Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ГЕЛИКОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ

Н. А. Алумяэ

(Таллин)

Определяются критическая нагрузка и напряженное состояние после потери устойчивости «в малом» безмоментного начального состояния оболочки, очерченной по поверхности геликоида, ограниченной асимптотическими контурными линиями.

Для вывода упрощенного разрешающего уравнения используется идея о расчленении общего напряженного состояния на элементарные, а для решения этого уравнения — метод асимптотического интегрирования.

1. Начальное состояние оболочки. Отнесем срединную поверхность геликоидальной оболочки к безразмерным координатам α, β и зададим ее уравнение радиусом-вектором $\mathbf{r}$ в форме

$$\mathbf{r} = c\{\alpha(\mathbf{u}_x\cos\beta + \mathbf{u}_y\sin\beta) + \beta\mathbf{u}_z\} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$, $\mathbf{u}_z$ — орты декартовой системы координат. Линии $\alpha = \mathrm{const}$, $\beta = \mathrm{const}$ образуют ортогональную сетку асимптотических линий. Параметры Ляме A, B и единственный ненулевой коэффициент второй квадратичной формы $b_{\alpha\beta}$ даются выражениями

$$A = c, \qquad B = c(1+\alpha^2)^{1/2}, \qquad b_{\alpha\beta} = -c(1+\alpha^2)^{-1/2} \tag{1.2}$$

Предположим, что оболочка вдоль линий $\alpha = \pm\alpha_*$ окаймлена весьма жесткими ребрами, а вдоль линий $\beta = \pm\beta_*$ — ребрами, имеющими конечную жесткость на растяжение — сжатие и бесконечно большую жесткость на изгиб и кручение. Рассмотрим случай, где напряженное состояние оболочки создается заданным на контуре срединной поверхности вектором перемещения $\mathbf{v} = \mathbf{u}_x U\alpha/\alpha_*$, $U = \mathrm{const}$, причем предположим, что общая устойчивость системы обеспечена. При указанных условиях закрепления и нагрузки физические компоненты первого и второго тензоров деформации ε_{ij} и $\varkappa_{ij}$ должны удовлетворять на краю $\alpha = \pm\alpha_*$ условиям

$$\begin{gathered}\varepsilon_{\beta\beta} = 0, \qquad 2\frac{\partial\varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial\beta} - \frac{\partial}{\partial\alpha}(\sqrt{1+\alpha^2}\,\varepsilon_{\beta\beta}) + \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\,\varepsilon_{\alpha\alpha} = 0\\ c(1+\alpha^2)\varkappa_{\beta\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta} = 0, \; 2c(1+\alpha^2)\varkappa_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\alpha\alpha} - \varepsilon_{\beta\beta} = 0\end{gathered} \tag{1.3}$$

а на краю $\beta = \pm\beta_*$ условиям

$$\begin{gathered}\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{U}{c\alpha_*}\cos\beta_*, \qquad \frac{\partial\varepsilon_{\alpha\alpha}}{\partial\beta} - 2\frac{\partial}{\partial\alpha}(\sqrt{1+\alpha^2}\,\varepsilon_{\alpha\beta}) = 0\\ c(1+\alpha^2)\varkappa_{\alpha\alpha} - \varepsilon_{\alpha\beta} = 0, \qquad 2c(1+\alpha^2)\varkappa_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\beta\beta} - \varepsilon_{\alpha\alpha} = 0\end{gathered} \tag{1.4}$$

Предположим, что толщина оболочки t изменяется по закону $t = t_0(1+\alpha^2)^{1/2}$. Тогда усилия безмоментного состояния даются выражениями

$$\begin{gathered}T_{\alpha\alpha} = -Et_0\sigma(1+\alpha^2)^{1/2}\left[1 - \frac{5}{8}\left(\frac{1+\alpha^2}{1+\alpha_*^2}\right)^{1/2}\right]\\ T_{\beta\beta} = -Et_0\sigma(1+\alpha^2)^{1/2}\left[2 - \frac{15}{8}\left(\frac{1+\alpha^2}{1+\alpha_*^2}\right)^{1/2}\right]\\ T_{\alpha\beta} = 0, \qquad \sigma = -3U(c\alpha_*)^{-1}\cos\beta_*\end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь E — модуль упругости (коэффициент поперечного расширения $\nu = 1/3$).

Усилия $T_{\alpha\alpha}$, $T_{\beta\beta}$ удовлетворяют первым краевым условиям (1.3), (1.4). Остальные же краевые условия удовлетворяются посредством интегралов обобщенного краевого эффекта оболочки отрицательной кривизны вдоль асимптотической контурной линии [1].

Дальнейшей целью является определение так называемого критического значения σ безмоментного состояния (1.5). Предварительно отметим, что формы бесконечно малых изгибаний срединной поверхности определяются двумя произвольными функциями $\psi_1(\alpha)$ и $\psi_2(\beta)$.

$$\varkappa_{\alpha\alpha} = \frac{1+\alpha^2}{\alpha}\,\frac{\partial\psi_1(\alpha)}{\partial\alpha} + \psi_1(\alpha), \qquad \varkappa_{\beta\beta} = \psi_1(\alpha) + \frac{1}{(1+\alpha^2)^{1/2}}\psi_2(\beta), \qquad \varkappa_{\alpha\beta} = 0 \tag{1.6}$$

Рассмотрим случай, когда напряженное состояние после потери устойчивости безмоментного состояния (1.5) имеет большой показатель изменяемости вдоль α-линий.

2. Потеря устойчивости с волнообразованием по α-линиям. Предположим, что напряженное состояние после потери устойчивости будет типа обобщенного краевого эффекта вдоль асимптотического контура $\alpha = \mathrm{const}$. Такое напряженное состояние может быть определено из следующих упрощенных соотношений:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial S_{\beta\beta}}{\partial\beta} + \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[(1+\alpha^2)\,S_{\alpha\beta}\right] = 0 \tag{2.1}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{1+\alpha^2}}S_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2}{c\,\partial\alpha^2}\left(\sqrt{1+\alpha^2}\,G_{\alpha\alpha}\right) + c\sqrt{1+\alpha^2}\left(T_{\alpha\alpha}\varkappa_{\alpha\alpha} + T_{\beta\beta}\varkappa_{\beta\beta}\right) = 0$$

уравнения совместности деформации

$$\frac{\partial\varkappa_{\alpha\alpha}}{\partial\beta} - \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[(1+\alpha^2)\,\varkappa_{\alpha\beta}\right] = 0 \qquad \frac{2}{\sqrt{1+\alpha^2}}\varkappa_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2}{c\,\partial\alpha^2}\left(\sqrt{1+\alpha^2}\,\varepsilon_{\beta\beta}\right) = 0 \tag{2.2}$$

соотношения упругости $(t = t_0\sqrt{1+\alpha^2})$,

$$G_{\alpha\alpha} = -\frac{Et_0^3\,(1+\alpha^2)^{3/2}}{12\,(1-\nu^2)}\varkappa_{\alpha\alpha}, \qquad \varepsilon_{\beta\beta} = \frac{1}{Et_0\sqrt{1+\alpha^2}}S_{\beta\beta} \tag{2.3}$$

Для определения $S_{\alpha\alpha}$, $\varkappa_{\beta\beta}$ используем упрощенные соотношения

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\sqrt{1+\alpha^2}\,S_{\alpha\alpha} = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}S_{\beta\beta} - \frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial\beta}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\sqrt{1+\alpha^2}\,\varkappa_{\beta\beta} = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\varkappa_{\alpha\alpha} + \frac{\partial\varkappa_{\alpha\beta}}{\partial\beta} \tag{2.4}$$

Исключая из системы (2.1), (2.2) величины $S_{\alpha\beta}$, $\varkappa_{\alpha\beta}$, а при помощи (2.4) также $\varkappa_{\beta\beta}$, после некоторых упрощений, законных в рамках теории обобщенного краевого эффекта оболочки отрицательной кривизны, получим систему $(h^2 = t_0^2\,/\,12\,(1-\nu^2)\,c^2)$:

$$\frac{2}{Et_0}\,\frac{\partial S_{\beta\beta}}{\partial\beta} - \frac{h^2c}{\sqrt{1+\alpha^2}}\,\frac{\partial}{\partial\beta}(1+\alpha^2)^{3/2}\,\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}(1+\alpha^2)^2\,\varkappa_{\alpha\alpha} - \tag{2.5}$$

$$-\frac{\sigma c}{\sqrt{1+\alpha^2}}\,\frac{\partial}{\partial\alpha}(1+\alpha^2)^{5/2}\left[1-\frac{5}{8}\left(\frac{1+\alpha^2}{1+\alpha_*^2}\right)^{1/2}\right]\varkappa_{\alpha\alpha} - 2\sigma c\alpha\,(1+\alpha^2)\left[1-\right.$$

$$\left.-\frac{15}{16}\left(\frac{1+\alpha^2}{1+\alpha_*^2}\right)^{1/2}\right]\varkappa_{\alpha\alpha} = 0$$

$$2c\,\frac{\partial\varkappa_{\alpha\alpha}}{\partial\beta} + \frac{1}{Et_0\sqrt{1+\alpha^2}}\,\frac{\partial}{\partial\alpha}(1+\alpha^2)^{3/2}\,\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}S_{\beta\beta} = 0 \tag{2.6}$$

Положим

$$S_{\beta\beta}(\alpha,\beta) = \varphi(\alpha)\sin k\beta, \qquad \varkappa_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) = \psi(\alpha)\cos k\beta \tag{2.7}$$

Тогда из (2.5), (2.6) следует уравнение

$$h^2\frac{d^3}{d\alpha^3}(1+\alpha^2)^4\,\frac{d^3\varphi}{d\alpha^3} + \sigma\frac{d^2}{d\alpha^2}(1+\alpha^2)^3\left[1-\frac{5}{8}\left(\frac{1+\alpha^2}{1+\alpha_*^2}\right)^{1/2}\right]\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} - 4k^2\varphi = 0 \tag{2.8}$$

Постоянная k определяется из следующих соображений. Краевые условия на контуре $\beta = \pm\beta_*$ для интегралов уравнений устойчивости получим, если в (1.4) положим $U = 0$. Интегралы же системы (2.5), (2.6) могут в каждой точке контурных линий $\beta = \pm\beta_*$ удовлетворять не четырем, а только одному условию. Остальные условия на линиях $\beta = \pm\beta_*$ удовлетворяются при помощи интегралов обобщенного краевого эффекта вдоль этих линий. Учет свойств этих интегралов показывает, что интегралы системы (2.5), (2.6) должны на линиях $\beta = \pm\beta_*$ удовлетворять условию $\varkappa_{\beta\beta} = 0$. Вместе с тем вытекающая из (2.8) энергетическая формула для σ дает наименьшее значение σ при наименьшем значении постоянной k. Отсюда следует, что $k = \pi/2\beta_*$.

На контурных линиях $\alpha = \pm\alpha_*$ интегралы уравнения (2.8) подчиняем условиям

$$\varphi = 0, \qquad \frac{d\varphi}{d\alpha} = 0, \qquad \frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} = 0 \tag{2.9}$$

тогда можно в первом приближении удовлетворить всем условиям (1.3), за исключением третьего, содержащего $\varkappa_{\beta\beta}$. Для выполнения этого условия можем использовать произвол интегрирования второго уравнения (2.4).

3. Асимптотическое интегрирование уравнения (2.8). Ищем решение уравнения (2.8) в виде асимптотического разложения по нисходящим степеням большого параметра s:

$$\varphi(\alpha) = u[sr(\alpha)]\left\{\varphi_0(\alpha) + \frac{1}{s}\varphi_1(\alpha) + \ldots\right\}, \qquad s = \sqrt{2}\ (k/h)^{1/2} \tag{3.1}$$

где функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} - \left(\frac{t}{s}\right)^{2\gamma} u(t) = 0, \qquad t = sr(\alpha) \tag{3.2}$$

содержащему пока неопределенный параметр γ. Введем обозначения

$$\sigma = 3h^{4/3}k^{2/3}\frac{8\sqrt{1+\alpha_*^2}}{8\sqrt{1+\alpha_*^2}-5}\tau, \qquad f(\alpha) = (1+\alpha^2)^{1/3}\frac{8\sqrt{1+\alpha_*^2}-5\sqrt{1+\alpha^2}}{8\sqrt{1+\alpha_*^2}-5} \tag{3.3}$$

Метод асимптотического интегрирования [1] приводит к следующему уравнению для определения функции изменяемости $r(\alpha)$:

$$r^\gamma\frac{dr}{d\alpha} = (1+\alpha^2)^{-2/3}\Phi(\alpha) \tag{3.4}$$

где $\Phi(\alpha)$ — корни характеристического («головного») уравнения

$$2\Phi^6 + 3\tau f(\alpha)\Phi^4 - 1 = 0 \tag{3.5}$$

Уравнение (3.2) интегрируется в цилиндрических функциях

$$u[sr(\alpha)] = \sqrt{r}\, Z_p\left(\frac{is}{1+\gamma}r^{1+\gamma}\right), \qquad p = \frac{1}{2(1+\gamma)} \tag{3.6}$$

для определения же функции интенсивности $\varphi_0(\alpha)$ используется второе уравнение асимптотического разложения (2.8). Интегрирование этого уравнения дает

$$(1+\alpha^2)^{2/3}\Phi^3(\Phi^2+\tau f)\,r^{-\gamma}\varphi_0^2 = \text{const} \tag{3.7}$$

В точках $\alpha = \pm\alpha_0$, где $\tau f(\alpha_0) = 1$, уравнение (3.5) имеет двукратные корни $\Phi = \pm i$, поэтому в этих точках $\Phi^2 + \tau f = 0$. Чтобы получить конечное значение для функции $\varphi_0(\alpha)$ при $\alpha = \pm\alpha_0$, нужно для постоянной γ и произвола интегрирования уравнения (3.4) подобрать подходящие значения.

Решение уравнения (3.4) дадим в виде

$$[r(\alpha)]^{1+\gamma} = (1+\gamma)\rho(\alpha), \qquad \rho(\alpha) = \int_{\alpha_0}^{\alpha}(1+\xi^2)^{-2/3}\Phi(\xi)\,d\xi \tag{3.8}$$

Предположим[1], что $\tau > 1$; тогда $\alpha_0 > 0$.

---

[1] В случае $\tau \leqslant 1$ интегрирование уравнения (2.8) значительно упрощается; однако таких собственных значений у этого уравнения при краевых условиях (2.9) нет.

В интервале $\alpha_* \geqslant \alpha \geqslant \alpha_0$ уравнение (3.5) имеет четыре комплексно сопряженных корня $\Phi = \pm(\Phi_r \pm i\Phi_i)$ и два вещественных корня $\Phi = \pm\Phi_3$. Пусть соответствующие этим корням значения функций $\rho(\alpha)$ будут $\pm(\rho_r \pm i\rho_i)$, $\pm\rho_3$. Для дальнейшего достаточно рассмотреть корни $\Phi = \pm\Phi_r - i\Phi_i$, $\Phi = \Phi_3$ и функции $\rho = \pm\rho_r - i\rho_i$, $\rho = \rho_3$. Представим соответствующие указанным корням функции

$$c\,[(1+\alpha^2)^{3/2}\Phi^3(\Phi^2+\tau f)]^{-1/2} \tag{3.9}$$

в форме $\psi_i \pm i\psi_r$, ψ_3, где ψ_i, ψ_r, ψ_3 — положительные функции. Этого можно всегда добиться надлежащим выбором комплексной постоянной c.

Анализ поведения функций (3.9) в окрестности точки $\alpha = \pm\alpha_0$ показывает, что ограниченное при $\alpha = \alpha_0$ решение получим, полагая

$$\begin{gathered}\varphi = (\psi_i + i\psi_r)(\rho_i + i\rho_r)^{1/2}\{c_1 J_{-\frac{1}{4}}[s(\rho_i + i\rho_r)] + c_2 J_{\frac{3}{4}}[s(\rho_i + i\rho_r)]\} + \\ + (\psi_i - i\psi_r)(\rho_i - i\rho_r)^{1/2}\{c_3 J_{-\frac{1}{4}}[s(\rho_i - i\rho_r)] + c_4 J_{\frac{3}{4}}[s(\rho_i - i\rho_r)]\} + \\ + \psi(D_5 e^{-s\rho} + D_6 e^{+s\rho})\end{gathered} \tag{3.10}$$

Вместо комплексных постоянных $c_1, \ldots c_4$ целесообразно ввести постоянные $D_1, \ldots D_4$:

$$\left.\begin{matrix}c_1\\c_3\end{matrix}\right\} = D_1 + D_3 \pm i(D_4 - D_2), \qquad \left.\begin{matrix}c_2\\c_4\end{matrix}\right\} = D_2 + D_4 \pm i(D_1 - D_3) \tag{3.11}$$

тогда φ является вещественной функцией при любых вещественных значениях $D_1, \ldots, D_6$, причем составляющие φ с коэффициентами D_1 и D_2 представляют собой квазипериодические функции с убывающей амплитудой; наоборот, амплитуды составляющих с коэффициентами D_3, D_4 увеличиваются с увеличением α $(\alpha > \alpha_0)$.

В интервале $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0$ уравнение (3.5) имеет четыре чисто мнимых корня $\Phi = \pm i(\Phi_r \pm \Phi_i)$ и два вещественных корня $\Phi = \pm\Phi_3$, из которых достаточно рассмотреть корни $\Phi = i(\pm\Phi_r - \Phi_i)$, $\Phi = \Phi_3$. Пусть соответствующие значения $\rho(\alpha)$ будут $\rho = i(\pm\rho_r - \rho_i)$, $\rho = \rho_3$. Решение уравнения (2.8) в этом интервале можно представить в виде

$$\begin{gathered}\varphi = (\psi_i - \psi_r)(\rho_i - \rho_r)^{1/2}\{c_1^* J_{-1/4}[s(\rho_i - \rho_r)] + c_2^* J_{3/4}[s(\rho_i - \rho_r)]\} + \\ + (\psi_i + \psi_r)(\rho_i + \rho_r)^{1/2}\{c_3^* J_{-1/4}[s(\rho_i + \rho_r)] + c_4^* J_{3/4}[s(\rho_i + \rho_r)]\} + \\ + \psi\{D_5 e^{-s\rho} + D_6 e^{s\rho}\}\end{gathered} \tag{3.12}$$

где для сопряжения с функцией (3.10) постоянные $c_1^*, \ldots, c_4^*$ назначаются следующим образом:

$$\left.\begin{matrix}c_1^*\\c_3^*\end{matrix}\right\} = D_1 + D_3 \mp (D_4 - D_2), \qquad \left.\begin{matrix}c_2^*\\c_4^*\end{matrix}\right\} = D_2 + D_4 \mp (D_1 - D_3) \tag{3.13}$$

Определение наименьшего собственного значения задачи (2.8), (2.9) по формулам (3.10), (3.12) все же остается довольно трудоемким, так как входящие в (3.10), (3.12) функции ρ_i, $\rho_r, \ldots$ зависят от τ и из-за высокого порядка дифференциального уравнения (2.8) вытекающее из краевых условий характеристическое уравнение не является простым. Если же ограничиться асимптотической оценкой для собственного значения τ, то это определяется без труда:

$$\tau = 1 + \frac{1.50}{s} \tag{3.14}$$

однако при выводе этого результата учитывается только качественно, а не количественно затухание функции φ в интервале $\alpha_* \geqslant \alpha \geqslant \alpha_0$. Соответствующая собственному значению (3.14) собственная функция характеризуется оценками $D_j \ll D_2$ $(j = 1, 3, 4, 5, 6)$.

В заключение отметим, что методом Ю. Н. Работнова [2] получается $\tau = 1$.

Поступила 18 VII 1957 Академия наук Эстонской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек ГТТИ, М., 1953.
2. Работнов Ю. Н. Локальная устойчивость оболочек. ДАН СССР, т. LII, № 2, 1946.