О НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЯХ В ДЛИННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Хуан Кэ-чжи

(Пекин)

Целью заметки является применение метода А. Л. Гольденвейзера [1] для асимптотического интегрирования уравнений теории упругих оболочек к случаю цилиндрической оболочки, когда ее длина l и характерный радиус кривизны R поперечного сечения — величины разных порядков.

Для простоты рассмотрим длинную круговую цилиндрическую оболочку, для которой

$$[l\,/\,R] = [h\,/\,R]^{-1/2}$$

Здесь и в дальнейшем квадратные скобки обозначают порядки величин, $2h$ — толщина оболочки. Основное уравнение пишется [1]

$$(1-\sigma^2)\frac{\partial^4\Phi}{\partial\xi^4} + a^2\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)^4 + (8-2\sigma^2)\frac{\partial^6}{\partial\xi^4\partial\theta^2} + 2\frac{\partial^6}{\partial\theta^6} + \right.$$

$$\left. + 4(1-\sigma^2)\frac{\partial^4}{\partial\xi^4} + 4\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\theta^2} + \frac{\partial^4}{\partial\theta^4}\right]\Phi = 0 \qquad (1)$$

Здесь Φ — потенциальная функция, через которую выражаются все компоненты внутренних сил и деформации, σ — коэффициент Пуассона, $a^2 = h^2\,/\,3R^2$, u — расстояние по образующей, v — расстояние по направляющей кривой, $\xi = u\,/\,R$ и $\theta = v\,/\,R$ — безразмерные координаты. Введем другие безразмерные координаты $\alpha = u\,/\,l$, $\beta = l/v$ и перепишем (1):

$$(1-\sigma^2)\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^4} + b^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)^4\Phi + \gamma b^{3/2}\left\{(8-2\sigma^2)\frac{\partial^6}{\partial\alpha^4\partial\beta^2} + 2\frac{\partial^6}{\partial\beta^6}\right\}\Phi +$$

$$+\gamma^2 b\left\{4(1-\sigma^2)\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + 4\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial\beta^4}\right\}\Phi = 0 \qquad (2)$$

Здесь $b = a^2\,/\,\gamma^2$ — новый малый параметр, $\gamma = h^{1/2}\,l\,/\,3^{1/4}\,R^{3/2}$ — постоянное, которое стремится к конечному пределу при $h\to 0$. Если (1) относится к классу уравнений, рассмотренных А. Л. Гольденвейзером [1] и имеющих вид $L(\Phi) + a^2N(\Phi) = 0$, то (2) уже относится к более общему классу, рассмотренному Тржицинским [2].

Согласно работе [1] будем искать интегралы уравнения (2) в виде

$$\Phi = k^q\varphi(\alpha,\beta;k)\,e^{kf(\alpha,\beta)} \qquad (k = b^{-t} = \gamma^{2t}a^{-2t} = 3^t\gamma^{2t}(R\,/\,h)^{2t}) \qquad (3)$$

Здесь t — показатель изменяемости искомого интеграла относительно малого параметра b. Предположим, что $\varphi(\alpha,\beta;k)$ может быть представлена в виде асимптотического ряда

$$\varphi(\alpha,\beta;k) \sim \varphi_0(\alpha,\beta) + k^{-1}\varphi_1(\alpha,\beta) + \cdots + k^{-n}\varphi_n(\alpha,\beta) + \cdots \qquad (\varphi_0 \not\equiv 0) \quad (4)$$

Тогда на основе соотношений (3), (4) можно представить отдельные члены левой части уравнения (2) в виде асимптотических рядов:

$$(1-\sigma^2)\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^4} \sim k^q\{k^4L_0(\varphi_0) + k^3(L_1(\varphi_0) + L_0(\varphi_1)) + \cdots\}\,e^{kf}$$

$$b^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)^4\Phi \sim k^q\{k^{8-2/t}M_0(\varphi_0) + k^{7-2/t}(M_1(\varphi_0) + M_0(\varphi_1)) + \cdots\}\,e^{kf} \qquad (5)$$

$$\gamma b^{3/2}\left\{(8-2\sigma^2)\frac{\partial^6}{\partial\alpha^4\partial\beta^2} + 2\frac{\partial^6}{\partial\beta^6}\right\}\Phi \sim k^q\{k^{6-3/2t}N_0(\varphi_0) + k^{5-3/2t}(N_1(\varphi_0) + N_0(\varphi_1)) + \cdots\}\,e^{kf}$$

$$\gamma^2 b\left\{4(1-\sigma^2)\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + 4\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial\beta^4}\right\}\Phi \sim k^q\{k^{4-1/t}P_0(\varphi_0) +$$

$$+ k^{3-1/t}(P_1(\varphi_0) + P_0(\varphi_1)) + \cdots\}\,e^{kf}$$

Здесь

$$L_0=(1-\sigma^2)\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right)^4,\qquad M_0=\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)^2\right\}^4$$
$$N_0=\gamma\left\{(8-2\sigma^2)\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right)^4\left(\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)^2+2\left(\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)^6\right\}$$
$$P_0=\gamma^2\left\{4(1-\sigma^2)\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right)^4+4\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right)^2\left(\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)^4\right\}\tag{6}$$

и L_i, M_i, N_i, P_i $(i\geqslant 1)$ — линейные дифференциальные операторы.

Для простоты условимся, что величина $1/2t$ принимает лишь целые значения При этом могут иметь место три различных случая.

Случай 1. Пусть $1/2t=2+p$ (p — целое положительное число). Для определения функции изменяемости[1] $f(\alpha,\ \beta)$ из уравнения (2) получаем

$$L_0=(1-\sigma^2)\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right)^4=0\qquad (f=f(\beta))\tag{7}$$

а также для определения функции интенсивности[1]

$$(1-\sigma^2)\frac{\partial^4\varphi_0}{\partial\alpha^4}=0,\ (1-\sigma^2)\frac{\partial^4\varphi_1}{\partial\alpha^4}=0,\ \ldots,\qquad (1-\sigma^2)\frac{\partial^4\varphi_{2p-1}}{\partial\alpha^4}=0$$
$$(1-\sigma^2)\frac{\partial^4\varphi_{2p}}{\partial\alpha^4}+\gamma^2\left(\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)^4\varphi_0=0,\ \ldots\tag{8}$$

Следовательно, уравнение безмоментной теории

$$(1-\sigma^2)\,\partial^4\Phi/\partial\alpha^4=0\tag{9}$$

дает при построении интегралов уравнения (2) асимптотическую погрешность

$$k^{-2p}=(3\gamma^2)^{-(1-4t)}(h/R)^{2(1-4t)}$$

Кроме того, как указано в работе [1], безмоментная теория, вообще говоря, дает только те интегралы, из которых складывается напряженное состояние замкнутых оболочек.

Случай 2. Пусть $1/2t=2$, т. е. $t={}^1/_4$. Мы получаем опять уравнение (7) для определения функции изменяемости $f(\alpha,\ \beta)$ и следующие уравнения для определения функций интенсивности:

$$(1-\sigma^2)\frac{\partial^4\varphi_0}{\partial\alpha^4}+(M_0+N_0+P_0)\,\varphi_0=0$$
$$(1-\sigma^2)\frac{\partial^4\varphi_1}{\partial\alpha^4}+(M_0+N_0+P_0)\,\varphi_1+(M_1+N_1+P_1)\,\varphi_0=0,\ldots\tag{10}$$

где согласно уравнению (6),

$$M_0=\left(\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)^8,\qquad N_0=2\gamma\left(\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)^6,\qquad P_0=\gamma^2\left(\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)^4\tag{11}$$

Следовательно, приближенное уравнение

$$(1-\sigma^2)\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^4}+b^2\frac{\partial^8\Phi}{\partial\beta^8}+3\gamma b^{3/2}\frac{\partial^6\Phi}{\partial\beta^6}+\gamma^2 b\frac{\partial^4\Phi}{\partial\beta^4}=0\tag{12}$$

или в координатах ξ, θ

$$(1-\sigma^2)\frac{\partial^4\Phi}{\partial\xi^4}+a^2\frac{\partial^4}{\partial\theta^4}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+1\right)^2\Phi=0\tag{13}$$

дает при построении интегралов уравнения (2) асимптотическую погрешность $k^{-2}=3^{-1/2}\gamma^{-1}h/R$. Уравнение (13) применяется В. З. Власовым для расчета цилин-

[1] Эти термины введены А. Л. Гольденвейзером [1].

дрических оболочек «средней длины». Для искомого интеграла имеем

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\right] = [\Phi], \qquad \left[\frac{\partial\Phi}{\partial\beta}\right] = [k\Phi] = \left[\frac{l}{R}\Phi\right]$$

т. е.

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right] = \left[\frac{\Phi}{l}\right], \qquad \left[\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right] = \left[\frac{\Phi}{R}\right] \tag{14}$$

Соотношением (14) пользовался Ю. Н. Работнов в диссертации («Теория тонких оболочек», МГУ, 1946) для установления типов напряженного состояния, возможных в цилиндрической оболочке на значительной ее длине.

Случай 3. Пусть $1/2t = 1$, т. е. $t = 1/2$. Уравнение для определения функции изменяемости $f(\alpha, \beta)$ следующее:

$$L_0 + M_0 = (1-\sigma^2)\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right)^4 + \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)^2\right\}^4 = 0 \tag{15}$$

На основе (15) мы можем построить четыре интеграла с заданным нехарактеристическим опорным контуром [1]. Эти интегралы описывают простые краевые эффекты около концевых поперечных сечений. Нужно отметить, что в нашем случае показатель изменяемости относительно малого параметра $a = h/\sqrt{3}R$ равен $2t = 1$; этот результат отличается от результата $2t = 1/2$, полученного А. Л. Гольденвейзером [1]. Это объясняется тем, что для длинной цилиндрической оболочки безразмерная переменная α отличается от безразмерной величины ξ, которой пользовался А. Л. Гольденвейзер, малым множителем R/l.

Полное напряженное состояние может быть построено в виде суммы указанных выше случаев напряженного состояния.

Поступила 5 VI 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, 1953.
2. Trjitzinsky W. J. Analytic theory of parametric differential equations. Математический сборник, т. 15 (57), № 2, 1944.