Прикладная математика и механика, Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Л. А. Толоконников

(Тула)

Выражения составляющих тензора деформаций через производные от перемещений u_k по координатам x_k частиц в естественном состоянии имеют вид [1]:

$$e_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_s}{\partial x_i}\frac{\partial u_s}{\partial x_k}\right)$$

Ориентация материальных координатных площадок в деформированном состоянии определяется единичными векторами

$$\mathbf{b}_k = \frac{1}{s_k}\mathbf{a}_k = \frac{1}{s_k}\alpha_{kn}\mathbf{i}_n$$

Выражения коэффициентов искажения s_k площадей координатных площадок и величин α_{ik} через перемещения можно найти в цитированной монографии В. В. Новожилова.

Если известны главные направления деформации, то деформированное состояние в точке тела определяется главными значениями тензора e_k либо алгебраическими инвариантами

$$3e = e_{11} + e_{22} + e_{33}$$

$$9e_i^2 = (e_{11} - e_{22})^2 + \cdots + 6e_{12}^2 \qquad (1.1)$$

$$\cos 3\psi = \frac{\sqrt{2}}{e_i^3}(\det\|e_{ik}\| - e^3 + 1.5\, ee_i^2)$$

Главные значения тензора выражаются через алгебраические инварианты формулами

$$e_k = e + \sqrt{2}\, e_i \cos\psi_k, \qquad \psi_1 = \psi, \qquad \psi_2 = \psi + \frac{2}{3}\pi, \qquad \psi_3 = \psi - \frac{2}{3}\pi$$

Наряду с относительным изменением объема Δ будем называть естественными координатами деформации [2] результирующий сдвиг γ и направляющий угол деформации α. Естественные координаты деформации выражаются через алгебраические инварианты формулами

$$(1 + \Delta)^2 = 1 + 6e + 6(2e^2 - e_i^2) + 4(\sqrt{2}e_i^3\cos 3\psi + 2e^3 - 3ee_i^2)$$

$$1 - \frac{3}{2}\gamma^2 = \frac{1}{3(1+2e)}\sum_{s=1}^{3}\sqrt{k_s}, \quad k_s = 1 + 2(2e - \sqrt{2}e_i\cos\psi_s) + 4(e^2 - \sqrt{2}ee_i\cos\psi_s) + 4e_i^2(\cos 2\psi_s - 0.5) \qquad (1.2)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3\alpha = \frac{1}{\gamma^3 l^3} - \frac{1}{\gamma^3}(1 - 2.5\gamma^2)\sqrt{1-\gamma^2}, \quad l^3 = \frac{1+2e}{(1+\Delta)^{2/3}}$$

Введем в рассмотрение еще одну систему инвариантов формоизменения; интенсивность деформаций $э_i$ и фазу β. Эти величины представляют собой алгебраические инварианты девиатора логарифмических удлинений формоизменения, имеющего главные значения

$$\ln l_k = \ln \lambda_k - \tfrac{1}{3} \ln (1 + \Delta)$$

где λ_k — удлинения главных волокон. По этому определению находим

$$3э_i^2 = \ln^2 l_1 + \ln^2 l_2 + \ln^2 l_3, \qquad э_i^3 \cos 3\beta = \sqrt{2} \ln l_1 \ln l_2 \ln l_3$$

а главные значения девиатора логарифмических удлинений

$$\ln l_k = \sqrt{2}\, э_i \cos \beta_k, \quad \beta_1 = \beta, \quad \beta_2 = \beta + \tfrac{2}{3}\pi, \quad \beta_3 = \beta - \tfrac{2}{3}\pi \tag{1.3}$$

Поскольку $\lambda_k^2 = 1 + 2e_k$, можно показать, что

$$3э_i^2 = \tfrac{1}{4} \sum_{k=1}^{3} \ln^2 (1 + 2e_k) - \tfrac{1}{3} \ln^2 (1 + \Delta)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} э_i^3 \cos^3 \beta = \tfrac{1}{8} \prod_{k=1}^{3} \ln (1 + 2e_k) + \tfrac{2}{27} \ln^2 (1 + \Delta) -$$
$$- \tfrac{1}{12} \ln (1 + \Delta) [\ln (1 + 2e_1) \ln (1 + 2e_2) + \ln (1 + 2e_2) \ln (1 + 2e_3) +$$
$$+ \ln (1 + 2e_3) \ln (1 + 2e_1)] \tag{1.4}$$

Итак, в дальнейшем можно считать все инварианты деформации выраженными через производные от перемещений по лагранжевым координатам частиц тела.

Полагая в дальнейшем главные направления напряжений совпадающими с главными направлениями деформации, напряженное состояние в точке тела будем определять главными истинными напряжениями σ_k либо симметричными инвариантами

$$3\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$
$$3\tau_i^2 = (\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2$$
$$\tau_i^3 \cos 3\varphi = \sqrt{2} (\sigma_1 - \sigma)(\sigma_2 - \sigma)(\sigma_3 - \sigma)$$

причем

$$\sigma_k = \sigma + \sqrt{2} \tau_k \cos \varphi_k, \quad \varphi_1 = \varphi, \quad \varphi_2 = \varphi + \tfrac{2}{3}\pi, \quad \varphi_3 = \varphi - \tfrac{2}{3}\pi \tag{1.5}$$

Применением принципа Лагранжа можно получить вариационное уравнение равновесия сплошного тела

$$\int_{(S)} X_{\nu i} \delta u_i dS + \int_{(T)} \rho X_i \delta u_i d\tau = \int_{(T)} \Sigma_{mn} \delta e_{mn} d\tau$$

выражающее равенство возможных работ внешних и внутренних сил. В отличие от известной [1] интерпретации обобщенных напряжений в этом уравнении

$$\Sigma_{mn} = \frac{s_m s_n}{1 + \Delta} \sigma_{mn}$$

Здесь σ_{mn} — проекция на $\mathbf{b}_n$ вектора истинного напряжения на площадке с нормалью $\mathbf{b}_m$. Очевидна симметрия таблицы обобщенных напряжений, а непосредственной проверкой можно обнаружить тензорные свойства обобщенных напряжений. Алгебраические инварианты тензора обобщенных напряжений Σ, Σ_i, ξ выражаются через Σ_{mn} формулами типа (1.1). Интегрирование в вариационном уравнении проводится по известной поверхности или объему тела в естественном состоянии.

Следствием вариационного уравнения является система уравнений

$$\frac{\partial \Sigma_{k1}}{\partial x_1}+\frac{\partial \Sigma_{k2}}{\partial x_2}+\frac{\partial \Sigma_{k3}}{\partial x}+\rho\left(X_1'\alpha_{k1}+X_2'\alpha_{k2}+X_3'\alpha_{k3}\right)=0 \qquad (1.6)$$

Здесь для обобщенных массовых сил приняты обозначения

$$(1+\Delta)X_n'=X_n+\frac{1}{\rho}\left(\Sigma_{11}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1^2}+\Sigma_{22}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_2^2}+\Sigma_{33}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_3^2}+\right.$$
$$\left.+2\Sigma_{12}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1\partial x_2}+2\Sigma_{23}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_2\partial x_3}+2\Sigma_{13}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1\partial x_3}\right) \qquad (123)$$

В каждой точке известной поверхности тела S задаются значения трех функций, по одной из трех пар:

$$u_i, \quad X_{\nu i}=\nu_k\left(\Sigma_{ki}+\Sigma_{kn}\frac{\partial u_i}{\partial x_n}\right)$$

Остается выразить обобщенные напряжения через деформации. Поскольку главные направления тензоров обобщенных напряжений и деформаций считаются совпадающими, можно установить [1,3] соотношения между составляющими тензоров и их инвариантами:

$$\Sigma_{11}=\Sigma+2G^{(1)}(e_{11}-e)+G^{(2)}\left(\tfrac{1}{2}e_i^2-2e^2+e_{22}e_{33}-e_{23}^2+ee_{11}\right)$$
$$\Sigma_{12}=2G^{(1)}e_{12}+G^{(2)}\left(ee_{12}-e_{12}e_{33}+e_{13}e_{23}\right) \qquad (1.7)$$

где использованы обозначения

$$G^{(1)}=\frac{\Sigma_i}{2e_i}\frac{\sin(2\psi+\xi)}{\sin 3\psi}, \quad G^{(2)}=\sqrt{2}\frac{\Sigma_i}{e_i^2}\frac{\sin(\psi-\xi)}{\sin 3\psi}$$

Изучая изотропные тела, напряжения в которых определяются только деформациями в рассматриваемом состоянии, остается установить зависимость инвариантов Σ, Σ_i, ξ от e, e_i, ψ. Непосредственными вычислениями можно проверить выражения

$$\Sigma=l^4(1+\Delta)^{1/2}\left\{\sigma m_1-\sqrt{2}\gamma^2 G\left[m_2\cos(\varphi-\alpha)-m_3\cos(2\alpha+\varphi)\right]\right\}$$

$$G^{(1)}=\frac{\gamma l^4(1+\Delta)^{1/2}}{e_i\sin 3\psi}\left\{-\frac{\sqrt{2}}{4}\sigma\left[m_2\sin(2\psi+\alpha)-\gamma m_3\sin(\alpha-\psi)\right]+\right.$$
$$\left.+G\left[m_1\sin(2\psi+\varphi)-\tfrac{1}{2}\gamma m_2\sin(2\psi-\varphi-\alpha)+\tfrac{1}{2}\gamma^2 m_3\sin(2\psi+2\alpha-\varphi)\right]\right\}$$
$$(1.8)$$
$$G^{(2)}=\frac{\gamma l^4(1+\Delta)^{1/2}}{e_i^2\sin 3\psi}\left\{\sigma\left[m_2\sin(\alpha-\psi)+\gamma m_3\sin(2\alpha+\psi)\right]+\right.$$
$$\left.+2\sqrt{2}G\left[m_1\sin(\psi-\varphi)-\tfrac{1}{2}\gamma m_2\sin(\varphi+\psi+\alpha)+\tfrac{1}{2}\gamma^2 m_3\sin(\varphi+\psi-2\alpha)\right]\right\}$$

где

$$G = \frac{\tau_i}{2\gamma}, \quad m = 1 - 2\gamma^2 + \frac{7}{4}\gamma^4 - \sqrt{2\gamma^3}\sqrt{1-\gamma^2}\cos 3\alpha$$

$$m_2 = 2\sqrt{2}(1-\gamma^2)^{3/2} - \gamma^3 \cos 3\alpha, \quad m_3 = 3(1 - 1.5\gamma^2)$$

Поэтому экспериментальная задача сводится к выяснению зависимости инвариантов истинных напряжений от любой тройки независимых инвариантов деформации.

Здесь же заметим, что внутренне непротиворечивые соотношения между напряжениями и деформациями в главных осях можно представить в виде

$$\sigma_k = \sigma + \frac{\sqrt{2}\tau_i}{\sin 3\beta}[\sin(2\beta+\varphi)\cos\beta_k + \sin(\beta-\varphi)\cos 2\beta_k] \tag{1.9}$$

Подобно (1.7) эти соотношения приобретают значение физических законов, если зависимость σ, τ_i, φ от э_i, Δ, β установлена экспериментально.

§ 2. Экспериментально определенные функции σ, τ_i, φ инвариантов деформации называют обобщенными модулями упругости. Как известно[1,3] аналитическое представление модулей ограничивается уравнениями совместности, которые получаются как условия существования потенциала внутренних сил. Форма уравнений совместности существенно зависит от выбора независимых координат деформации.

Отнесенная к единице объема деформированного тела элементарная работа внутренних сил

$$\delta' A = \sigma_k \delta \ln [l_k (1+\Delta)^{1/3}]$$

представляется в виде

$$\delta' A = \frac{\sigma}{1+\Delta}\delta\Delta + 3\tau_i(\cos\omega\delta\text{э}_i + \text{э}_i \sin\omega\delta\beta)$$

где разность фаз истинных напряжений и удлинений

$$\omega = \varphi - \beta \tag{2.1}$$

Такой выбор координат деформации приводит к уравнениям совместности

$$\frac{1}{1+\Delta}\frac{\partial\sigma}{\partial\text{э}_i} = 3\frac{\partial}{\partial\Delta}(\tau_i\cos\omega), \qquad \frac{1}{1+\Delta}\frac{\partial\sigma}{\partial\beta} = 3\frac{\partial}{\partial\Delta}(\tau_i\text{э}_i\sin\omega) \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(\tau_i\cos\omega) = \frac{\partial}{\partial\text{э}_i}(\tau_i\text{э}_i\sin\omega) \tag{2.3}$$

Опираясь на отдельные опытные факты, можно указать некоторые дополнительные общие свойства функций σ, τ_i, ω, если учесть физическое значение инвариантов напряжений. Во-первых, вследствие постулата естественного состояния функции σ, τ_i инвариантов деформаций должны обращаться в нуль вместе с характеристиками величин деформации Δ и э_i. Во-вторых, при однородном осевом растяжении цилиндрических образцов ($\beta = 0$) и при идеальном сжатии ($\beta = {}^1/_3\pi$) фазы напряжений и деформаций совпадают, поэтому

$$\omega|_{\beta=0} = \omega|_{\beta={}^1/_3\pi} = 0 \tag{2.4}$$

Экспериментальные исследования Бриджмена [4] привели к формулировке закона объемной деформации:

$$\Delta = \Delta(\sigma) \text{ или } \sigma = \sigma(\Delta) \tag{2.5}$$

Следствием так формулированного закона объемной деформации и уравнений совместности (2.2) оказывается независимость октаэдрического касательного напряжения от параметра относительной объемной деформации:

$$\tau_i = \tau_i(\textit{э}_i, \beta), \quad \varphi = \varphi(\textit{э}_i, \beta) \tag{2.6}$$

поскольку при наличии (2.5) уравнения (2.2) сводятся к однородной системе, единственным решением которой является тривиальное $\partial\tau_i/\partial\Delta = 0$, $\partial\varphi/\partial\Delta = 0$.

Заметим между прочим, что закон (2.5) и условия совместности обобщенных модулей приводят к выделению механических характеристик формоизменения и при любом другом способе выделения координат формоизменения, не изменяющихся при наложении на некоторое деформированное состояние гидростатического давления.

Рассмотрим, например, данные первой серии опытов Дэвиса [5] с медными трубами при пропорциональном изменении внешних сил. Параметры Лоде, вычисляемые Девисом по опытным данным, связаны с фазами φ и β формулами

$$\mu = \frac{-\cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi}{\cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\varphi}, \qquad \nu = \frac{-\cos\beta + \sqrt{3}\sin\beta}{\cos\beta + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\beta}$$

Поэтому можно считать, что в рассматриваемых опытах поддерживалось неизменным значение угла φ и не обнаружено заметных изменений угла β с возрастанием интенсивности деформаций. Иными словами, в опытах Дэвиса обнаружена зависимость фазы напряжений только от фазы деформаций:

$\beta = 0$	0.31	0.43	$^1/_6\pi$	0.63	0.78	1.02	$^1/_3\pi$
$\omega = 0$	−0.08	−0.06	0	0.06	0.05	−0.01	0

Нулевое значение разности фаз при $\beta = {}^1/_6\pi$ не случайно. Фаза $\beta = {}^1/_6\pi$ соответствует деформации чистого сдвига

$$l_1 = 1 + \eta, \qquad l_2 = (1 + \eta)^{-1}, \qquad l_3 = 1 \tag{2.7}$$

которая вызывается системой напряжений

$$\sigma_1 = \sigma + p, \qquad \sigma_2 = \sigma - p, \qquad \sigma_3 = \sigma$$

Фаза такого напряженного состояния $\varphi = {}^1/_6\pi$. Известно [6] простейшее представление опытных данных

$$\varphi = \beta, \qquad \omega = 0 \tag{2.8}$$

Следствиями такой гипотезы и уравнения совместности (2.3) является универсальность зависимости τ_i от $\textit{э}_i$ при всех видах деформированного состояния и весьма простые соотношения между напряжениями и деформациями [8]:

$$\sigma_k = \sigma + \frac{1}{э_i} \tau_i (э_i) \ln l_k \tag{2.9}$$

Преимущество формулировки гипотезы подобия девиаторов в виде (2.8) перед аналогичной гипотезой вида [2] $\varphi = \alpha$ обнаруживается при рассмотрении деформации чистого сдвига.

Можно показать, что только на основании гипотезы подобия девиаторов напряжений и деформаций можно удовлетворительно построить так называемую квадратичную теорию упругости. При этом в выражениях напряжений через деформации сохраняются слагаемые второй степени относительно величин деформаций. Придерживаясь указанной степени точности, для представления экспериментальных данных располагаем выбором четырех констант:

$$\sigma = K\Delta + K_1\Delta^2, \quad \tau_i = 2Gэ_i + 2G_1 э_i^2$$

Используя такие выражения в (2.9), легко получить соотношения квадратичной теории упругости в главных осях. Соответствующие соотношения между обобщенными напряжениями и нелинейными составляющими тензора деформаций запишем, удерживая лишь слагаемые второй степени относительно e и e_i:

$$\begin{gathered}\textstyle\sum_{11} = 3Ke + \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3} G + K_1\right) 9e^2 - (3K + 7G)\, e_i^2 + \\ + 2\,[G - 3(K + 2G)\, e + 2G_1 e_i]\,(e_{11} - e) + 6G\,(e_{23}^2 - e_{22}e_{33}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \textstyle\sum_{12} = 2\,[G - 3(K + 2G)\, e + 2G_1 e_i]\, e_{12} + 6G\,(e_{12}e_{33} - e_{23}e_{13})\end{gathered}$$

Попытки расширения числа экспериментальных констант приводят к необходимости отказа от гипотезы (2.8) и учета зависимости октаэдрического касательного напряжения не только от интенсивности, но и от фазы формоизменения.

Полагая фазу напряжений зависящей только от β:

$$\omega = \omega(\beta) \tag{2.10}$$

условие совместности (2.3) представим уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial \beta} = э_i \frac{\partial T}{\partial э_i} \operatorname{tg} \omega + T \operatorname{tg} \omega, \quad T = \tau_i \cos \omega \tag{2.11}$$

Обозначив

$$V = Tэ_i, \quad t = \int_0^\beta \operatorname{tg} \omega \, d\beta, \quad s = \ln э_i$$

находим общий интеграл уравнения (2.11):

$$V = f(t + s)$$

содержащий произвольную экспериментально определяемую функцию. Переходя к прежним обозначениям, получаем

$$\tau_i э_i \cos \omega = \Phi\left(э_i \exp \int_0^\beta \operatorname{tg} \omega \, d\beta\right) \tag{2.12}$$

Итак, если в результате опытов объемная деформация оказывается зависящей только от гидростатического давления, а фаза напряжений — только от фазы формоизменения, то произведение интенсивностей напряжений и деформаций в масштабе $\cos\omega$ должно представляться универсальной функцией интенсивности деформаций, взятой в масштабе, зависящем от фазы деформаций.

В частности, указанным путем можно получить формулировку законов упругости, в которых учитывается зависимость обобщенного модуля сдвига только от фазы формоизменения:

$$\omega = \omega(\beta), \quad \tau_i = 2G(\beta)\,э_i \tag{2.13}$$

Если экспериментальные данные представляются функцией

$$\Phi(u) = 2G_0u^2, \qquad G_0 = \mathrm{const}$$

то получим

$$G = G_0 \frac{1}{\cos\omega} \exp 2\int_0^\beta \operatorname{tg}\omega\, d\beta$$

Если кривые зависимости τ_i от $э_i$, полученные в частных испытаниях при неизменных значениях β, отличаются только масштабами осей τ_i: $T = Э(э_i)\,B(\beta)$, то условие (2.11) приводит к необходимости каждую из этих кривых представлять только степенной функцией: $Э = Cэ_i^n$, а для определения масштабного множителя получается уравнение

$$\frac{dB}{d\beta} = B(n+1)\operatorname{tg}\omega \tag{2.14}$$

Зависимость октаэдрического касательного напряжения от инвариантов формоизменения имеет в этом случае вид:

$$\tau_i = Cэ_i^n \frac{1}{\cos\omega} B(\beta)$$

Например, приведенные выше данные опытов Дэвиса представим функцией

$$\operatorname{tg}\omega = 0.5\beta(\beta - 0.9)\sin 6\beta$$

и после интегрирования (2.14) находим

$$B = C_1 \exp\left\{-\frac{1+n}{12}\left[\left(\beta^2 - 0.9\beta - \frac{1}{18}\right)\cos 6\beta - \frac{1}{6}(2\beta - 0.9)\sin 6\beta\right]\right\}$$

В частности, найдем значения этой функции при одноосном растяжении и одноосном сжатии:

$$B(0) = C_1 \exp\frac{n+1}{216}, \quad B\left(\frac{\pi}{3}\right) = C_1 \exp\left(-1.95\frac{n+1}{216}\right)$$

Приближенная оценка отношения масштабных коэффициентов

$$B(0) : B\left(\frac{\pi}{y}\right) \approx 1 + 0.014(n+1)$$

показывает, что точки экспериментальной кривой $\tau_i = \tau_i(э_i)$, полученной при растяжении, должны лежать выше точек аналогичной кривой, полученной в условиях одноосного сжатия. Этот качественный вывод согласуется с данными опытов Дэвиса.

Остановимся еще на одном частном способе представления опытных данных [7]. Считая кривые $\tau_i = \tau_i(\text{э}_i)$, полученные в результате опытов при постоянных β, подобными, положим

$$\omega = \omega(\beta), \quad \tau_i k(\beta) = \psi[\text{э}_i k(\beta)] \tag{2.15}$$

Следствиями такой гипотезы и уравнения (2.3) являются: степенной закон для представления интенсивности напряжений

$$\tau_i = C[k(\beta)]^{n-1}\,\text{э}_i^{\,n}$$

и выражение коэффициента подобия

$$k = (\cos\omega)^{-\frac{1}{n+1}} \exp\int_0^\beta \operatorname{tg}\omega\, d\beta$$

где n и C — экспериментально определяемые константы.

Таким физическим законам соответствуют соотношения между напряжениями и деформациями:

$$\sigma_k = \sigma + C\cos\omega\,[\text{э}_i k(\beta)]^{n-1}\left[\left(1 + \frac{\operatorname{tg}\omega}{\operatorname{tg}3\beta}\right)\ln l_k\left(\frac{\sqrt{2}}{\text{э}_i}\ln^2 l_k - \text{э}_i\right)\frac{\operatorname{tg}\omega}{\operatorname{tg}3\beta}\right] \tag{2.16}$$

Поэтому нельзя считать обоснованными ссылки [7] на прямую аналогию с теорией малых упруго-пластических деформаций [6].

Наконец, заметим, что приведенные здесь соображения в основных чертах сохраняют значение и при условии несжимаемости материала, когда состояние тела в каждой точке определяется координатами формоизменения и гидростатическим напряжением. В таком случае условия совместности модулей формоизменения сводятся к одному уравнению (2.3) и экспериментально можно установить зависимость этих модулей от гидростатического напряжения как параметра.

Поступила 13 II 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. ГТТИ, 1948.
2. Толоконников Л. А. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейной теории упругости. ПММ, т. XX, вып. 3, 1956.
3. Новожилов В. В. О принципах обработки результатов статических испытаний изотропных материалов. ПММ, т. XV, вып. 6, 1951.
4. Бриджмен П. Физика высоких давлений. ОНТИ, 1935.
5. Davis E. A. Jielding and Fracture of Medium-Carbon Steel under combined stress. Journal of Applied Mechanics, vol. 12, No 1, 1945. Имеется русский перевод в сборнике «Теория пластичности». ГИИЛ, 1948.
6. Ильюшин А. А. Пластичность, ГТТИ, 1948.
7. Мартынова Т. Н. О зависимости между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций для некоторых метастабильных сплавов. Вестник Московского университета, № 12, 1955.