

## О РАВНОВЕСИИ ГИБКИХ ПЛАСТИНОК ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

Ю. Р. Лепик

(Тарту)

Задача о равновесии гибких упруго-пластических пластинок была рассмотрена автором в работе [1], где составлены основные уравнения и выработан общий метод их решения; этот метод по существу совпадает с «методом упругих решений» А. А. Ильюшина. Настоящая статья является развитием работы [1]. Здесь выводятся формулы для определения некоторых вспомогательных величин и в качестве примеров применения общей теории решаются две задачи о равновесии круглых пластинок. Вычисления, которые были проведены в Вычислительном центре МГУ на быстродействующей счетной машине «Стрела», указывают на хорошую сходимость приближений, найденных по методу упругих решений.

§ 1. Основные соотношения. 1. Как известно из теории Кармана, в случае изгиба пластинок средней толщины должны быть удовлетворены следующие зависимости:

а) уравнения равновесия

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} = -q + T_1 \kappa_1 + T_2 \kappa_2 + 2S \kappa_3 \quad (1.2)$$

б) уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \epsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_3}{\partial x \partial y} = \kappa_3^2 - \kappa_1 \kappa_2 \quad (1.3)$$

В этих формулах символами  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  обозначены компоненты деформаций и искривления элемента среднего слоя, причем

$$\kappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_3 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

К системе уравнений (1.1) — (1.3) прибавляются еще физические соотношения. Если исходить из теории малых упруго-пластических деформаций, считать материал пластинки несжимаемым и ограничиться только случаями, где влиянием зоны разгрузки в пластинке можно пренебрегать, то эти соотношения приобретают вид [1]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Eh} \left( T_1 - \frac{1}{2} T_2 \right) &= \left( 1 - \frac{1}{2} \Omega_1 \right) \epsilon_1 - \frac{h}{4} \Omega_2 \kappa_1 \\ \frac{1}{Eh} \left( T_2 - \frac{1}{2} T_1 \right) &= \left( 1 - \frac{1}{2} \Omega_1 \right) \epsilon_2 - \frac{h}{4} \Omega_2 \kappa_2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{1}{Eh} S &= \left( 1 - \frac{1}{2} \Omega_1 \right) \epsilon_3 - \frac{h}{4} \Omega_2 \kappa_3 \\ \frac{12}{Eh^3} \left( M_1 - \frac{1}{2} M_2 \right) &= -\frac{3}{h} \Omega_2 \epsilon_1 + \left( 1 - \frac{3}{2} \Omega_3 \right) \kappa_1 \\ \frac{12}{Eh^3} \left( M_2 - \frac{1}{2} M_1 \right) &= -\frac{3}{h} \Omega_2 \epsilon_2 + \left( 1 - \frac{1}{2} \Omega_3 \right) \kappa_2 \\ \frac{18}{Eh^3} H &= -\frac{3}{h} \Omega_2 \epsilon_3 + \left( 1 - \frac{3}{2} \Omega_3 \right) \kappa_3 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Смысл символов, использованных в (1.4) — (1.5), следующий ( $h$  — толщина пластинки):

$$\omega = 1 - \frac{1}{E} \frac{\sigma_i}{e_i}, \quad z^* = \frac{2}{h} z, \quad \Omega_i = \int_{-1}^{+1} \omega z^{*i-1} dz^* \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.6)$$

$$\Omega_4 = \left( 1 - \frac{1}{2} \Omega_1 \right)^{-1}, \quad \Omega_5 = \Omega_2 \Omega_4, \quad \Omega_6 = \frac{3}{4} (\Omega_2^2 \Omega_4 + 2\Omega_3)$$

Уравнения (1.1) обычно удовлетворяются, введя функцию напряжений  $F$ , зависимостями

$$T_1 = Eh \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad T_2 = Eh \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad S = -Eh \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (1.7)$$

Остаются еще уравнения (1.2) — (1.3). Эти уравнения можно при помощи соотношений (1.4) — (1.5) привести к виду, где единственными неизвестными являются прогиб  $w$  и функция напряжений  $F$ ; полученные результаты можно рассматривать как обобщения известных уравнений Кармана [2] на случай пластических деформаций.

2. Дадим теперь формулы для вычисления вспомогательных величин  $\Omega_1 - \Omega_6$ .

Имея в виду соотношения

$$e_{xx} = \varepsilon_1 + z\kappa_1, \quad e_{yy} = \varepsilon_2 + z\kappa_2, \quad e_{xy} = 2(\varepsilon_3 + z\kappa_3) \quad (1.8)$$

можем формулу для вычисления интенсивности деформаций  $e_i$  представить в виде

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{P_\varepsilon + 2zP_{\varepsilon\kappa} + z^2P_\kappa} \quad (1.9)$$

Здесь

$$P_\varepsilon = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2, \quad P_\kappa = \kappa_1^2 + \kappa_1\kappa_2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 \quad (1.10)$$

$$P_{\varepsilon\kappa} = \varepsilon_1\kappa_1 + \varepsilon_2\kappa_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_1\kappa_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_2\kappa_1 + \varepsilon_3\kappa_3$$

Введем еще безразмерные величины

$$z_0 = -\frac{2}{h} \frac{P_{\varepsilon\kappa}}{P_\kappa}, \quad z_\varepsilon = \frac{2}{h} \sqrt{\frac{P_\varepsilon}{P_\kappa}}, \quad z_s = \sqrt{3}h \frac{e_s}{\sqrt{P_\kappa}} \quad (1.11)$$

Из формулы (1.11) и из неравенства Шварца для квадратичных форм  $P_\varepsilon$ ,  $P_{\varepsilon\kappa}$ ,  $P_\kappa$  следует, что всегда  $|z_\varepsilon| \geq |z_0|$ .

Формула (1.9) получает в безразмерных величинах (1.11) вид:

$$e_i = \frac{e_s}{z_s} \sqrt{z^{*2} - 2z_0z^* + z_\varepsilon^2} \quad (1.12)$$

Из (1.12) вытекает, что интенсивность деформаций  $e_i$  имеет наименьшее значение в точках, где  $z^* = z_0$ , причем минимум величины  $e_i$  определяется по формуле

$$e_i|_{z^*=z_0} = \frac{e_s}{z_s} \sqrt{z_\varepsilon^2 - z_0^2}.$$

Отсюда приходим к выводу, что уравнение  $z^* = z_0$  представляет поверхность наименьшей интенсивности деформаций. Если во всех точках срединной поверхности выполняется условие  $|z_\varepsilon| = |z_0|$ , то  $e_i = 0$  при  $z^* = z_0$  и, следовательно, условие  $z^* = z_0$  оказывается уравнением нейтральной поверхности пластинки.

Пластические деформации возникают в тех точках, где  $e_i \geq e_s$ ; условие  $e_i = e_s$  является, таким образом, уравнением граничных поверхностей пластических деформаций. Если уравнения этих поверхностей представить в виде

$$z = \frac{2}{h} z_1(x, y), \quad z = \frac{2}{h} z_2(x, y)$$

то из соотношения (1.12) вытекает, что

$$z_1 = z_0 - \sqrt{z_s^2 + z_0^2 - z_\varepsilon^2}, \quad z_2 = z_0 + \sqrt{z_s^2 + z_0^2 - z_\varepsilon^2} \quad (1.13)$$

Следует отметить, что формула (1.13) применима только в случае, когда  $|z_1| < 1$ ,  $|z_2| < 1$  (тогда области пластических деформаций возникают на обоих краях пластинки). Если, вычисляя величины  $z_1$  и  $z_2$  по формуле (1.13), мы находим, что  $z_1 < -1$  или  $z_2 > 1$ , то это соотношение следует заменить условием  $z_1 = -1$  или соответственно  $z_2 = +1$  (в этом случае пластические деформации возникают только у одного края пластинки).

При  $|z_{1,2}| > 1$  все сечение пластинки деформируется упруго и должно взять  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = +1$ . Формулу (1.13) нельзя применить и при  $z_s^2 + z_0^2 - z_\varepsilon^2 \leq 0$ ; в таком случае в рассматриваемом сечении возникают чисто пластические деформации и величины  $z_{1,2}$  определяются по следующим условиям:

- |    |      |               |    |                   |
|----|------|---------------|----|-------------------|
| а) | если | $ z_0  < 1$ , | то | $z_1 = z_2 = z_0$ |
| б) | если | $z_0 < -1$ ,  | то | $z_1 = z_2 = -1$  |
| в) | если | $z_0 > 1$ ,   | то | $z_1 = z_2 = +1$  |

Ограничимся в дальнейшем случае линейного упрочнения материала. Обозначая символом  $\lambda$  параметр упрочнения, находим, что

$$\omega = \begin{cases} 0 & \text{при } e_i \leq e_s \\ \lambda(1 - e_s / e_i) & \text{при } e_i \geq e_s \end{cases} \quad (1.14)$$

Имея в виду формулы (1.12) — (1.14), можем теперь вычислить интегралы (1.6):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \Omega_1 &= 2 + z_1 - z_2 - z_s \Phi \\ \frac{1}{\lambda} \Omega_2 &= \frac{1}{2} (z_1^2 - z_2^2) - z_s [f(z_1) - f(z_2) - f(-1) + f(+1) + z_0 \Phi] \\ \frac{1}{\lambda} \Omega_3 &= \frac{1}{3} (2 + z_1^3 - z_2^3) - \frac{1}{2} z_s [(z_1 + 3z_0) f(z_1) - (z_2 + 3z_0) f(z_2) + \\ &+ (1 + 3z_0) f(1) + (1 - 3z_0) f(-1) + (3z_0^2 - z_s^2) \Phi] \end{aligned} \quad (1.15)$$

В этих формулах<sup>1</sup>

$$f(z^*) = \sqrt{z^{*2} - 2z_0 z^* + z_s^2}, \quad \Phi = \ln \frac{[f(1) + 1 - z_0][f(z_1) + z_1 - z_0]}{[f(-1) - 1 - z_0][f(z_2) + z_2 - z_0]} \quad (1.16)$$

Формула для определения величины  $\Phi$  имеет смысл только в случае, когда под логарифмом стоит выражение, не имеющее отрицательных значений. Докажем, что это действительно так. Введя вспомогательную функцию  $g(z^*) = f(z^*) + z^* - z_0$ , увидим в силу условия  $|z_s| \geq |z_0|$ , что

$$g'(z^*) = \frac{z^* - z_0}{\sqrt{(z^* - z_0)^2 + (z_s^2 - z_0^2)}} + 1 \geq 0$$

Следовательно, функция  $g(z^*)$  возрастает монотонно и в промежутке  $-1 \leq z^* \leq +1$  имеет наименьшее значение при  $z^* = -1$ . Однако так как

$$g(-1) = \sqrt{(1 + z_0)^2 + (z_s^2 - z_0^2)} - (1 + z_0) > 0$$

то функция  $g(z^*)$ , а с этим и выражение, стоящее в формуле (1.16) под знаком логарифма, могут в промежутке  $-1 \leq z^* \leq +1$  иметь только положительные значения, что и требовалось доказать.

В случае  $|z_0| = |z_s|$  формула (1.16) не применима, так как получается неопределенность в виде  $0/0$ . Однако, осуществляя переход  $|z_s| \rightarrow |z_0|$  и разыскивая неопределенности, получаем формулу, заменяющую (1.16) в случае  $|z_s| = |z_0|$ :

$$\Phi = \ln \frac{1 - z_0^2}{(z_2 - z_0)(z_0 - z_1)} \quad (1.17)$$

При применении формул (1.15) нужно иметь в виду, что величины  $z_s, z_0, z_1, z_2$  оказываются первоначально неизвестными: поэтому следует, как показано и в работе [1], вычислить величины  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  методом последовательных приближений. Для начального приближения целесообразно выбирать решение упругой задачи (метод упругих решений) или решение соответствующей линейной упруго-пластической задачи.

Изложенная схема для вычисления величин  $\Omega_1 - \Omega_6$  принципиально применима при любом виде диаграммы  $\sigma_i e_i$ , однако вычислительные затруднения в случае нелинейного упрочнения материала увеличиваются, так как интегралы (1.6) уже не выражаются в элементарных функциях и их нужно вычислить численно.

**§ 2. Большие прогибы круглой пластинки под действием поперечной нагрузки.**  
1. Рассмотрим круглую пластинку с радиусом  $a$  и толщиной  $h$ , нагруженную радиаль-симметрическим давлением  $q(r)$ . Край пластинки  $r = a$  будем считать защемленным; ограничимся случаем, где радиальное перемещение  $u$  равняется на крае  $r = a$  нулю (случай глухой заделки).

<sup>1</sup> Если  $|z_{1,2}| < 1$  и  $z_1 \neq z_2$ , то вычисление величины  $f(z^*)$  упрощается, так как в этом случае мы имеем  $f(z_1) = z_s$  и  $f(z_2) = z_s$ .

Будем решать поставленную задачу вариационным методом Лагранжа. В рассматриваемом случае вариационное уравнение Лагранжа принимает вид <sup>[1]</sup>:

$$\int_0^a \left[ \left(1 - \frac{1}{2} \Omega_1\right) \delta P_\varepsilon - \frac{h}{2} \Omega_2 \delta P_{\varepsilon x} + \frac{h^2}{12} \left(1 - \frac{3}{2} \Omega_3\right) \delta P_x - \frac{3q}{2Eh} \delta w \right] r dr = 0 \quad (2.1)$$

К уравнению (2.1) надлежит присоединить граничные условия:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \varepsilon_1 = \varepsilon_2, \quad x_1 = x_2, \quad u = 0, \quad \frac{dw}{dr} = 0, \quad \text{при} \quad r = 0 \\ & u/r, \quad (1/r)(dw/dr) \quad \text{ограничены при} \quad r = 0 \\ 2) \quad & u = w = dw/dr = 0 \quad \text{при} \quad r = a \end{aligned}$$

Введем безразмерные величины

$$u^* = \frac{a}{h^2} u, \quad w^* = \frac{w}{h}, \quad \rho = \frac{r}{a}, \quad q^* = \frac{a^4 q}{Eh^4} \quad (2.2)$$

Решение вариационной проблемы (2.1) будем искать в виде

$$u^* = \rho(1 - \rho^2)(C_1 + C_2 \rho^2 + \dots), \quad w^* = (1 - \rho^2)^2(A + B\rho^2 + \dots) \quad (2.3)$$

Нетрудно видеть, что в случае разложений (2.3) все граничные условия выполнены; при этом коэффициент  $A$  равняется величине относительного прогиба в центре пластинки  $w_0^*$ . Сохраняя в разложениях (2.3) только коэффициенты  $C_1, C_2, A$ , находим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{h^2}{a^2} [(1 - 3\rho^2)C_1 + \rho^2(3 - 5\rho^2)C_2 + 8\rho^2(1 - \rho^2)^2 A^2] \\ \varepsilon_2 &= \frac{h^2}{a^2} (1 - \rho^2)(C_1 + C_2 \rho^2), \quad \varepsilon_3 = 0 \\ x_1 &= \frac{4h}{a^2} (1 - 3\rho^2)A, \quad x_2 = \frac{4h}{a^2} (1 - \rho^2)A, \quad x_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Обозначим символами  $f_1, \dots, f_6$  следующие функции от  $\rho$ :

$$\begin{aligned} f_1 &= 3 - 12\rho^2 + 13\rho^4, & f_4 &= 8\rho^2(1 - \rho^2)^2(3 - 7\rho^2) \\ f_2 &= 4\rho^2(1 - 2\rho^2)(3 - 5\rho^2), & f_5 &= 8\rho^4(1 - \rho^2)^2(7 - 11\rho^2) \\ f_3 &= \rho^4(13 - 40\rho^2 + 31\rho^4), & f_6 &= 64\rho^4(1 - \rho^2)^4 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Вычисляя величины  $z_0, z_\varepsilon, z_s$  по формулам (1.11), (1.10) и (2.4), находим

$$\begin{aligned} z_0 &= -\frac{1}{4f_1 A} (2f_1 C_1 + f_2 C_2 + f_4 A^2) \\ z_\varepsilon^2 &= \frac{1}{4f_1 A^2} (f_1 C_1^2 + f_2 C_1 C_2 + f_3 C_2^2 + f_4 C_1 A^2 + f_5 C_2 A^2 + f_6 A^4) \\ z_s^2 &= \frac{3\mu^2}{16f_1 A^2} \quad \left( \mu = \frac{e_s a^2}{h^2} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Введем еще дополнительные обозначения

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2} \Omega_1\right) f_i(\rho) \rho d\rho \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \\ \beta_i &= \int_0^1 \Omega_2 f_i(\rho) \rho d\rho \quad (i = 1, 2, 4) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\gamma = \int_0^1 \left(1 - \frac{3}{2} \Omega_3\right) f_1(\rho) \rho d\rho, \quad Q = \frac{3}{2} \int_0^1 q^* (1 - \rho^2)^2 \rho d\rho$$

Учитывая формулы (2.4) и (2.7), можем теперь вариационное уравнение (2.1) переписать в развернутом виде:

$$\begin{aligned} & (2\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_4 A^2 - 2\beta_1 A) \delta C_1 + (\alpha_2 C_1 + 2\alpha_3 C_2 + \alpha_5 A^2 - \beta_2 A) \delta C_2 + \\ & + [2(\alpha_4 C_1 + \alpha_5 C_2 + 2\alpha_6 A^2 + \frac{4}{3} \gamma) A - (2\beta_1 C_1 + \beta_2 C_2 + 3\beta_4 A^2 + Q)] \delta A = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Так как вариации  $\delta C_1$ ,  $\delta C_2$ ,  $\delta A$  являются независимыми, то выражения, стоящие в формуле (2.8) перед этими вариациями, должны равняться нулю. Это условие ведет нас к следующей канонической системе уравнений, из которой определим величины  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $Q$ :

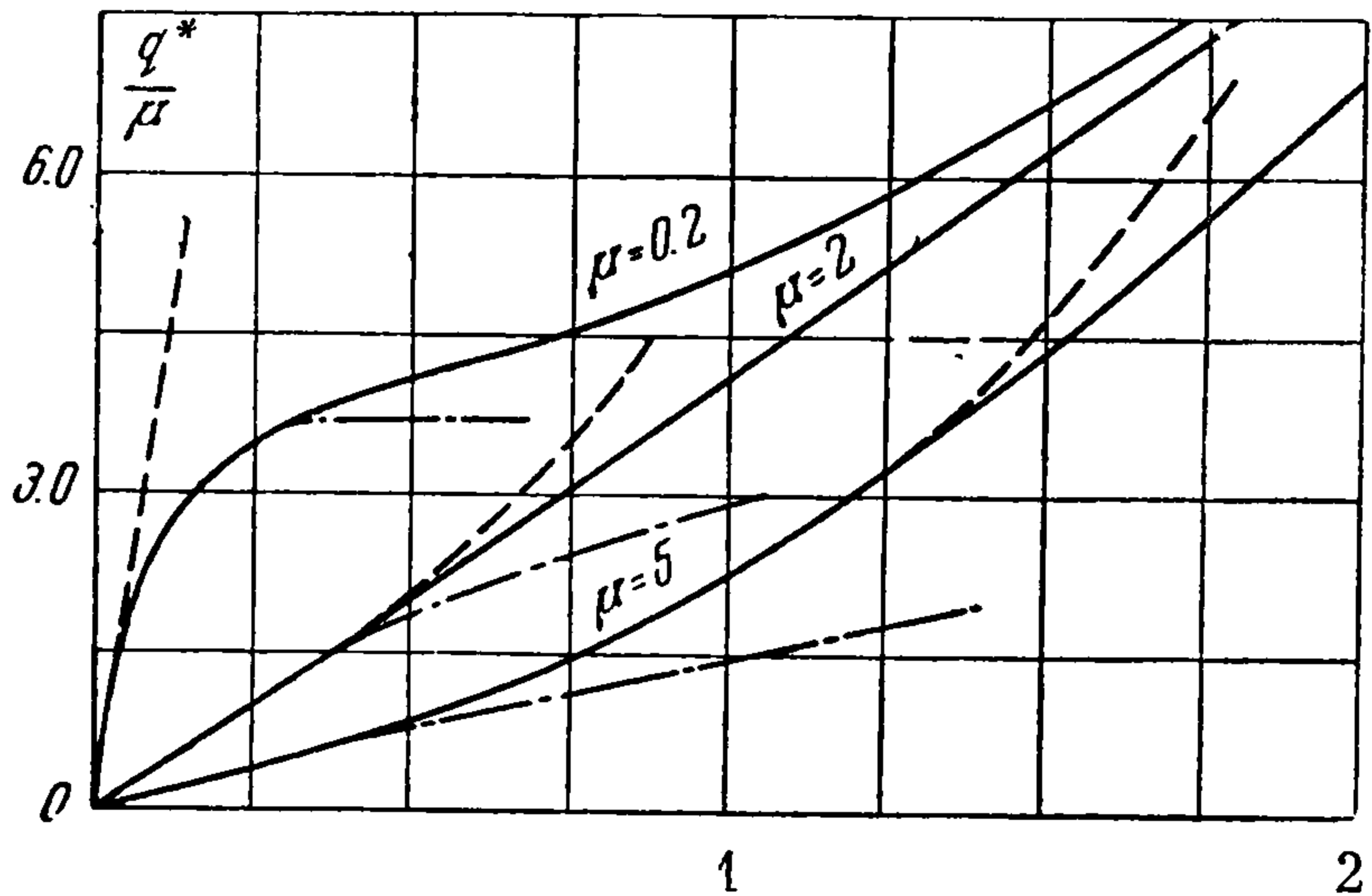
$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{\Delta} [(4\beta_1\alpha_3 - \alpha_2\beta_2) A + (\alpha_2\alpha_5 - 2\alpha_3\alpha_4) A^2] \\ C_2 &= \frac{1}{\Delta} [2(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2) A + (\alpha_2\alpha_4 - 2\alpha_1\alpha_5) A^2] \\ Q &= 2 \left( \alpha_4 C_1 + \alpha_5 C_2 + 2\alpha_6 A^2 + \frac{4}{3} \gamma \right) A - 2\beta_1 C_1 - \beta_2 C_2 - 3\beta_4 A^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь  $\Delta = 4\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2^2$ .

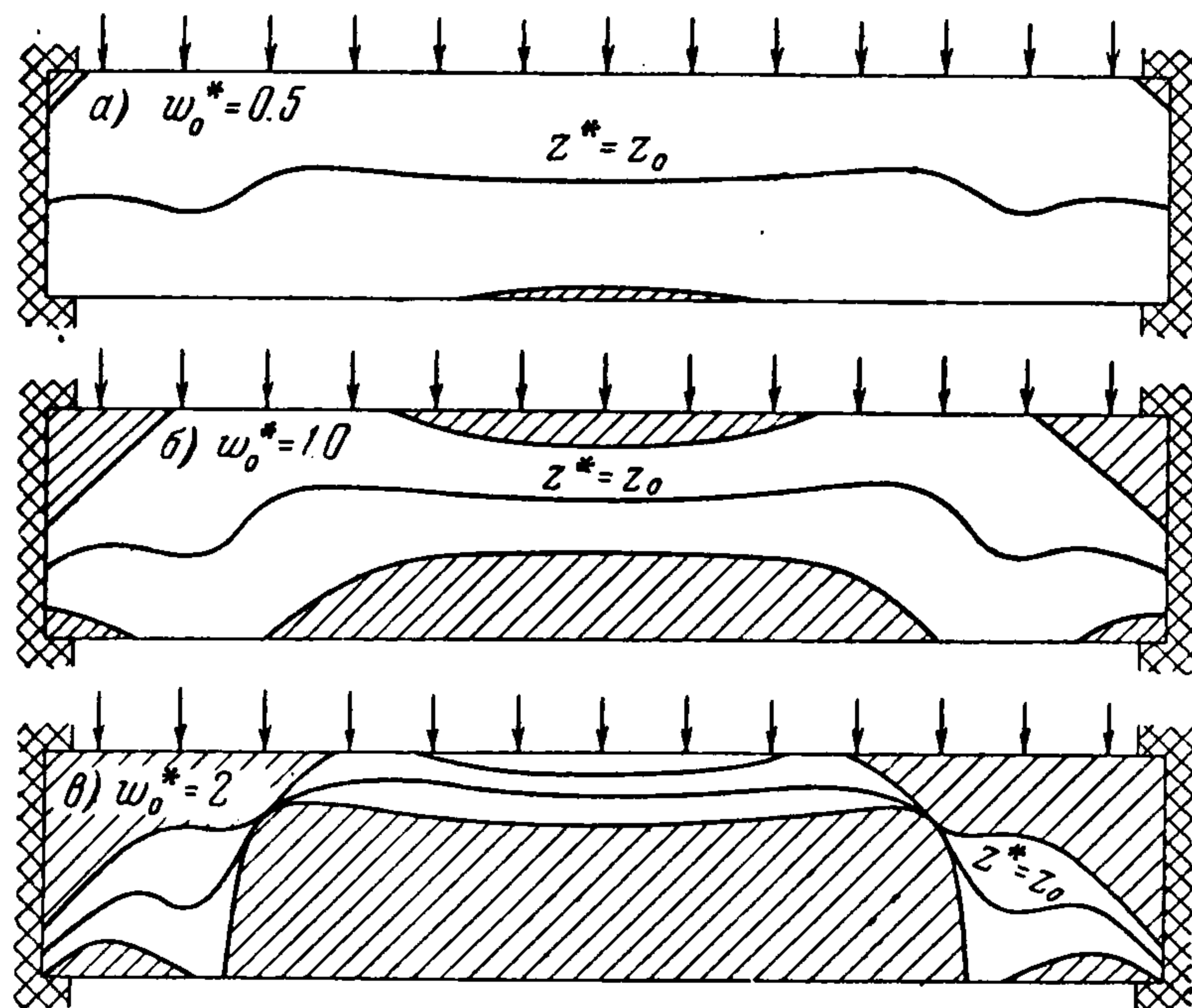
Систему (2.9) можно решить последовательным приближением; при этом будем исходить из упругого решения, которое в рассматриваемом случае дает

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{11}{30} A^2, \quad C_2 = -\frac{5}{6} A^2 \\ Q &= \frac{16}{9} A + \frac{23}{7} \left( \frac{8}{15} \right)^2 A^3 \end{aligned} \quad (2.11)$$

2. Конкретные вычисления на быстродействующей счетной машине были проведены для случаев  $\mu = 0.2$ ,  $\mu = 2$ ,  $\mu = 5$ ; полученные результаты представлены в виде графиков (фиг. 1—6). Пунктирными линиями на фиг. 1, 3 и 4 отмечены решения соответствующих упругих задач; штрих-пунктирными линиями решения найдены по линейной теории. Диаграммы 1—5 составлены для материала, не имеющего упрочнения (т. е.  $\lambda = 1$ ). Диаграмма «нагрузка — прогиб» дается на фиг. 1. Распределение зон



Фиг. 1



Фиг. 2

пластических деформаций для случая  $\mu = 2$  показано на фиг. 2 (пластические деформации отмечены штриховкой).

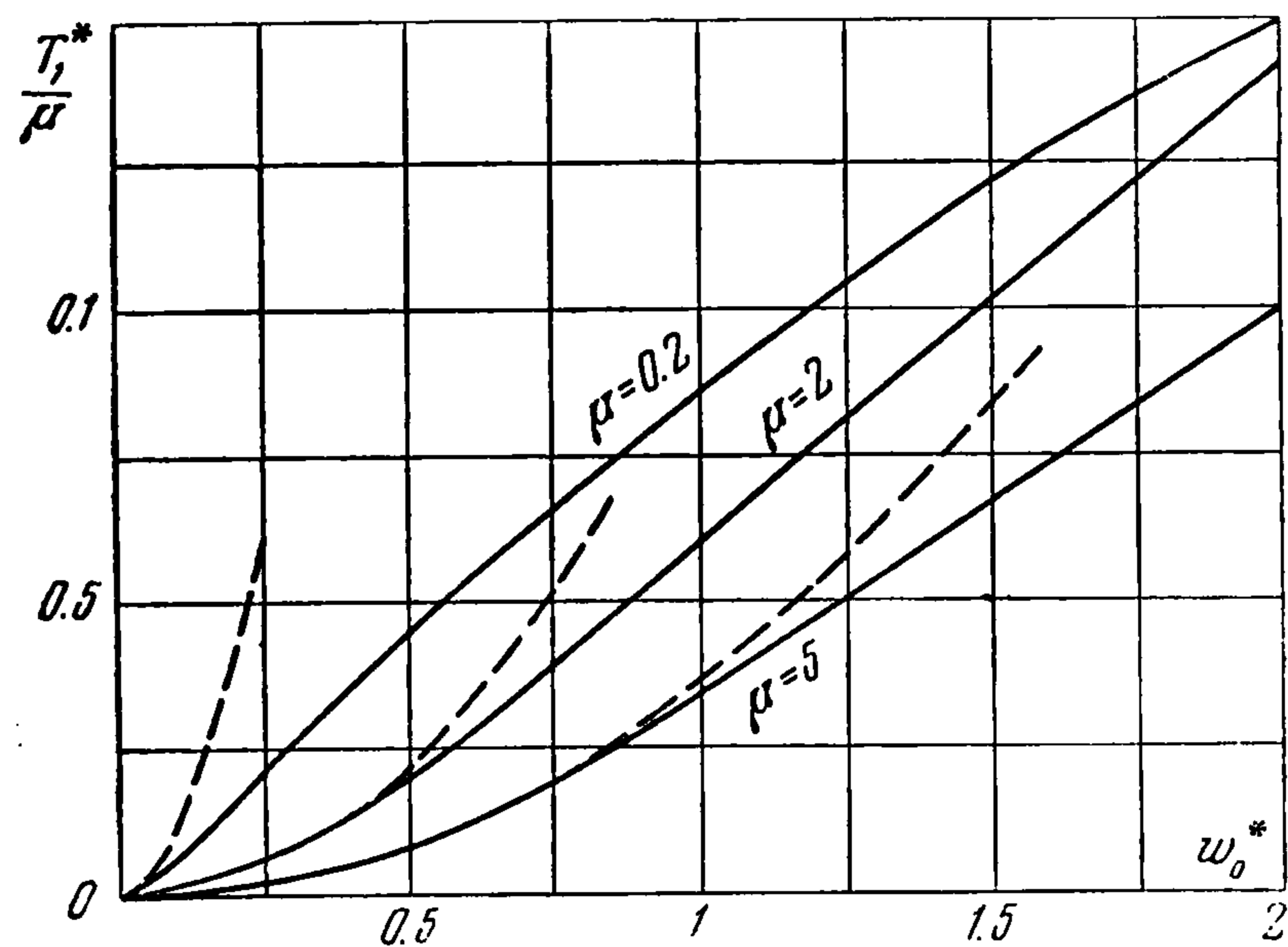
На фиг. 3 и 4 представлены значения краевого усилия  $T = T_1$  при  $\rho = 1$  и краевого момента  $(M_1)_{\rho=1}$  в зависимости от относительного прогиба  $w_0^*$ ; символами  $T_1^*$  и  $M_1^*$  на этих диаграммах обозначены выражения

$$\begin{aligned} T_1^* &= \frac{3a^2}{2Eh^3} T_1 \\ M_1^* &= \frac{9a^2}{Eh^4} M_1 \end{aligned}$$

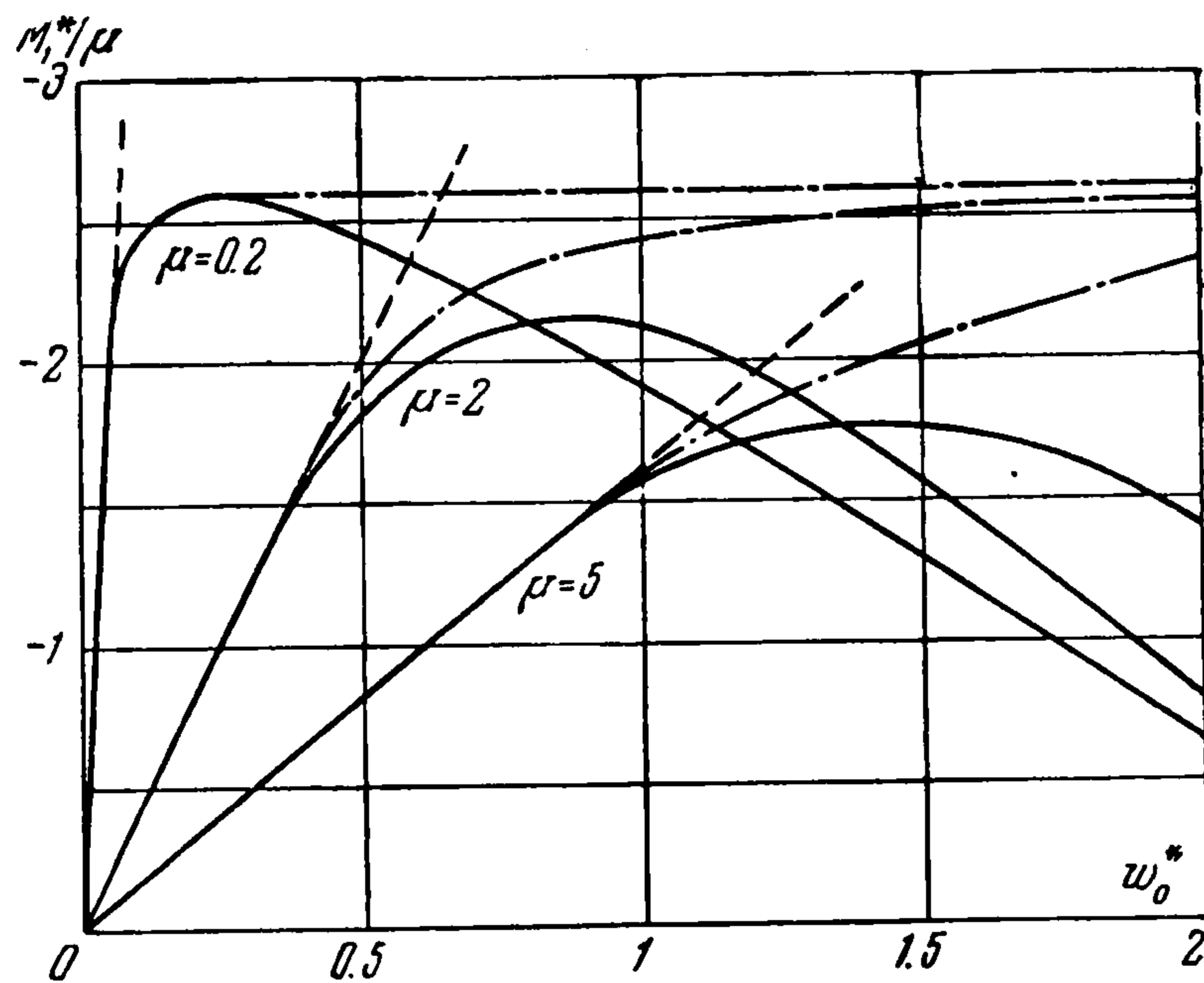
Обратим внимание еще на фиг. 4. Из этой диаграммы вытекает, что кривые  $M_1^* = M_1^*(w_0^*)$  имеют максимумы, после прохождения которых величина опорного

момента  $M = M_1$  при  $\rho = 1$  уменьшается, несмотря на постепенный рост внешней нагрузки. Этот эффект обусловлен тем, что с ростом прогибов увеличивается и толщина пластических зон на крае  $\rho = 1$  (фиг. 2). Но при развитии пластических деформаций происходит «надлом» пластинки у края, так как условия опирания приближаются к шарнирному закреплению ([3], стр. 202).

Следует отметить, что к применению результатов из фиг. 3—4 следует относиться с некоторой осторожностью, так как в упругом случае известно (см., например,

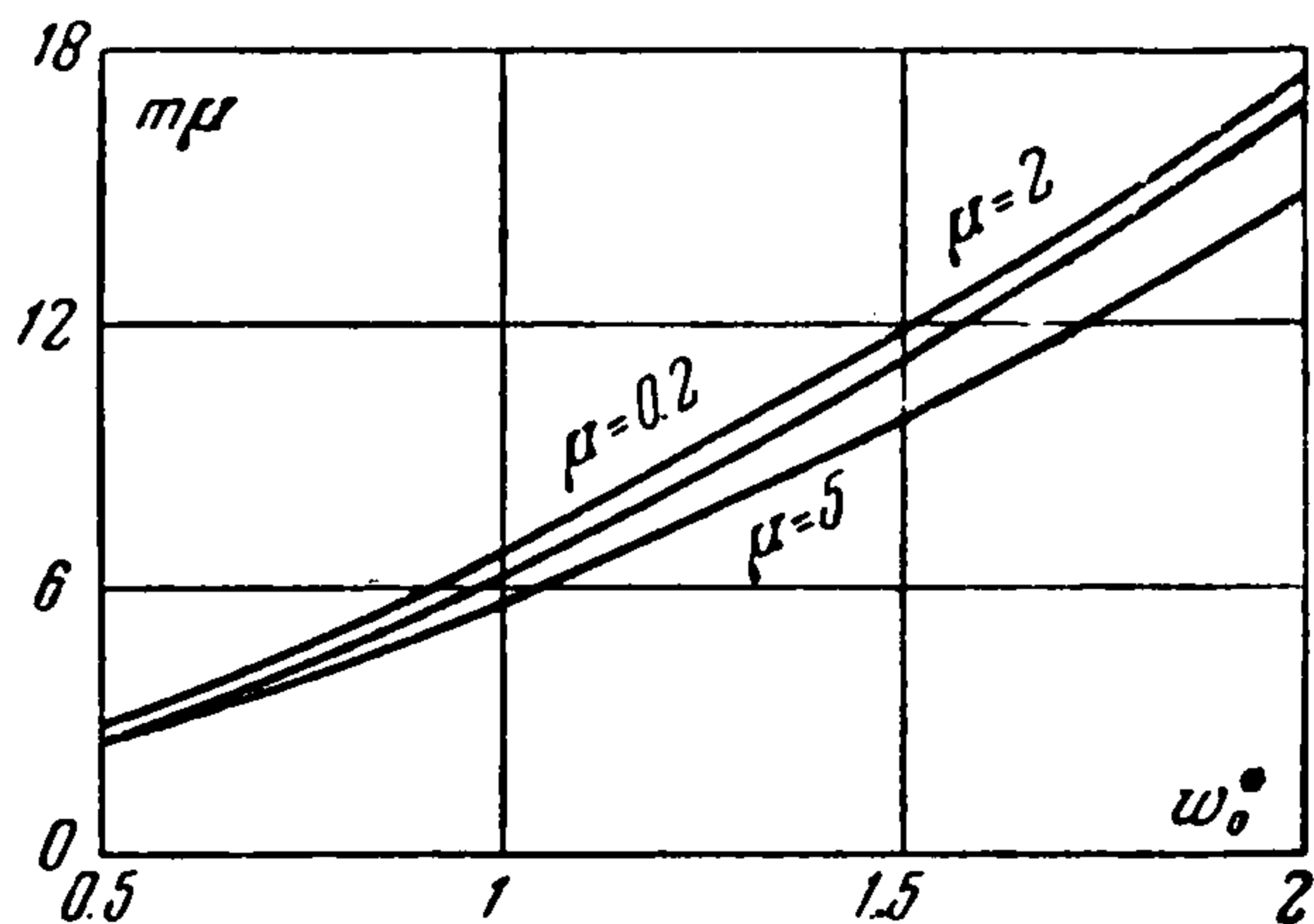


Фиг. 3

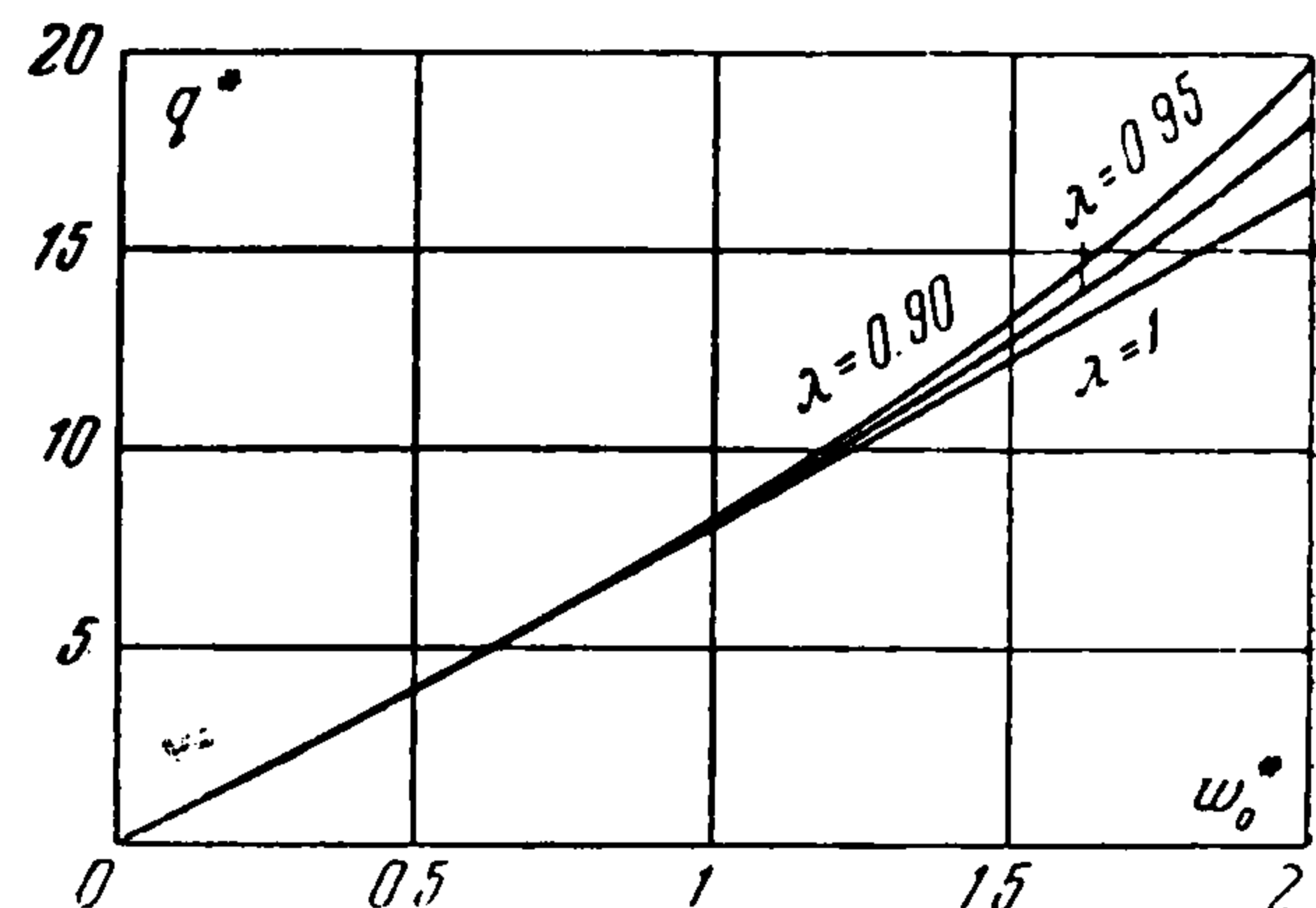


Фиг. 4

[3], § 44), что, решая задачу в первом приближении, мы получаем для усилий и моментов значения, которые заметно могут отличаться от истинных.



Фиг. 5



Фиг. 6

Так как в практике несущая способность пластинки часто определяется по деформациям, то было бы полезно знать, сколько раз величина интенсивности деформаций  $e_i$  в наиболее нагруженных точках пластинки превышает его значение на пределе текучести  $e_s$ ; обозначим это отношение буквой  $n$ , т. е.  $n = e_{i\max} / e_s$ . Значения величин

ны  $n$  для случаев, рассмотренных выше, даются на фиг. 5 (здесь наибольшие деформации возникают на краю  $\rho = 1$ ).

С целью оценить влияние упрочнения материала были в случае  $\mu = 2$  выполнены вычисления при  $\lambda = 0.9$  и  $\lambda = 0.95$ . Результаты этих вычислений представлены на фиг. 6; отсюда следует, что влияние упрочнения на параметр нагрузки значительно менее существенно, чем влияние мембранных усилий<sup>1</sup>.

**§ 3. Продольно-поперечный изгиб круглой пластинки.** 1. Рассмотрим опять круглую защемленную по контуру пластинку, допуская, что, кроме поперечной нагрузки  $q(r)$ , пластинка подвергается еще действию радиального усилия  $T_{10}$ , равномерно распределенного вдоль контура.

Основными уравнениями проблемы являются теперь следующие.

а) Уравнения равновесия

$$T_2 = T_1 + r \frac{dT_1}{dr} \quad (3.1)$$

$$\frac{dM_1}{dr} + \frac{1}{r}(M_1 - M_2) + T_1 \frac{dw}{dr} + \frac{1}{r} \int_0^r q(r) r dr = 0 \quad (3.2)$$

б) Условие совместности

$$r \frac{d\varepsilon_2}{dr} + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 = 0 \quad (3.3)$$

Уравнения (3.2) и (3.3) удовлетворим по методу Бубнова-Галеркина

$$\int_0^a \left\{ \left[ \frac{dM_1}{dr} + \frac{1}{r}(M_1 - M_2) + T_1 \frac{dw}{dr} + \frac{1}{r} \int_0^r q(r) r dr \right] \delta \left( \frac{dw}{dr} \right) + \left[ r \frac{d\varepsilon_2}{dr} + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 \right] \delta T_1 \right\} r dr = 0 \quad (3.4)$$

Интегрируя выражение (3.4) по частям и учитывая, что в силу граничных условий

$$\delta \left( \frac{dw}{dr} \right)_{r=a} = (\delta T_1)_{r=a} = 0$$

получаем

$$\int_0^a \left[ M_1 r \delta \left( \frac{d^2 w}{dr^2} \right) + \left( M_2 - T_1 r \frac{dw}{dr} - \int_0^r q(r) r dr \right) \delta \left( \frac{dw}{dr} \right) + \varepsilon_2 r^2 \frac{d\delta T_1}{dr} + \left( \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 \right) r \delta T_1 \right] dr = 0 \quad (3.5)$$

Переходя к безразмерным величинам

$$\rho = \frac{r}{a}, \quad w^* = \frac{w}{h}, \quad \varphi = \frac{a}{h} \frac{dw}{dr}, \quad \psi = \frac{T_1 \rho a^2}{Eh^3} \quad (3.6)$$

находим

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{h^2}{a^2} \left[ \Omega_4 \left( \frac{\psi}{\rho} - \frac{1}{2} \frac{d\psi}{d\rho} \right) - \frac{1}{4} \Omega_5 \frac{d\varphi}{d\rho} \right] \\ \varepsilon_2 &= \frac{h^2}{a^2} \left[ \Omega_4 \left( \frac{d\psi}{d\rho} - \frac{1}{2} \frac{\psi}{\rho} \right) - \frac{1}{4} \Omega_5 \frac{\varphi}{\rho} \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

и

$$\begin{aligned} M_1 &= -\frac{Eh^4}{a^2} \left[ \frac{1}{4} \Omega_5 \frac{\psi}{\rho} + \frac{1}{9} (1 - \Omega_6) \left( \frac{d\varphi}{d\rho} + \frac{1}{2} \frac{\varphi}{\rho} \right) \right] \\ M_2 &= -\frac{Eh^4}{a^2} \left[ \frac{1}{4} \Omega_5 \frac{d\psi}{d\rho} + \frac{1}{9} (1 - \Omega_6) \left( \frac{\varphi}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{d\rho} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

<sup>1</sup> Это мнение было высказано и В. Прагером в его обзорной статье [4], стр. 363.

Имея в виду формулы (3.6) — (3.8), вариационное уравнение (3.5) можно переписать в виде

$$\int_0^1 \left\{ \left[ \frac{1}{9} (1 - \Omega_6) \left( \rho \frac{d\varphi}{d\rho} + \frac{1}{2} \varphi \right) + \frac{1}{4} \Omega_5 \psi \right] \frac{d\delta\varphi}{d\rho} + \right. \\ \left. + \left[ \frac{1}{9} (1 - \Omega_6) \left( \frac{\varphi}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{d\rho} \right) + \frac{1}{4} \Omega_5 \frac{d\psi}{d\rho} + \varphi\psi + \int_0^\rho q^*(\rho) \rho d\rho \right] \delta\varphi + \right. \\ \left. + \left[ \Omega_4 \left( \frac{1}{2} \psi - \rho \frac{d\psi}{d\rho} \right) + \frac{1}{4} \Omega_5 \varphi \right] \frac{d\delta\psi}{d\rho} + \left[ \Omega_4 \left( \frac{1}{2} \frac{d\psi}{d\rho} - \frac{\psi}{\rho} \right) + \frac{1}{4} \Omega_5 \frac{d\varphi}{d\rho} + \frac{1}{2} \varphi^2 \right] \delta\psi \right\} d\rho = 0 \quad (3.9)$$

К уравнению (3.9) нужно присоединить граничные условия

- 1) при  $\rho = 0$ :  $\varphi = \psi = 0$ ,  $\left( \frac{d\psi}{d\rho} \right)_{\rho=0} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\psi}{\rho}$ ,  $\left( \frac{d\varphi}{d\rho} \right)_{\rho=0} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\rho}$
- 2) при  $\rho = 1$ :  $\varphi = 0$ ,  $\psi = \psi_0 = \frac{Eh^3}{a^2} T_{10}$

Эти условия можно удовлетворить, полагая

$$\begin{aligned} \varphi &= -A(\rho - \rho^3) + B(\rho - 4\rho^3 + 3\rho^5) + \dots \\ \psi &= \rho\psi_0 + \rho(1 - \rho^2)(C_1 + C_2\rho^2 + C_3\rho^4 + \dots) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ограничимся в разложениях (3.10) только коэффициентами  $A$ ,  $\psi_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ; в таком случае  $A = 4w_0^*$ .

Введем следующие функции от аргумента  $\rho$ :

$$\begin{aligned} g_1 &= 2g_5 = 2(1 - 2\rho^2), & g_6 &= 1 - 4\rho^2 + 7\rho^4 \\ g_2 &= 2(1 - \rho^2)(1 - 3\rho^2), & g_7 &= 2\rho^2(1 - 2\rho^2)(1 - 3\rho^2) \\ g_3 &= 4\rho^2(1 - \rho^2)(1 - 2\rho^2), & g_8 &= \rho^2(2 - 3\rho^2) \\ g_4 &= 3 - 12\rho^2 + 13\rho^4, & g_9 &= \rho^4(7 - 24\rho^2 + 21\rho^4) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Будем в дальнейшем под символами  $S_1 - S_8$  и  $Q$  понимать следующие определенные интегралы:

$$\begin{aligned} S_i &= \int_0^1 \Omega_5 g_i(\rho) d\rho & (i = 1, 2, 3) \\ S_j &= \int_0^1 \Omega_4 g_j(\rho) d\rho & (j = 5, 6, 7, 8, 9) \\ S_4 &= \int_0^1 \Omega_6 g_4(\rho) d\rho, & Q &= \int_0^1 (\rho - \rho^3) d\rho \int_0^\rho q^*(\rho) \rho d\rho \end{aligned} \quad (3.12)$$

Подставим выражения (3.10) в вариационную формулу (3.9). Учитывая, что в данном случае величина  $\psi_0$  варьированию не подлежит и вариации  $\delta A$ ,  $\delta C_1$ ,  $\delta C_2$  являются независимыми, приходим к следующей системе канонических уравнений:

$$\begin{aligned} \left( S_1 - \frac{A}{6} \right) \psi_0 + \left( S_2 - \frac{A}{10} \right) C_1 + \left( S_3 - \frac{A}{30} \right) C_2 &= \frac{4}{9} \left( \frac{2}{3} - S_4 \right) A - 4Q \\ S_5 \psi_0 + S_6 C_1 + S_7 C_2 &= -\frac{1}{4} S_2 A + \frac{1}{80} A^2 \\ S_8 \psi_0 + S_7 C_1 + S_9 C_2 &= -\frac{1}{4} S_3 A + \frac{1}{240} A^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Из этой системы при данном  $A$  можно определить величины  $C_1$ ,  $C_2$  и  $\psi_0$  или  $Q$ . Величины  $\Omega_4 - \Omega_6$  и  $z_0$ ,  $z_e$ ,  $z_s$  будем вычислять по формулам (1.6), (1.15) и (1.11). При

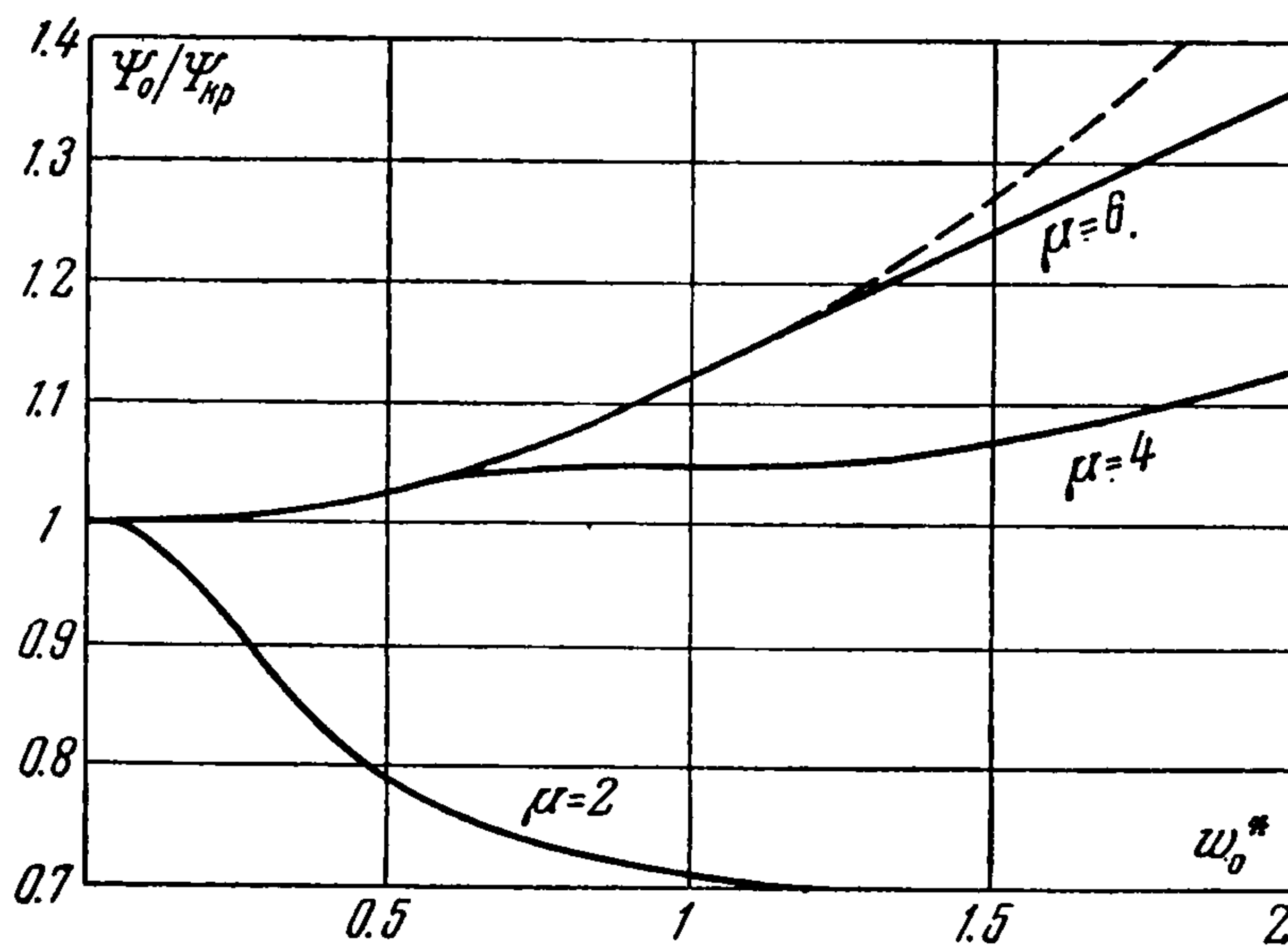
этом зависимости (1.11), если учитывать еще формулы (3.10), получают вид:

$$\begin{aligned} z_0 &= -\frac{3}{2Ag_4} \Omega_4 (g_1\psi_0 + g_2C_1 + g_3C_2) - \frac{1}{2} \Omega_5 \\ z_\varepsilon^2 &= \frac{3\Omega_4^2}{A^2g_4} (\psi_0^2 + 2g_5\psi_0C_1 + 2g_8\psi_0C_2 + g_6C_1^2 + g_9C_2^2 + 2g_7C_1C_2) - \Omega_5 \left( z_0 + \frac{1}{4} \Omega_5 \right) \\ z_s^2 &= \frac{3\mu^2}{A^2g_4} \quad \left( \mu = \frac{e_s a^2}{h^2} \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Систему (3.13) будем опять решать методом последовательного приближения, выбирая для начального приближения упругое решение

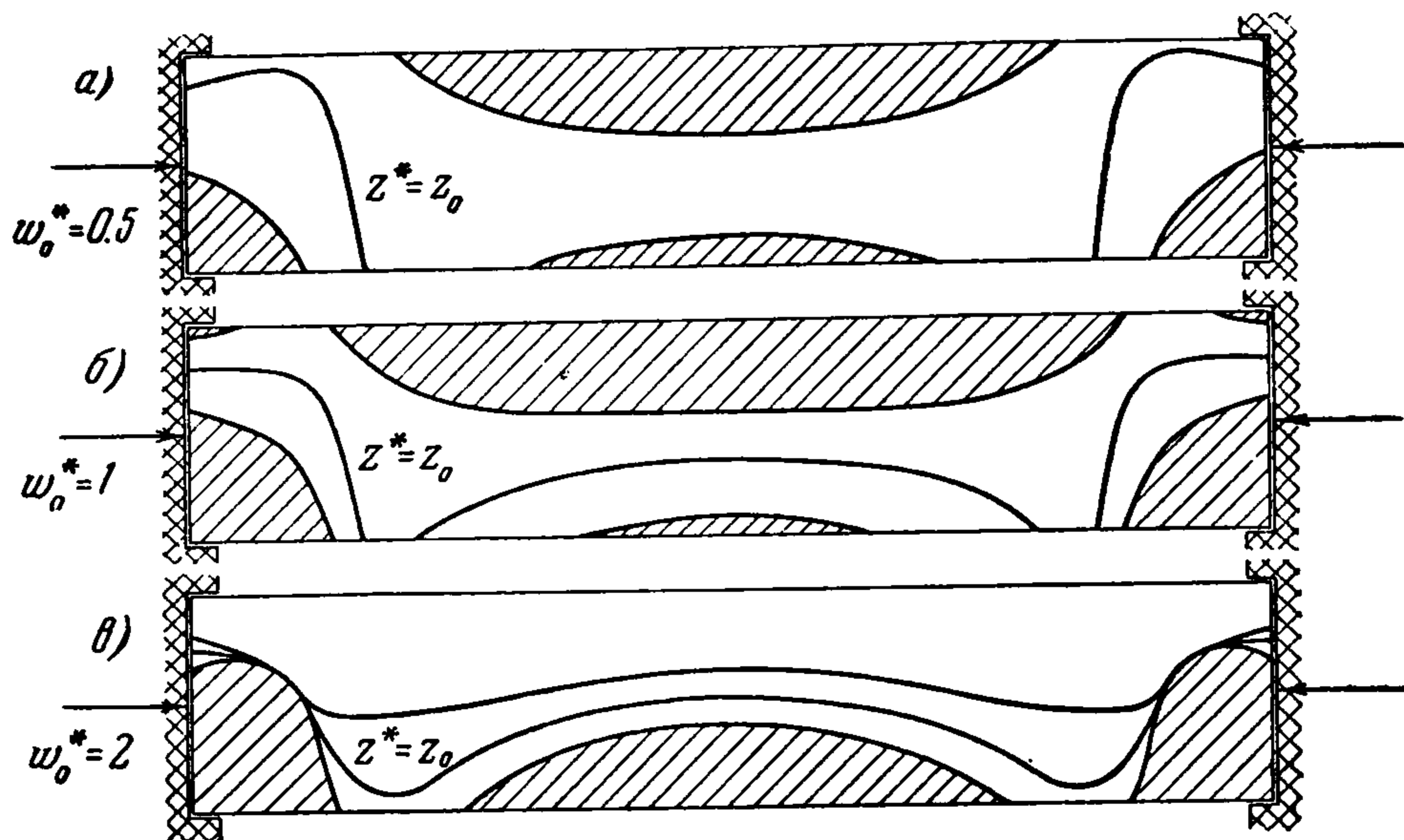
$$C_1 = \frac{7}{240} A^2, \quad C_2 = -\frac{1}{48} A^2, \quad \psi_0 = -\frac{16}{9} + \frac{24Q}{A} - \frac{1}{75} A^2$$

2. Проводим численный расчет для случая, где  $T_{10} < 0$  и  $Q = 0$ . Так как здесь поперечная нагрузка отсутствует, то существует некоторое значение параметра  $\psi_0$ ,



Фиг. 7

при котором пластинка переходит из плоской формы к искривленной; такое значение параметра будем называть критическим и обозначать его символом  $\psi_{кр}$ . (Здесь мы

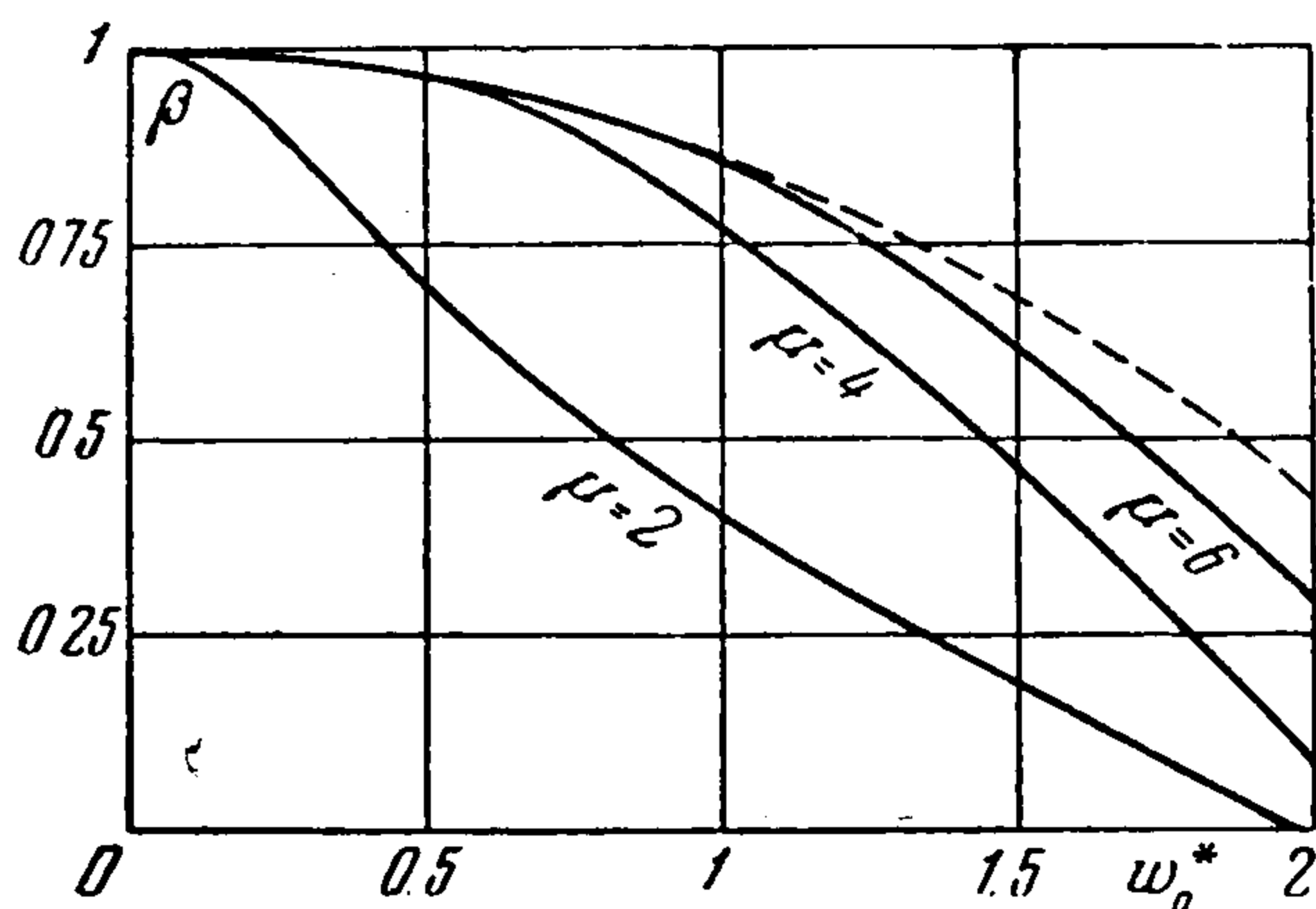


Фиг. 8

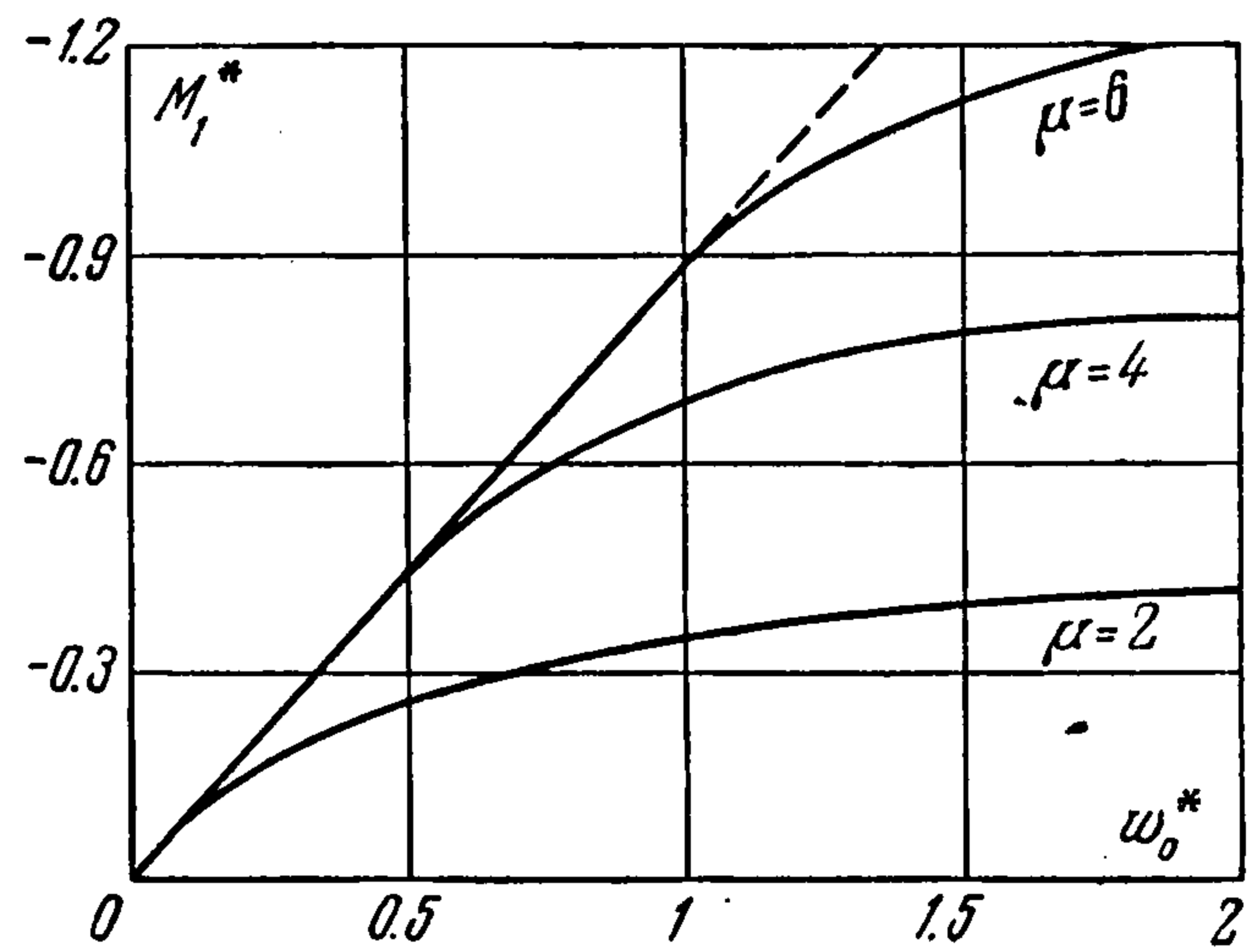
имеем в виду только задачи, при которых потеря устойчивости происходит при упругих деформациях, так как в противном случае нельзя было бы пренебрегать влиянием зоны разгрузки).

Вычисления выполнены в случае материала, не имеющего упрочнения (т. е.  $\lambda = 1$ ); для параметра  $\mu$ , характеризующего гибкость пластинки, выбраны значения 2, 4, 6. Результаты этих вычислений представляем в виде графиков (фиг. 7—11). Пунктирными линиями на фиг. 7, 9 и 10 отмечены решения, найденные в предположении, что деформации во всей пластинке остаются упругими (упругие решения).

Диаграмма «нагрузка — прогиб» дана на фиг. 7; отсюда следует и известный факт, что в случае пластинок меньшей гибкости критическая нагрузка является практически разрушающей. Распределение зон пластических деформаций в зависимости от величины прогиба изображено на фиг. 8; для параметра  $\mu$  здесь выбрано значение  $\mu = 2$ .

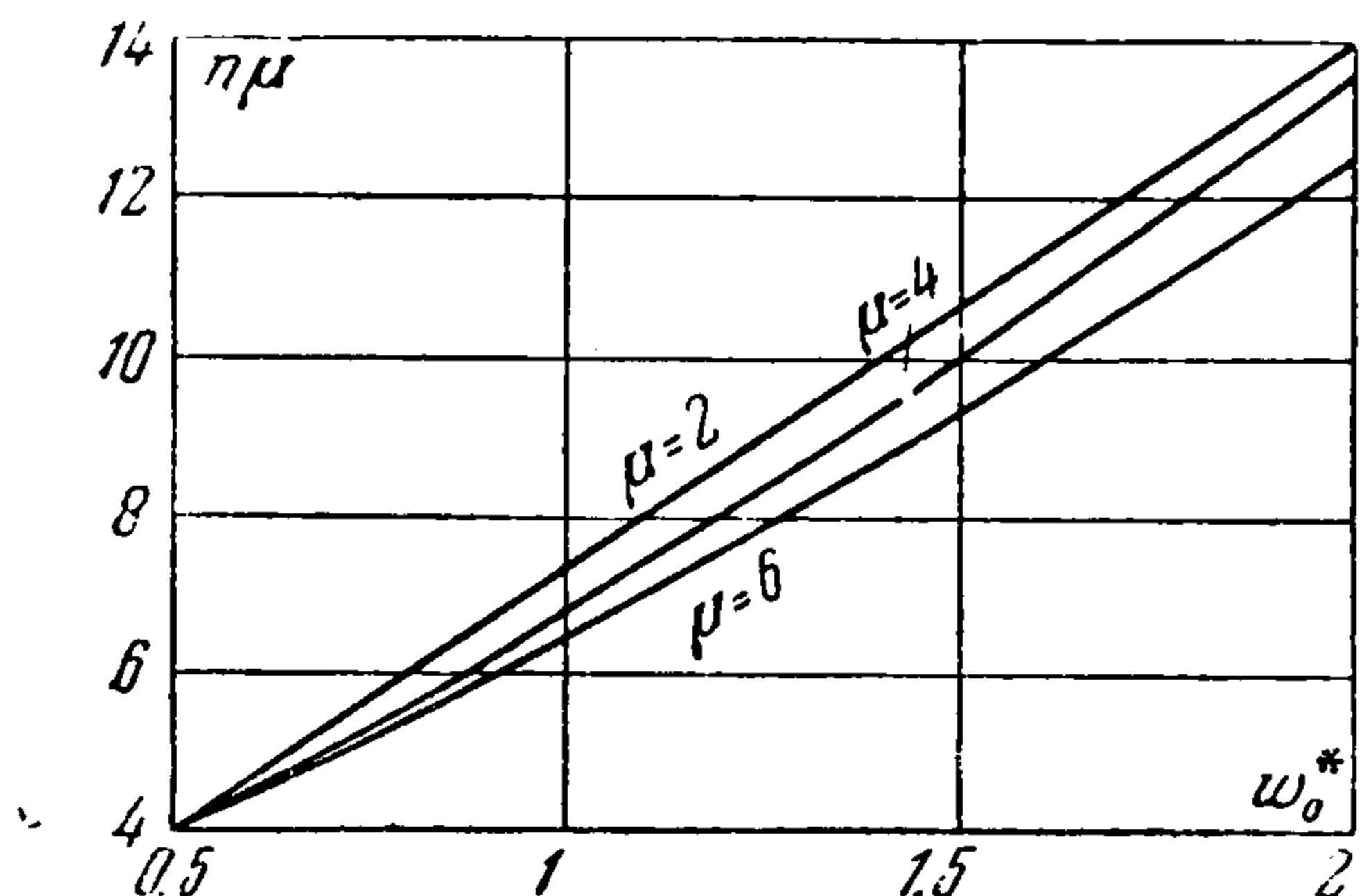


Фиг. 9



Фиг. 10

Если в момент потери устойчивости усилия  $T_1$  и  $T_2$  имеют во всех точках пластинки одинаковые значения, то в послекритической стадии распределение этих величин становится неравномерным. Для упругого случая доказано в [5], что с ростом прогибов усилия  $T_1$  и  $T_2$  в центре пластинки уменьшаются по абсолютной величине, а затем меняют знак, т. е. становятся растягивающими. Как следует из фиг. 9, где



Фиг. 11

Зависимость краевого изгибающего момента  $(M_1)_{\rho=1}$  от величины  $w_0^*$  представлена на фиг. 10 (здесь опять обозначено  $M_1^* = (a^2 / Eh^4) M_1$ ). Значения величины  $n = (1 / e_s) (e_i)_{\max}$  даны на фиг. 11 (наибольшие деформации возникают при  $\rho = 1$ ).

Поступила 17 VI 1957

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лепик Ю. Р. Равновесие гибких упруго-пластических пластинок при больших прогибах. Инженерный сборник, т. 24, 1956.
2. Kármán Th. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. *Encycl. der math. Wiss.*, IV (4), 1910.
3. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. Гостехиздат, 1956.
4. Прагер В. Теория пластичности: обзор новейших успехов. Приложение к книге «Теория идеально-пластических тел». М., 1956.
5. Bodner S. The post buckling behaviour of a clamped circular plate. *Quart. Appl. Math.*, vol. 12, № 4, 1955.

$$\beta = \frac{1}{\psi_{\text{кр}}} \left( \frac{\psi}{\rho} \right)_{\rho=0}$$

такое же явление — еще в более явном виде — имеет место и за пределом упругости.