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} = \left(\frac{p_\infty}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \tag{2.8}$$

Таким образом, задавая отношения ρ_∞ / ρ_0 или p_∞ / p_0, находим τ_0, а по формуле (2.6) определяем соответствующее сжатие струи.

Для функции $T_1(\tau)$ имеем выражение [1]

$$T_1(\tau) = \sqrt{\tau}\, F(1, -\beta, 2, \tau)$$
$$F(1, -\beta, 2, \tau) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-\beta)(-\beta+1)\ldots(-\beta+m+1)}{(m+1)!}\tau^m \tag{2.9}$$

где $F(1, -\beta, 2, \tau)$ — гипергеометрический ряд [3], получающийся из ряда общего типа $F(a, b, c, \tau)$ при $a = 1$, $b = -\beta$, $c = 2$.

Пользуясь (2.9), можно с любой степенью точности рассчитать функции $T_1(\tau)$ и $T_1'(\tau)$. Эти функции были табулированы в работе Фергюсона и Лайтхилла [4]. При этом для воздуха, как указано выше, положено $\gamma = 1.4$, чему соответствует $\beta = 2.5$.

Пользуясь указанными значениями, по формуле (2.6) вычислены h / H, которые приведены в пятом столбце табл. 1.

В четвертом и шестом столбцах таблицы даны значения h / H, отвечающие $\beta = 2$ и $\beta = 3$. Эти значения параметра β интересны тем, что отвечающие им функции $T_1(\tau)$ обращаются в полиномы, умноженные на $\sqrt{\tau}$.

Для этих значений β имеем:

при $\beta = 2$

$$\frac{h}{H} = \frac{1}{2}\,\frac{1 - \tau_0 + {}^1/_3\tau_0^2}{(1-\tau_0)^2}, \qquad F(1, -2.2, \tau) = 1 - \tau + \frac{1}{3}\tau^2 \tag{2.10}$$

при $\beta = 3$

$$\frac{h}{H} = \frac{1}{2}\,\frac{1 - {}^3/_2\tau_0 + \tau_0^2 - {}^1/_4\tau_0^3}{(1-\tau_0)^3}, \qquad F(1, -3.2, \tau) = 1 - \frac{3}{2}\tau + \tau^2 - \frac{1}{4}\tau^3 \tag{2.11}$$

Из табл. 1 и фиг. 3 видно, что

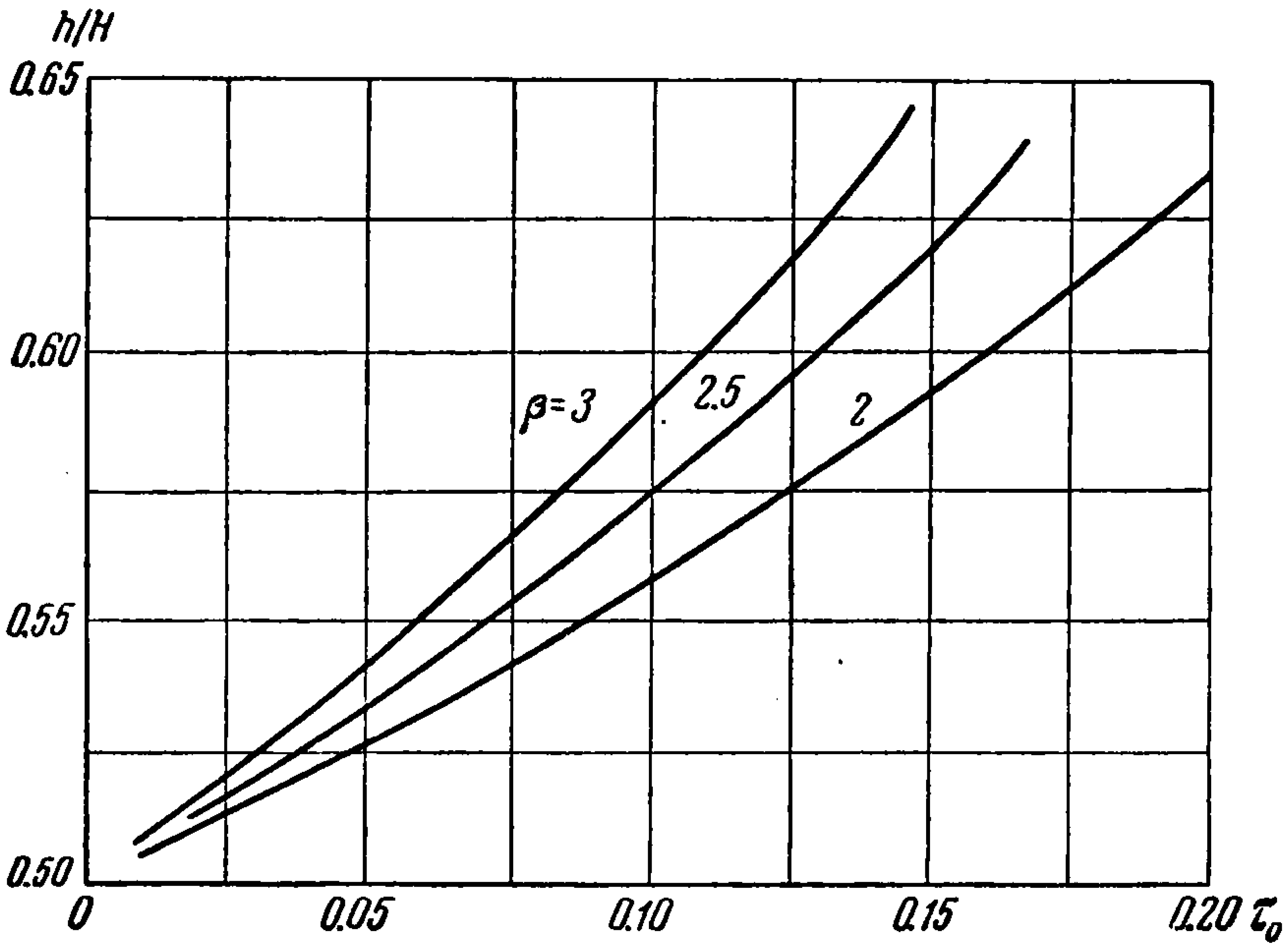
$$\left(\frac{h}{H}\right)_{\beta=2} < \left(\frac{h}{H}\right)_{\beta=2.5} < \left(\frac{h}{H}\right)_{\beta=3} \tag{2.12}$$

т. е. h / H является монотонно возрастающей функцией параметра β в данном интервале для β при фиксированном τ. Это можно было бы доказать и аналитически.

Таблица 1

τ_0	$T_1(\tau_0)$	$T_1'(\tau_0)$	h/H		
			$\beta = 2$	$\beta = 2.5$	$\beta = 3$
0.02	0.1379211	3.2747727	0.5102735	0.5128856	0.5155154
0.04	0.1901990	2.1374120	0.5211225	0.5265870	0.5321271
0.06	0.2271248	1.6046831	0.5325939	0.5411769	0.5499420
0.08	0.2556784	1.2722920	0.5447383	0.5567362	0.5690835
0.10	0.2786508	1.0367462	0.5576111	0.5733555	0.5896776
0.12	0.2975190	0.8574227	0.571281	0.5911359	0.61188720
0.14	0.3131889	0.7145512	0.5858119	0.6101916	0.6358827
0.142			0.5868747		0.6383878
0.16	0.3262699	0.5971394	0.6012849	0.6306505	
1/6	0.3301340	0.5624230		0.6378067	
0.18			0.6177870		
0.2			0.6354164		

Формулы (2.10) и (2.11) показывают, что их правые части — монотонно возрастающие функции τ при данных β. Они таковы в дозвуковой области и остаются такими же, если бы их можно было применять для сверхзвуковых значений τ_0.



Фиг. 3

Заметим, что скорости звука отвечают значениям $\tau = 0.2,\ 1/6,\ 0.142$ соответственно при $\beta = 2,\ 2.5,\ 3$.

Так как для несжимаемой жидкости $T_n = \tau^{1/2n}$, то

$$\tau_0 \frac{T_n'(\tau_0)}{T_n(0)} = \frac{n}{2}$$

Подставив эту величину в (2.6), имеем

$$\frac{h}{H} = \frac{1}{2}$$

Это известная формула Борда для несжимаемой жидкости.

Поступая так же, как в начале настоящего параграфа, и заменяя θ на $-\theta$, получаем следующие параметрические уравнения профиля свободной струи:

$$\frac{2x}{H} = \frac{2\tau_0}{\pi}\frac{h}{H}\left\{\frac{T_1'(\tau_0)}{2T_1(\tau_0)} + 2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{T_n'(\tau_0)}{T_n(\tau_0)}\frac{1}{n^2-1} - \frac{T_1'(\tau_0)}{2T_1(\tau_0)}\cos 2\theta - \right.$$
$$\left. - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{T_n'(\tau_0)}{T_n(\tau_0)}\left[\frac{\cos(n+1)\theta}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\theta}{n-1}\right]\right\}$$

$$\frac{2y}{H} = 1 + \frac{2\tau_0}{\pi}\frac{h}{H}\left\{\frac{T_1'(\tau_0)}{T_1(\tau_0)}\left(\frac{\sin 2\theta}{2} - \theta\right) + \right. \tag{2.13}$$
$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{T_n'(\tau_0)}{T_n(\tau_0)}\left[\frac{\sin(n+1)\theta}{n+1} - \frac{\sin(n-1)\theta}{n-1}\right]\right\}$$

По этим формулам расчеты проделаны для $\tau_0 = 0.06,\ 0.08,\ 1,6$.

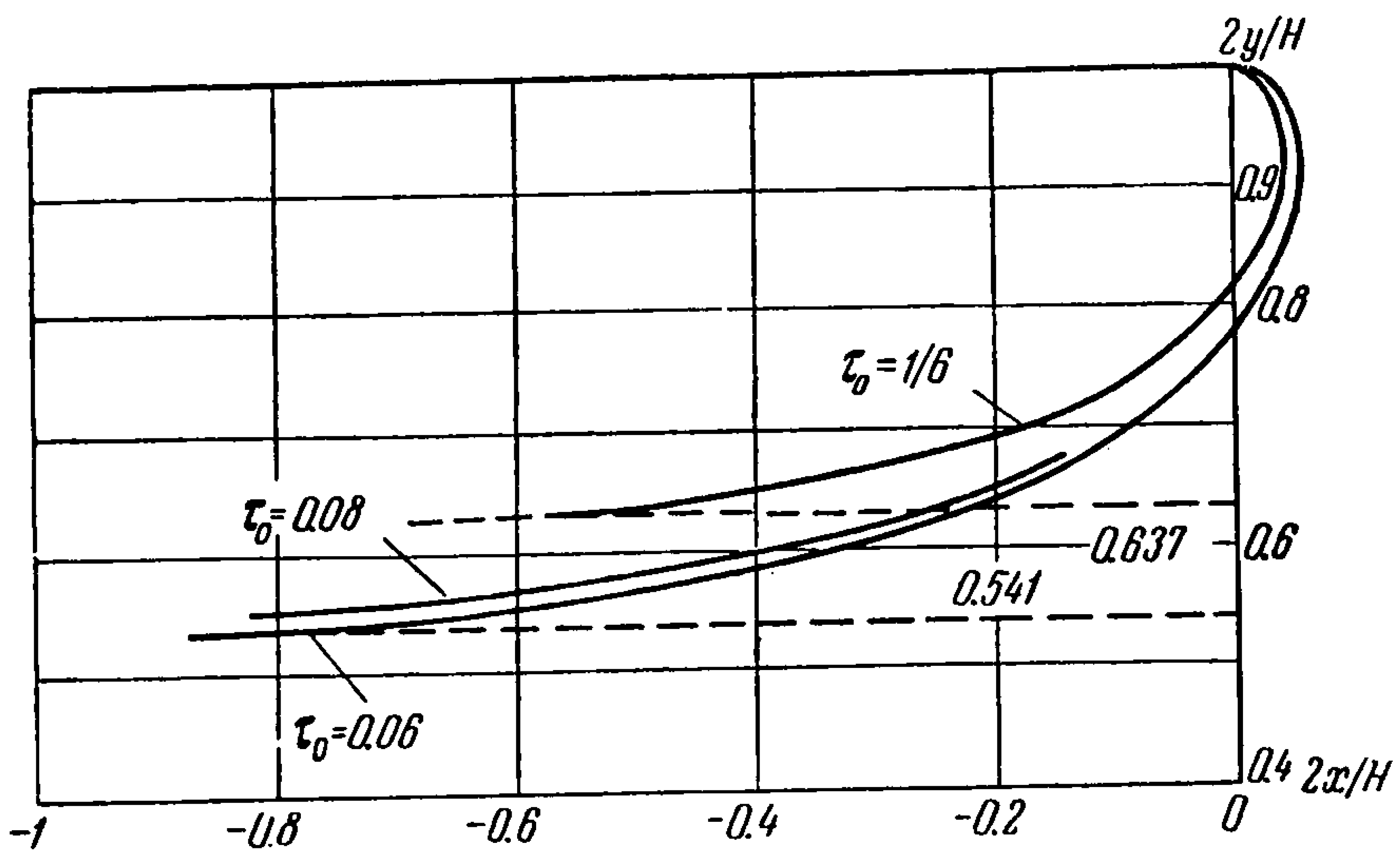
Результаты вычислений даны в табл. 2, а вид свободной струи при различных значениях τ_0 изображен на фиг. 4.

Критическое значение $\tau_0 = {}^1/_6 = \tau_*$ отвечает течению со скоростью звука вдоль границы свободной струи. В этом случае, как известно[5], выравнивание скоростей

Таблица 2

θ	$\tau_0=0.06$		$\tau_0=0.08$		$\tau_0=\frac{1}{6}$	
	$2x/H$	$2y/H$	$2x/H$	$2y/H$	$2x/H$	$2y/H$
0°	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000
10°	0.01842	0.99816	0.01762	0.99826	0.00958	0.99905
30°	0.02049	0.99363	0.01981	0,99493	0.01365	0.99613
40°	0.02682	0.99131	0.02596	0.99151	0,01918	0.99275
50°	0.02856	0.98834	0.02784	0.98854	0.02280	0.98852
60°	0.04518	0.96560	0.04376	0.96675	0.03377	0.97336
80°	0,05398	0.92815	0.05240	0.93044	0.04239	0.94266
90°	0.05476	0.92557	0.05319	0.92735	0.04348	0.93304
100°	0.04992	0.88295	0.04855	0.88634	0.04020	0.90204
110°	0.04370	0.85491	0.04238	0.85900	0.03411	0.87703
120°	0.02907	0.82720	0.02817	0.83186	0.02091	0.85056
130°	—0.01309	0.76565	—0.01196	0.77272	—0.02504	0.80676
140°	—0.06659	0.73267	—0.02656	0.75940	—0.03087	0.78584
150°	—0.14336	0.67198	—0.13794	0.68216	—0.10902	0.73157
160°	—0.17691	0.65482	—0.17167	0.66501	—0.15568	0.70929
170°	—0.47429	0.58180	—0.45536	0.59670	—0.34863	0.67104
175°	—0.73866	0.54813	—0.70623	0.56333	—0.49900	0.64169
178°	—0.83927	0.54166	—0.80163	0.55719	—0.55521	0.63807
179°	—0.85470	0.54124	—0.81627	0.55679	—0.56372	0.63724
180°					—0.56655	0.63781

газа в струе происходит вдоль прямой, перпендикулярной оси струи и находящейся на расстоянии $x_* = -{}^1/_2 H\, 0.5666$ от оси y. Значение x_* получается из (2.13) при



Фиг. 4

$\tau_0 = {}^1/_6$ и $\theta = 180°$. При $\tau_0 < {}^1/_6$ выравнивание скоростей в струе достигается лишь асимптотически при удалении по струе в бесконечность.

Поступила 25 VII 1957

Институт механики
Академии наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. О газовых струях. Полное собрание сочинений С. А. Чаплыгина, т. II, Изд. АН СССР, 1933, стр. 3—90.
2. Ламб Г. Гидродинамика. Перевод с английского. Гостехиздат, М., 1947.
3. Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н. Курс современного анализа. Перевод с английского, ч. II, ГТТИ, Л.— М., 1934.
4. Ferguson D. F. and Lighthill M. J. The hodograph trans-sonic flow. IV. Tables. Proc. of Roy. Soc., № 1028, 192, 1947, стр. 135—142.
. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, гл. X, § 4, ГТТИ, М.— Л., 1950.