ЧИСТО-ПЛАСТИЧЕСКАЯ ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Э. И. Григолюк

(Москва)

Статья посвящена устойчивости сферической, цилиндрической и конической оболочек за пределом упругости, исходя из уравнений течения Прандтля — Рёйсса и предположения о чисто-пластическом состоянии при потере устойчивости.

1. Уравнения задачи. Исследование устойчивости тонких пологих оболочек за пределом упругости, если основываться на теории течения Прандтля — Рёйсса и предположении об отсутствии в момент потери устойчивости разгрузки, приводится к системе двух уравнений относительно прогиба срединной поверхности w и силовой функции F, удовлетворяющей уравнениям равновесия оболочки в случае плоской задачи [1]:

$$\alpha_1 w_{xxxx} - \alpha_2 w_{xxxy} + \alpha_3 w_{xxyy} - \alpha_4 w_{xyyy} + \alpha_5 w_{yyyy} - \\ - \frac{F_{yy}}{R_1} - \frac{F_{xx}}{R_2} - \sigma_x h w_{xx} - \sigma_y h w_{yy} - 2\tau_{xy} h w_{xy} = 0 \tag{1.1}$$

$$\beta_1 F_{xxxx} + \beta_2 F_{xxxy} + \beta_3 F_{xxyy} + \beta_4 F_{xyyy} + \beta_5 F_{yyyy} + \frac{w_{xx}}{R_2} + \frac{w_{yy}}{R_1} = 0 \tag{1.2}$$

где

$$\alpha_1 = d_{11}, \quad \alpha_2 = 2d_{13}, \quad \alpha_3 = 2(d_{12} + d_{33}), \quad \alpha_4 = 3d_{23}, \quad \alpha_5 = d_{22} \\ \beta_1 = A_{22}, \quad \beta_2 = 2A_{23}, \quad \beta_3 = -2A_{12} + A_{33}, \quad \beta_4 = 2A_{13}, \quad \beta_5 = A_{11} \tag{1.3}$$

причем

$$d_{11} = \frac{h^2}{12} b_{11}, \quad d_{12} = \frac{h^2}{12} b_{12}, \quad d_{13} = \frac{h^3}{6} b_{13}, \quad d_{22} = \frac{h^2}{12} b_{22}, \quad d_{23} = \frac{h^2}{6} b_{23}, \quad d_{33} = \frac{h^2}{6} b_{33}$$

$$A_{11} = \frac{b_{22}b_{33} - b_{23}^2}{\Delta}, \quad A_{12} = \frac{b_{12}b_{33} - b_{13}b_{23}}{\Delta}, \quad A_{13} = \frac{b_{13}b_{22} - b_{12}b_{23}}{\Delta} \\ A_{22} = \frac{b_{11}b_{33} - b_{13}^2}{\Delta}, \quad A_{23} = \frac{b_{13}b_{12} - b_{11}b_{23}}{\Delta}, \quad A_{33} = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{\Delta} \tag{1.4}$$

Здесь

$$\Delta = b_{11}b_{22}b_{33} - b_{11}b_{23}^2 - b_{13}^2 b_{22} - b_{12}^2 b_{33} - 2b_{12}b_{13}b_{23} \tag{1.5}$$

При этом

$$b_{11} = A\left[2(1+\nu) + \frac{1}{2}\,\frac{(1+\nu)(2\sigma_y - \sigma_x)^2 + 18\tau_{xy}^2}{\sigma_i^2}\,\varphi\right]$$

$$b_{12} = A\left[2\nu(1+\nu) + \frac{1}{2}\,\frac{(1+\nu)(2\sigma_y - \sigma_x)(\sigma_y - 2\sigma_x) + 18\nu\tau_{xy}^2}{\sigma_i^2}\,\varphi\right]$$

$$b_{13} = \frac{3}{2} A \frac{(2-\nu)\sigma_x - (1-2\nu)\sigma_y}{\sigma_i^2}\,\varphi\tau_{xy}, \qquad b_{23} = \frac{3}{2} A \frac{(2-\nu)\sigma_y - (1-2\nu)\sigma_x}{\sigma_i^2}\,\varphi\tau_{xy}$$

$$b_{22} = A\left[2(1+\nu) + \frac{1}{2}\,\frac{(1+\nu)(2\sigma_x - \sigma_y)^2 + 18\tau_{xy}^2}{\sigma_i^2}\,\varphi\right]$$

$$b_{33} = A\left[1 - \nu^2 + \frac{1}{4}\,\frac{(5-4\nu)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - 2(4-5\nu)\sigma_x\sigma_y}{\sigma_i^2}\,\varphi\right] \tag{1.6}$$

$$A = \frac{1}{2}\,\frac{Eh}{1+\nu}\left[1 - \nu^2 + \frac{1}{4}\varphi\frac{(5-4\nu)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - 2(4-5\nu)\sigma_x\sigma_y + 18(1-\nu)\tau_{xy}^2}{\sigma_i^2}\right]^{-1}$$

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2}, \qquad \varphi = \frac{E}{E'} - 1 \tag{1.7}$$

В уравнениях (1.1) — (1.7) приняты следующие обозначения: σ_x, σ_y, τ_{xy} — мембранные напряжения в оболочке перед потерей устойчивости, R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки, h — толщина оболочки, E — модуль Юнга материала, E' — касательный модуль, ν — коэффициент Пуассона; индексы у w и F внизу справа означают дифференцирование по соответствующей координате. Система координат предполагается ортогональной.

2. Сферическая оболочка. Для сферической оболочки радиуса срединной поверхности $R_1 = R_2 = R$, подверженной действию равномерного внешнего давления p, напряжения перед выпучиванием равны

$$\sigma_x = \sigma_y = -\frac{pR}{2h} = -\sigma, \quad \sigma_i = \sigma$$

Тогда вместо (1.1) — (1.2) получим

$$\alpha\nabla^2\nabla^2 w - \frac{1}{R}\nabla^2 F + \sigma h \nabla^2 w = 0, \quad \beta\nabla^2\nabla^2 F + \frac{1}{R}\nabla^2 w = 0 \qquad (2.1)$$

где ∇^2 — оператор Лапласа, а

$$\alpha = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\frac{1+{}^1/_4\varphi}{1-\nu+{}^1/_2\varphi}, \qquad \beta = \frac{1+{}^1/_4\varphi}{Eh} \qquad (2.2)$$

Из (2.1) можно найти одно сравнение относительно прогиба

$$\alpha\nabla^2\nabla^2\nabla^2 w + \sigma h\nabla^2\nabla^2 w + \frac{1}{R^2\beta}\nabla^2 w = 0 \qquad (2.3)$$

которое удовлетворяется выражением

$$w = w_0 \sin\frac{nx}{R}\sin\frac{my}{R} \qquad (2.4)$$

Здесь w_0 — постоянная, n и m — число волн в меридиональном и окружном направлениях оболочки. После подстановки (2.4) в уравнение (2.3) получим

$$\sigma = \frac{1}{h\beta N} + \frac{\alpha N}{hR^2} \qquad (N = n^2 + m^2)$$

Из условия минимума $\partial\sigma / \partial N = 0$ имеем $N = R/\sqrt{\alpha\beta}$. Следовательно, критическое напряжение равно [см. (2.2) и (1.7)]

$$\sigma_* = \frac{2}{hR}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \quad \text{или} \quad \sigma_* = k_1\frac{Eh}{R} \qquad (2.5)$$

$$k_1 = \left[\frac{3}{2}(1+\nu)\left(1 - 2\nu + \frac{E}{E'}\right)\right]^{-1/2}$$

При $E = E'$ из (2.5) получается известная формула Цолли—Нёйта для определения критического напряжения в упругой сферической оболочке, нагруженной внешним равномерным давлением:

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \qquad (2.6)$$

Заметим, что независимо от того, будет ли волнообразование осесимметричным или асимметричным, критическое напряжение при упругом и чисто-пластическом выпучивании всегда определяется соответственно формулами (2.6) и (2.5).

3. Цилиндрическая оболочка. Для круговой цилиндрической оболочки

$$R_1 = \infty, \; R_2 = R \qquad (3.1)$$

Равномерное осевое сжатие. Здесь

$$\sigma_x = -\sigma, \qquad \sigma_y = 0, \qquad \tau_{xy} = 0, \qquad \sigma_i = \sigma$$

$$\alpha_1 = D\frac{1+{}^1/_4\varphi}{1+({}^5/_4-\varphi)\varphi/(1-\nu^2)}, \quad \alpha_2 = \alpha_4 = 0, \quad \alpha_3 = 2D\frac{1+({}^7/_2-\nu)\varphi/2(1+\nu)}{1+({}^5/_4-\nu)\varphi/(1-\nu^2)}$$

$$\alpha_5 = D\frac{1+\varphi}{1+({}^5/_4-\nu)\varphi/(1-\nu^2)}, \quad \beta_1 = \frac{1+{}^1/_4\varphi}{Eh}, \quad \beta_2 = \beta_4 = 0$$

$$\beta_3 = \frac{2-\varphi}{Eh}, \qquad \beta_5 = \frac{1+\varphi}{Eh}, \qquad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \qquad (3.2)$$

Решение уравнений (1.1) — (1.2) с учетом (3.1) — (3.2) ищем в виде

$$w = w_0 \sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{ny}{R}, \qquad F = F_0 \sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{ny}{R} \qquad (3.3)$$

где w_0, F_0 — постоянные, l — длина оболочки, $2m$ и n — соответственно число осевых и окружных волн при потере устойчивости.

В результате получим

$$\sigma = \frac{l^2}{m^2\pi^2R^2h}\frac{1}{\beta_1+\beta_3\gamma+\beta_5\gamma^2}+\frac{m^2\pi^2}{l^2h}(\alpha_1+\alpha_3\gamma+\alpha_5\gamma^2), \qquad \gamma=\frac{n^2l^2}{m^2\pi^2R^2} \tag{3.4}$$

Вводя сюда выражение (3.2), найдем

$$\sigma=\frac{E\gamma}{n^2}\frac{1}{(1+\gamma)^2+{}^1/_4(1-2\gamma)^2\varphi}+$$
$$+\frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)}\frac{n^2}{\gamma}\frac{(1+\gamma)^2+[{}^1/_4+({}^7/_2-\nu)\gamma/(1+\nu)+\gamma^2]\varphi}{1+({}^5/_4-\nu)\varphi/(1-\nu^2)} \tag{3.5}$$

Если считать γ большим числом или если полагать волнообразование оболочки осесимметричным ($n=0$), то получим формулу для осевого критического напряжения:

$$\sigma_*=k_2\frac{Eh}{R}, \qquad k_2=\left[3\left(\frac{5}{4}-\nu\right)\frac{E}{E'}-\left(\frac{1}{2}-\nu\right)^2\right]^{-1/2} \tag{3.6}$$

Для упругой задачи ($E=E'$) выражение (3.6) переходит в известную формулу Тимошенко (2.6).

Равномерное боковое давление. Пусть p — внешнее равномерное боковое давление на оболочку. Тогда

$$\sigma_x=0, \qquad \sigma_y=-\frac{pR}{h}=\sigma, \qquad \tau_{xy}=0, \qquad \sigma_i=\sigma \tag{3.7}$$

и

$$\alpha_1=D\frac{1+\varphi}{1+({}^5/_4-\nu)\varphi/(1-\nu^2)}, \qquad \alpha_2=\alpha_4=0$$

$$\alpha_5=D\frac{1+{}^1/_4\varphi}{1+({}^5/_4-\nu)\varphi/(1-\nu^2)} \qquad \alpha_3=2D\frac{1+({}^7/_2-\nu)\varphi/2(1+\nu)}{1+({}^5/_4-\nu)\varphi/(1-\nu^2)} \tag{3.8}$$

$$\beta_1=\frac{1+\varphi}{Eh}, \quad \beta_2=\beta_4=0, \quad \beta_3=\frac{2-\varphi}{Eh}, \quad \beta_5=\frac{1+{}^1/_4\varphi}{Eh} \tag{3.9}$$

Введем (3.1), (3.7), (3.9), а также выражения (3.3) при $m=1$ в уравнения (1.1) — (1.2). Найдем

$$\sigma=\frac{1}{h\gamma}\left[\frac{l^2}{\pi^2R^2}\frac{1}{\beta_1+\beta_3\gamma+\beta_5\gamma^2}+\frac{\pi^2}{l^2}(\alpha_1+\alpha_3\gamma+\alpha_5\gamma^2)\right], \quad \gamma=\frac{n^2l^2}{\pi^2R^2} \tag{3.10}$$

или

$$\sigma=E\left[\frac{1}{n^2}\frac{1}{(1+\gamma)^2+(1-{}^1/_2\gamma)^2\varphi}+\frac{1}{12(1-\nu^2)}\frac{h^2}{R^2}\frac{n^2}{\gamma^2}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{(1+\gamma)^2+[1+({}^7/_2-\nu)\gamma/(1+\nu)+{}^1/_4\gamma^2]\varphi}{1+({}^5/_4-\nu)\varphi/(1-\nu^2)}\right] \tag{3.11}$$

Когда $\gamma \gg 1$, то имеем

$$\sigma=E\left[\frac{1}{n^6}\frac{\pi^4R^4}{l^4}\frac{1}{1+{}^1/_4\varphi}+\frac{1}{12(1-\nu^2)}\frac{h^2}{R^2}\frac{1+{}^1/_4\varphi}{1+({}^5/_4-\nu)\varphi/(1-\nu^2)}n^2\right] \tag{3.12}$$

При

$$n^2=\frac{\sqrt{6}(1-\nu^2)^{1/4}}{(1+{}^1/_4\varphi)^{1/2}}\left[1+\frac{{}^5/_4-\nu}{1-\nu^2}\varphi\right]^{1/4}\frac{\pi R}{l}\left(\frac{R}{h}\right)^{1/2}=$$
$$=\frac{2\pi\sqrt{6}}{(3+E/E')^{1/4}}\left[\left(\frac{5}{4}-\nu\right)\frac{E}{E'}-\left(\frac{1}{2}-\nu\right)^2\right]^{1/4}\frac{R}{l}\left(\frac{R}{h}\right)^{1/2} \tag{3.13}$$

получим следующее выражение для критического напряжения:

$$\delta_*=k\left(\frac{h}{R}\right)^{3/2}, \qquad k_3=\frac{\pi}{3\sqrt{6}}\frac{(3+E/E')^{1/2}}{\left[\left(\frac{5}{4}-\nu\right)\frac{E}{E'}-\left(\frac{1}{2}-\nu\right)^2\right]^{3/4}} \tag{3.14}$$

Когда потеря устойчивости происходит в упругой области:

$$k_3 = \frac{2\pi}{3\sqrt{6}} \frac{1}{(1-\nu^2)^{3/4}} \tag{3.15}$$

Всестороннее равномерное давление. Если цилиндрическая оболочка подвержена действию внешнего всестороннего давления p, то

$$\sigma_x = -\frac{1}{2}\sigma, \qquad \sigma_y = -\frac{pR}{h} = -\sigma, \qquad \tau_{xy} = 0, \qquad \sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma \tag{3.16}$$

$$\alpha_1 = D\frac{1+{}^3/_4\varphi}{1+3\varphi/4(1-\nu^2)}, \quad \alpha_2 = \alpha_4 = 0, \quad \alpha_3 = 2D\frac{1+3\varphi/4(1+\nu)}{1+3\varphi/4(1-\nu^2)}$$

$$\alpha_5 = D\frac{1}{1+3\varphi/4(1-\nu^2)}, \quad \beta_1 = \frac{1+{}^3/_4\varphi}{Eh}, \quad \beta_2 = \beta_4 = 0, \quad \beta_3 = \frac{2}{Eh}, \quad \beta_5 = \frac{1}{Eh}$$

Используя выражения (3.1), (3.16) и (3.3) при $m = 1$, из уравнений (1.1) — (1.2) получим формулу для определения критического внешнего всестороннего давления на цилиндрическую оболочку:

$$\sigma = \frac{E}{{}^1/_2+\gamma}\left[\frac{\gamma}{n^2}\frac{1}{(1+\gamma)^2+3\varphi/4} + \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{h^2}{l^2}\frac{(1+\gamma)^2+{}^3/_4[1+2\gamma/(1+\nu)]\varphi}{1+3\varphi/4(1-\nu^2)}\right] \tag{3.17}$$

переходящую при $\varphi = 0$ в известную формулу Мизеса.

Кручение. Найдем критическое напряжение круговой цилиндрической оболочки, подверженной действию крутящих моментов M на краях оболочки. Имеем

$$\sigma_x = \sigma_y = 0, \qquad \tau_{xy} = \frac{M}{2\pi Rh} = \tau, \qquad \sigma_i = \tau\sqrt{3}$$

$$\alpha_1 = \alpha_5 = D, \qquad \alpha_2 = \alpha_4 = 0, \qquad \alpha_3 = 2kD, \qquad k = \frac{1+\nu+{}^3/_2\nu\varphi}{1+\nu+{}^3/_2\varphi} \tag{3.18}$$

$$\beta_1 = \beta_5 = \frac{1}{Eh}, \qquad \beta_2 = \beta_4 = 0, \qquad \beta_3 = \frac{2(1+{}^3/_2\varphi)}{Eh}$$

Уравнения (1.1) — (1.2) с учетом (3.18) удовлетворяются выражениями:

$$w = w_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{l} - \frac{ny}{R}\right), \qquad F = F_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{t} - \frac{ny}{R}\right) \tag{3.19}$$

Тогда критическое касательное напряжение отыскивается из формулы

$$\tau = \frac{1}{2}E\left[\frac{\sqrt{\gamma}}{n^2}\frac{1}{(1+\gamma)^2+3\gamma\varphi} + \frac{1}{12(1-\nu^2)}\frac{h^2}{R^2}\frac{n^2}{\gamma\sqrt{\gamma}}(1+2k\gamma+\gamma^2)\right] \tag{3.20}$$

При $n = 2$ круговое поперечное сечение цилиндрической оболочки обращается в эллиптическое:

$$\tau = \frac{1}{2}E\left[\frac{1}{4}\frac{\sqrt{\gamma}}{(1+\gamma)^2+3\gamma\varphi} + \frac{1}{3(1-\nu^2)}\frac{h^2}{R^2}\frac{1+2k\gamma+\gamma^2}{\gamma\sqrt{\gamma}}\right] \tag{3.21}$$

Отсюда в случае упругой задачи ($k = \varphi = 0$) получим при $\gamma \gg 1$ формулу Доннелла

$$\tau_* = k_4 E\left(\frac{h}{R}\right)^{3/2}, \qquad k_4 = \frac{2}{3\sqrt{6}}\frac{1}{(1-\nu^2)^{3/4}} \tag{3.22}$$

Поступила 18 IX 1957

Институт механики
АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И. О выпучивании тонких оболочек за пределом упругости. Известия ОТН АН СССР, № 10, стр. 2—11, 1957.
2. Качанов Л. М. К вопросу об устойчивости упруго-пластического равновесия. Вестник Ленинградского университета, № 19, стр. 114—132, 1956.
3. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. Изд. 2. Гостехтеоретиздат. М., 1955.