

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ БЕЗМОМЕНТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ
ОБОЛОЧЕК ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ [1]

А. С. Григорьев

(Москва)

В работе рассматривается равновесие безмоментных оболочек с жесткими днищами имеющих в ненагруженном состоянии форму кругового цилиндра.

Предполагается, что материал оболочки может до разрушения весьма сильно деформироваться, что позволяет исследовать напряженное состояние при больших смещениях и больших деформациях, порядка нескольких десятков процентов. В связи с этим материал рассматривается как несжимаемый, а в основу его механической характеристики кладется зависимость между напряжениями и так называемыми истинными деформациями.

Помимо гипотез, на которых базируются соотношения между этими величинами, отвечающие упомянутой выше постановке задачи, используются обычные допущения, принятые в теории тонких безмоментных оболочек¹.

1. Исходные зависимости и уравнения. Оболочку вращения (фиг. 1), образовавшуюся из безмоментной цилиндрической оболочки под действием внутреннего давления и нормальных сил, приложенных в центрах жестких днищ, отнесем к цилиндрической системе координат $r\theta\zeta$, связанной с одним из днищ.

Пусть R — радиус, L — длина и H_1 — толщина оболочки до деформации, H — толщина деформированной оболочки, F — сила, приложенная к днищу, q — интенсивность давления, φ — угол между нормалью к оси оболочки и касательной к меридиану, Y — значение ζ для недеформированной оболочки, U и W — смещения, ϵ_1, ϵ_2 и ϵ_3 — истинные, а e_1, e_2, e_3 — обычные главные удлинения. Легко установить, что

$$\zeta = Y + W, \quad r = R + U, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{d\zeta}{dr}$$

$$e_1 = \frac{dU}{dY} \frac{1}{\cos \varphi} - 1, \quad e_2 = \frac{U}{R}, \quad e_3 = \frac{H}{H_1} = h$$

Введя безразмерные координаты и величины

$$\eta = \frac{\zeta}{R}, \quad x = \frac{r}{R}, \quad y = \frac{Y}{R}, \quad u = \frac{U}{R}, \quad w = \frac{W}{R}, \quad l = \frac{L}{R}, \quad h = \frac{H}{H_1}$$

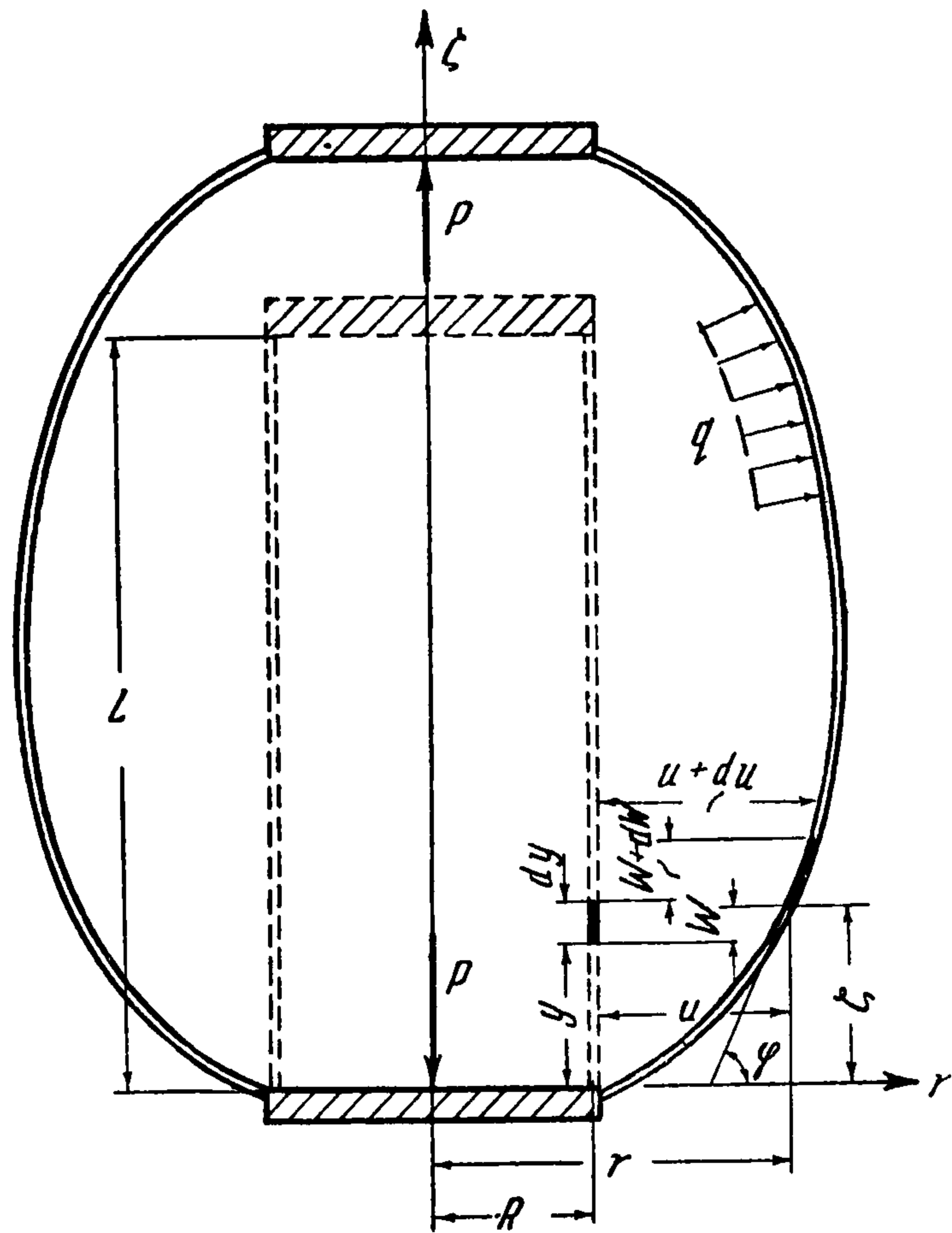
получим

$$w = \eta - y, \quad u = x - 1, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{d\eta}{dx}$$

$$e_1 = \frac{dx}{dy} \frac{1}{\cos \varphi} - 1, \quad e_2 = x - 1, \quad e_3 = h - 1$$

Так как $\epsilon = \ln(1 + e)$, то для удлинений имеем

$$\epsilon_1 = \ln \left(\frac{dx}{dy} \frac{1}{\cos \varphi} \right), \quad \epsilon_2 = \ln x, \quad \epsilon_3 = \ln h$$



Фиг. 1

¹ Равновесие безмоментных цилиндрических оболочек при малых деформациях за пределом упругости рассматривалось в работе [2].

Уравнения, описывающие равновесие осесимметрично нагруженной безмоментной оболочки вращения переменной толщины, можно записать так¹:

$$\sigma_2 = \sigma_1 \left(1 + \frac{r}{H} \frac{dH}{dr} \right) + r \frac{d\sigma}{dr}, \quad \sigma_1 = \frac{F + P_\zeta}{2\pi r H \sin \varphi} \quad (1.4)$$

Здесь σ_1 — меридиональное, а σ_2 — кольцевое напряжение, P_ζ — сумма проекций на ось ζ сил давления, приложенных к поверхности одной из частей, на которые оболочка рассекается нормальной к меридианам конической поверхностью. Зависимость между главными напряжениями и истинными деформациями, полагая $\sigma_3 = 0$, запишем в виде [6,7]

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_2 - \varepsilon_3} \quad (1.5)$$

причем для несжимаемого материала $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$ (1.6)

Аппроксимируя параболой m -го порядка зависимость между наибольшим по модулю касательным напряжением и соответствующим главным сдвигом — наибольшей по модулю разностью главных истинных удлинений, получим (1.7)

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_3 = \left(\frac{\sigma_1}{2K} \right)^m, \quad \text{если } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0; \quad \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = \left(\frac{\sigma_2}{2K} \right)^m, \quad \text{если } \sigma_2 \geq \sigma_1 \geq 0$$

где m и K — постоянные, определяемые из условий наилучшей аппроксимации.

Система уравнений (1.3) — (1.6) совместно с одним из соотношений (1.7) при заданных граничных условиях полностью описывает напряженное состояние рассматриваемой оболочки при больших деформациях и смещениях.

2. Основные уравнения и интегральные кривые. Введем безразмерные напряжения

$$p_1 = \frac{\sigma_1}{2K}, \quad p_2 = \frac{\sigma_2}{2K} \quad (2.1)$$

В случае $p_1 \geq p_2$, записав первое уравнение (1.4) в безразмерных переменных и присоединив к нему выражения p_1 и p_2 , найденные на основании (1.3), (1.5), (1.6) и (1.7), получим

$$p_2 = p_1 \left(1 + \frac{x}{h} \frac{dh}{dx} \right) + x \frac{dp_1}{dx} \quad \left(\mu = \frac{1}{m} \right) \quad (2.2)$$

$$p_1 = (-\ln xh^2)^\mu, \quad p_2 = (-\ln xh^2)^{\mu-1} \ln \frac{x}{h}$$

Отсюда

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{h}{x} \frac{1 + m \ln x^2 h}{2 + m \ln xh^2} \quad (2.3)$$

Интеграл (2.3) можно записать в виде

$$(\ln h + \mu)^2 + (\ln h + \mu) \ln x + (\ln x)^2 = (\ln h_0 + \mu)^2 \quad (2.4)$$

где h_0 — значение h при $x = 1$.

Уравнение (2.4) описывает семейство замкнутых кривых с особой точкой — центром $(1, e^{-\mu})$. Координаты точек, где x имеет экстремальные значения, определяются по формулам

$$x_{1,2} = (h_0 e^\mu)^{\pm 2 / \sqrt{3}}, \quad h_{1,2} = e^{-\mu} (h_0 e^\mu)^{\mp 1 / \sqrt{3}} \quad (2.5)$$

Для случая $p_2 \geq p_1$ на основании первого уравнения (1.4), (1.3), (1.5), (1.6) и (1.7) вместо (2.2) получим

$$p_2 = p_1 \left(1 + \frac{x}{h} \frac{dh}{dx} \right) + x \frac{dp_1}{dx} \quad \left(\mu = \frac{1}{m} \right) \quad (2.6)$$

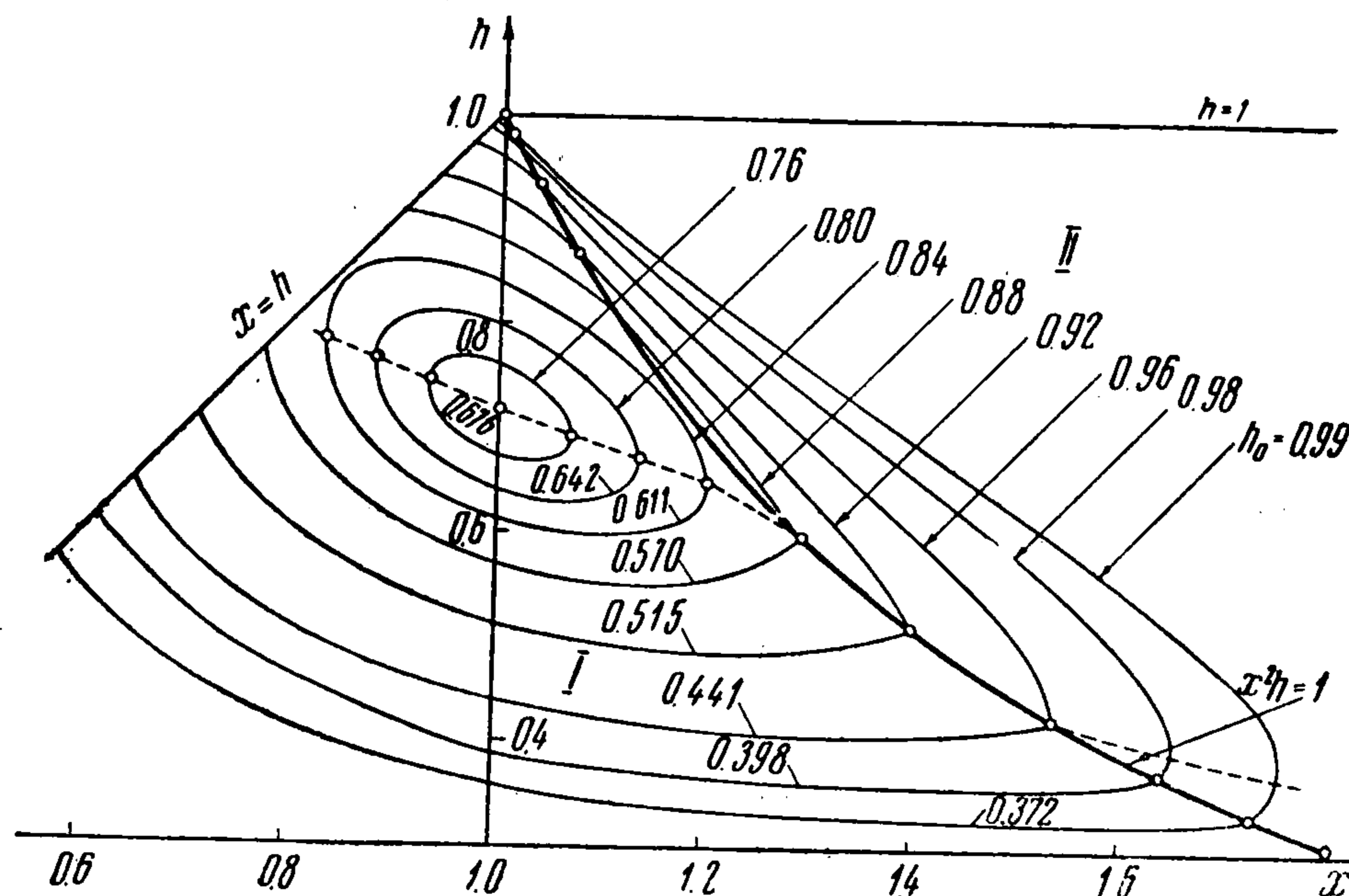
$$p_1 = -\left(\ln \frac{x}{h} \right)^{\mu-1} \ln xh^2, \quad p_2 = \left(\ln \frac{x}{h} \right)^\mu$$

Отсюда

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{h}{x} \frac{(1 + \ln x^2 h) \ln(x/h) - (1 - \mu) \ln xh^2}{(2 + \ln xh^2) \ln(x/h) + (1 - \mu) \ln xh^2} \quad (2.7)$$

¹ В несколько иной форме эти уравнения приводились в работах [3,4]; в статье [5] дан подобный вывод.

Это уравнение может быть проинтегрировано численно. Интегральные кривые уравнений (2.3) и (2.7) определяют h в функции x , после чего на основании (2.2) и (2.6)



Фиг. 2

можно найти p_1 и p_2 в функции x . Оказывается, что при данном m безразмерные главные напряжения в оболочке и толщина ее, рассматриваемые как функции радиальной координаты в деформированном состоянии, не зависят явно от вида и величины нагрузки и от соотношений первоначальных размеров R и L . Влияние всех этих факторов учитывается одним параметром h_0 . Кривые $h(x)$, которые могут быть построены наперед, дадут решения широкого класса задач, поскольку отыскание формы оболочки в какой-либо конкретной задаче сведется к квадратурам.

Из (2.2) найдем, что условию $p_1 = p_2$ отвечает уравнение

$$x^2h = 1 \tag{2.8}$$

а условию $p_2 = 0$ уравнение

$$x = h \tag{2.9}$$

Кривые $h(x)$ в полосе $0 \leq h \leq 1$ в области, ограниченной слева прямой (2.9), построенные при $m = 3$ по параметру h_0 , приведены на фиг. 2.

Кривая (2.8) разбивает эту область на две зоны (фиг. 2). В зоне I использовалось уравнение (2.4), в зоне II уравнение (2.7), которое мы интегрировали по методу Адамса. Пунктир на фиг. 2, на некотором участке совпадающий с кривой (2.8), — геометрическое место точек, абсциссы которых определяют максимальный возможный при заданном h_0 радиус деформированной оболочки. Координаты этих точек назовем через x_1, h_1 .

3. Задачи. Равновесие оболочек, нагруженных внутренним давлением. Растяжение оболочки. Были рассмотрены две задачи о напряженном состоянии оболочки, нагруженной внутренним давлением постоянной интенсивности — случаи свободных и наглухо закрепленных днищ, а также задача о деформациях оболочки, растянутой силами, приложенными к днищам. Решая первую задачу, полагаем в (1.5) $F = 0$ и $P_\zeta = \pi r^2 q$. Получим

$$\sin \varphi = Qf(x, h) \quad \left(Q = \frac{qR}{4KH_1} \right) \tag{3.1}$$

Здесь

$$f(x, h) = \frac{x}{h(-\ln xh^2)^\mu} \quad \text{при } p_1 \geq p_2 \tag{3.2}$$

$$f(x, h) = -\frac{x \ln(x/h)^{1-\mu}}{h \ln xh^2} \quad \text{при } p_2 \geq p_1$$

Имея кривые $h(x)$, можно рассматривать $f(x, h)$ как функцию x ; на фиг. 3 даны соответствующие графики при $m = 3$. Далее на основании (1.3) и (1.6) получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xh}{\cos \varphi} \tag{3.3}$$

В месте прикрепления оболочки к днищу

$$x = 1, \quad y = 0, \quad \eta = 0 \quad (3.4)$$

Из (3.3), (1.2) и (3.4) найдем, что

$$y = \int_1^x \Phi(x) dx, \quad \eta = \int_1^x \Psi(x) dx. \quad (3.5)$$

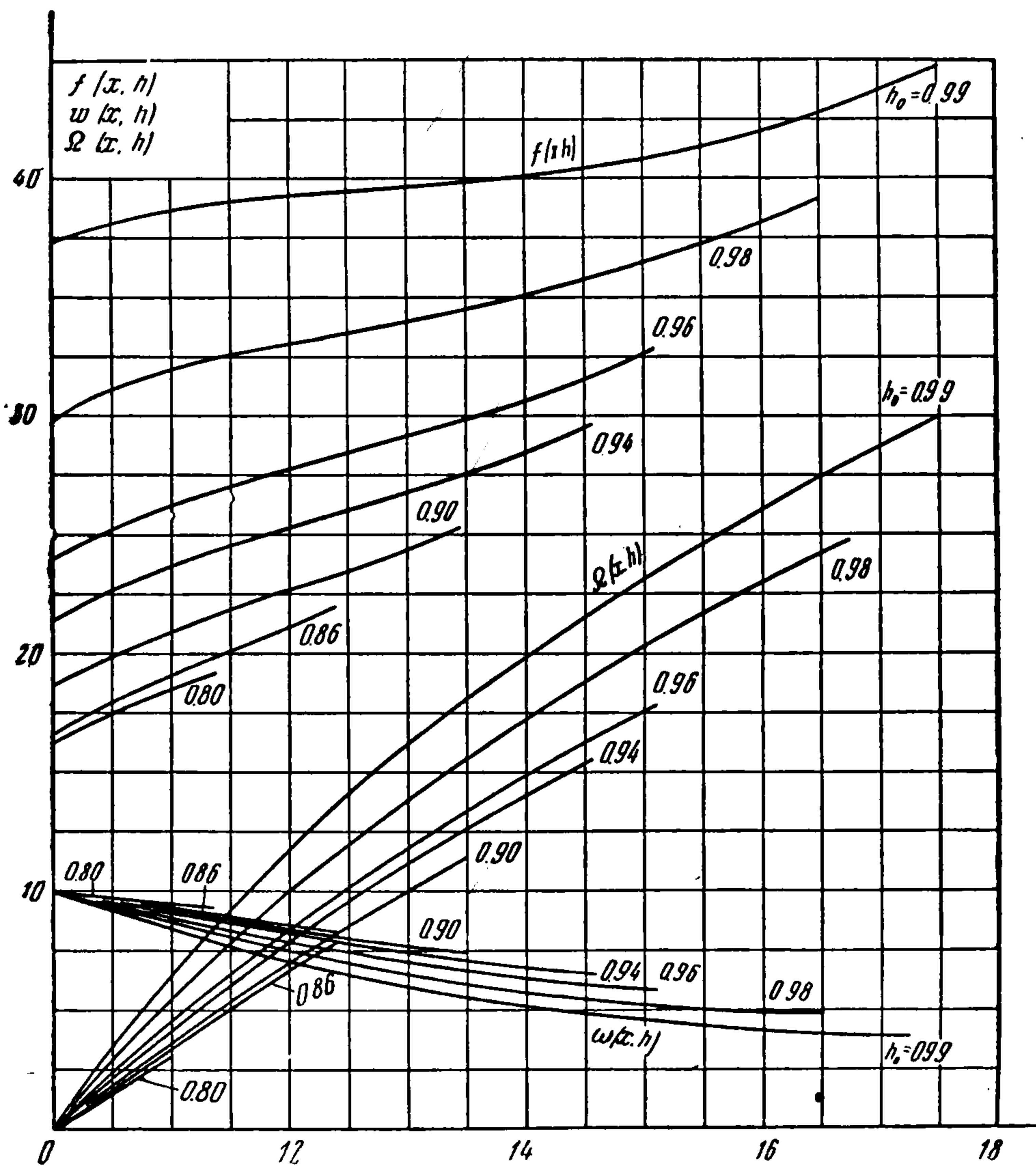
где

$$\Phi(x) = \frac{xh}{\cos \varphi}, \quad \Psi(x) = \operatorname{tg} \varphi \quad (3.6)$$

Первоначальная безразмерная длина оболочки

$$l = 2 \int_1^{x_{\max}} \Phi(x) dx \quad (3.7)$$

причем x_{\max} определяется по кривой $f(x, h)$ как абсцисса точки, где выполняется условие $Qf(x, h) = 1$. Имея в виду непосредственное вычисление квадратур (3.5) и (3.7),



Фиг. 3

существенно отметить, что при $x = x_{\max}$ функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ обращаются в бесконечность.

Вычисляя квадратуры (3.5), можно найти форму оболочки и смещения при выбранных Q и h_0 , однако последние нельзя задавать произвольно. На фиг. 4, которую можно назвать диаграммой равновесных состояний оболочки, заштрихованы области «возможных» значений параметров Q и h_0 . Верхняя граница определяется по уравнению $Q = h_0 (-2 \ln h_0)^{1/2}$, которое отвечает условию $\sin \varphi_0 = 1$, где φ_0 — значение φ при $x = 1$. Легко заметить, что верхняя граница соответствует оболочкам нулевой длины. Замечая, что $f(x, h)$ при данном h_0 с увеличением x монотонно возрастает (фиг. 3), и учитывая, что в силу симметрии $\varphi = 1/2 \pi$ при $y = 1/2 l$, найдем, что для

данного h_0 , $f(x, h)_{\max} = 1/Q \leq f(x_1, h_1)$. Следовательно, нижняя граница определяется уравнением $Q = 1 / f(x_1, h_1)$ и состоит из двух участков (фиг. 4): правый отвечает состояниям равновесия, которым соответствуют верхние ветви кривых $h(x)$, а левый — состояниям, которым соответствуют нижние ветви; участки смыкаются при $h_1 = h_0 = e^{-\mu}$ в точке, которая принадлежит и к верхней границе, — переход от одного случая равновесия к другому возможен лишь при нулевой длине оболочки.

Имея кривые $h(x)$ и $f(x, h)$ и диаграмму равновесных состояний, легко полностью рассчитать оболочку.

На фиг. 5 слева показана форма оболочки, найденная при помощи описанных выше расчетов, при $Q = 0.3$ и $h_0 = 0.96$, и указана первоначальная длина; при этом у днища $p_1 = 0.434$, $p_2 = 0.217$, а в среднем сечении при $y = 1/2 l$ меридиональное и кольцевое напряжения почти равны: $p_1 = 1.066$, $p_2 = 1.082$. По элементарной теории $p_2 = 2p_1 = 0.6$. Имея для ряда значений h_0 и Q величины l , вычисленные по (3.7), можно построить кривые зависимости между l и Q , по параметру h_0 , при помощи которых легко решить прямую задачу, — рассчитать оболочку заданных размеров при заданном давлении.

Перейдем ко второй задаче. Рассмотрим нагруженную внутренним давлением оболочку, днища которой наглухо закреплены. Положив в уравнении (1.5)

$$P_z = \pi (r^2 - R^2) q, \quad F = q\pi R^2 - 2\pi R H_0 \sigma_{10} \sin \varphi_0$$

где H_0 и σ_{10} — значения H и σ_1 при $x = 1$, после перехода к безразмерным величинам получим

$$\sin \varphi = Q\Omega(x, h) + \sin \varphi_0 \omega(x, h). \quad (3.8)$$

Здесь $\Omega(x, h)$ и $\omega(x, h)$ при выбранном h_0 полностью определяются соответствующей кривой $h(x)$. При $p_1 \geq p_2$

$$\Omega(x, h) = \frac{x^2 - 1}{xh (-\ln xh^2)^\mu}, \quad \omega(x, h) = \frac{h_0 (-2\ln h_0)^\mu}{xh (-\ln xh^2)^\mu} \quad (3.9)$$

при $p_2 \geq p_1$

$$\Omega(x, h) = -\frac{(x^2 - 1) [\ln(x/h)]^{1-\mu}}{xh \ln xh^2}, \quad \omega(x, h) = -\frac{h_0 (-2\ln h_0)^\mu [\ln(x/h)]^{1-\mu}}{xh \ln xh^2} \quad (3.10)$$

Графики этих функций при $m = 3$ приведены на фиг. 3. Пользуясь этими графиками и кривыми $h(x)$, можно построить, принимая φ_0 за параметр, нижние границы возможных нагрузок, а затем отыскать оболочку, деформации которой соответствуют заданным значениям Q и h_0 .

Каждая граница будет представлять собой геометрическое место точек с координатами (h_0, Q) , причем

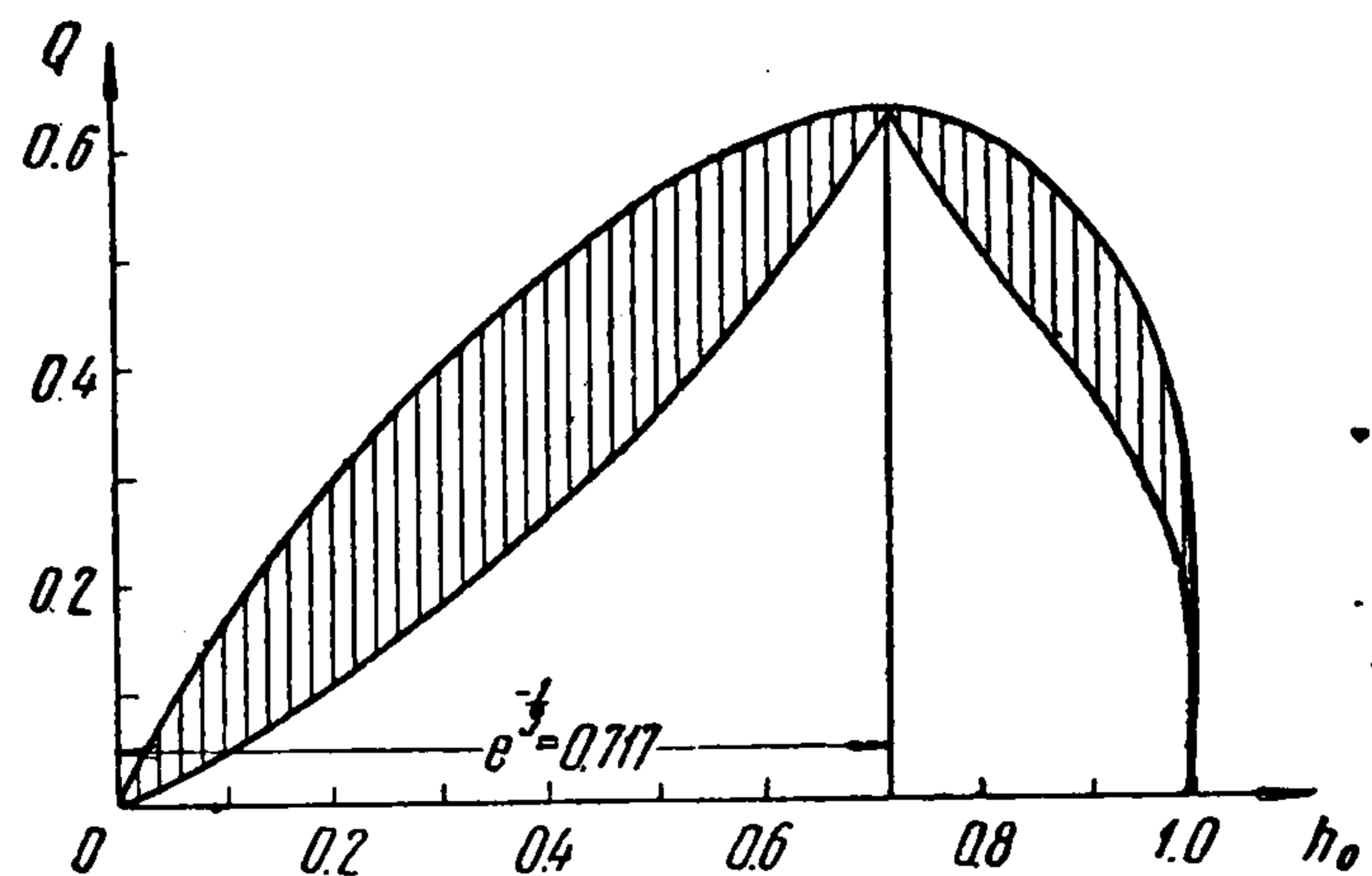
$$Q = \frac{1 - \sin \varphi_0 \omega(x_1, h_1)}{\Omega(x_1, h_1)}$$

Формулы (3.5) — (3.7) останутся в силе, но из требования неподвижности днищ вытекает условие

$$\int_1^{x_{\max}} \Phi(x) dx = \int_1^{x_{\max}} \Psi(x) dx \quad (3.11)$$

из которого находится φ_0 .

В качестве примера была рассчитана оболочка с $l = 0.272$, у которой $h_0 = 0.84$ при $Q = 1.9$. При этом получилось $x_{\max} = 1.058$. У днища $p_1 = 0.704$, $p_2 = 0.352$, при $y = 1/2 l$ имеем значения $p_1 = 0.718$, $p_2 = 0.553$.



Фиг. 4

Для быстрого решения прямой задачи надо предварительно построить кривые зависимости между Q и l по параметру h_0 .

Перейдем к задаче о деформациях оболочки, растягиваемой силами, приложенными в центрах днищ. Положив $P_\zeta = 0$ в (1.5) и используя ранее введенные безразмерные величины, найдем, что

$$\sin \varphi = P\psi(x, h),$$

$$P = \frac{F}{4K\pi R H_1}$$

$$\psi(x, h) = \frac{1}{xh (-\ln xh^2)^\mu} \quad (3.12)$$

причем x и h связаны уравнением (2.4), так как в рассматриваемом случае $x \leq 1$ и $p_1 > p_2$. Полагая в (3.12) $x = 1$, $h = h_0$ и $\sin \varphi = 1$, получим верхнюю границу $P = h_0 (-2 \ln h_0)^\mu$. Положив в (3.14) $x = x_2$, $h = h_2$, $\sin \varphi = 1$, найдем уравнение нижней границы возможных значений P и h_0 :

$$P = x_2 h_2 (-\ln x_2 h_2)^{1/\mu}$$

Здесь при

$$\exp\left(-\frac{3}{2m}\right) \leq h_0 \leq \exp\left(-\frac{1}{2m}\right)$$

значения x_2 и h_2 определяются по (2.5); при h_0 , лежащих вне этого интервала:

$$x_2 = h_2 = \exp\left\{\frac{1}{2m} \left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{3} m (2 + m \ln h_0) \ln h_0}\right]\right\}$$

Зная граничные кривые, можно при помощи кривых фиг. 3 и формул (3.12) и (3.13), задавшись P и h_0 , найти форму, которую примет оболочка. Формулы (3.5) — (3.7) остаются в силе.

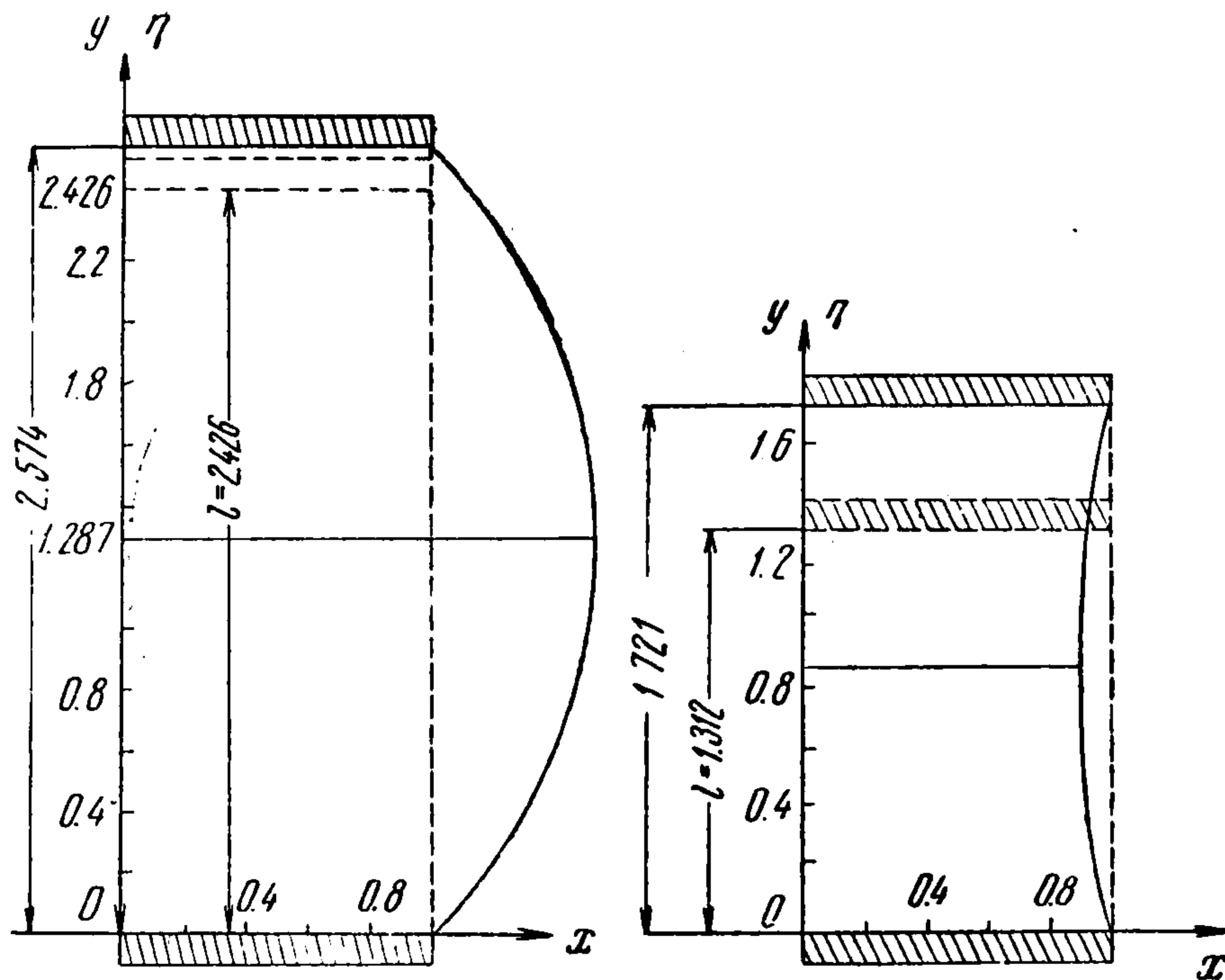
Существенно, что напряжения в оболочке будут сильно отличаться от найденных без учета изменения формы и толщины.

На фиг. 5 справа показана оболочка, у которой $h_0 = 0.84$ при $P = 0.59$. У днища $p_1 = 0.764$, $p_2 = 0.382$, при $y = 1/2 l$ имеем $p_1 = 0.816$, $p_2 = 0.171$. По элементарной теории $p_1 = 0.59$, $p_2 = 0$.

Поступила 20 XI 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев А. С. Напряженное состояние безмоментных цилиндрических оболочек при больших деформациях. Тезисы докладов III Всесоюзного матем. съезда. Изд. АН СССР, М., 1956.
2. Миркеев А. О. Безмоментная симметричная деформация цилиндрической оболочки за пределом упругости, Ученые записки Горьковского Гос. Университета, вып. XXVIII, 1955.
3. Gleuzal A. Plastic Deformation of a Circular Diaphragm under Pressure. Journal of Applied Mech., № 3, 1948.
4. Григорьев А. С. Исследование работы круглой мембраны при больших прогибах за пределом упругости. Инженерный сборник АН СССР, т. IX, 1951.
5. Алексеев С. А. Кольцеобразная упругая мембрана под действием поперечной силы, приложенной к жесткому центрально расположенному диску, Инженерный сборник АН СССР, т. X, 1951.
6. Davis E. Yielding and Fracture of Medium-Carbon Steel under Combined Stress. Journal of Applied Mech., № 1, 1945.
7. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел, т. 1, ИЛ, М., 1954.



Фиг. 5