Прикладная математика и механика, Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ И ФУНКЦИЯХ НАПРЯЖЕНИЙ

А. Л. Гольденвейзер
(Москва)

§ 1. В работе считается, что срединная поверхность оболочки отнесена к произвольной системе координат. Используется тензорная символика, основные соотношения теории оболочек берутся в том виде, как они даны в статье [1].

Под a_{jk} и b_{jk} подразумеваются фундаментальный тензор срединной поверхности и тензор ее кривизны. Через c_{jk} обозначен антисимметричный дискриминантный тензор, компоненты которого суть

$$c_{11} = c_{22} = 0, \qquad c_{12} = -c_{21} = \sqrt{a} = \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}$$

В процессе преобразований часто используется формула

$$c_{j\alpha}c^{k\alpha} = a_{j}^{\cdot k}$$

которую легко проверить непосредственно. Мы будем постоянно пользоваться также тем, что при ковариантном дифференцировании a_{jk} и c_{jk} ведут себя как константы.

§ 2. Тензор тангенциальной деформации ε_{jk} и тензор изгибной деформации μ_{jk} выражаются через компоненты упругого смещения v_k, w при помощи формул

$$\varepsilon_{jk} = \nabla_j v_k + b_{jk}w + c_{jk}\delta \tag{2.1}$$

$$\mu_{jk} = \nabla_k(\nabla_j w - b_{\cdot j}^{\alpha} v_\alpha) - c_{\alpha j}b_{\cdot k}^{\alpha}\delta \tag{2.2}$$

где

$$\delta = -\frac{1}{2}c^{\alpha\beta}\nabla_\alpha v_\beta \tag{2.3}$$

Здесь и всюду в дальнейшем ∇ — символ ковариантного дифференцирования.

Тензор моментов M^{jk} и тензор тангенциальных усилий T^{jk} выражаются через функции напряжения ψ_β, χ и η при помощи формул

$$M^{jk} = c^{j\beta}c^{\alpha k}(\nabla_\alpha\psi_\beta + b_{\alpha\beta}\chi) + c^{jk}\eta \tag{2.4}$$

$$T^{jk} = -c^{j\beta}c^{\alpha k}\nabla_\alpha(\nabla_\beta\chi - b_{\cdot\beta}^{\lambda}\psi_\lambda) + c^{\alpha k}b_{\cdot\alpha}^{j}\eta \tag{2.5}$$

Величины ψ_β, χ и η удовлетворяют некоторому дополнительному уравнению, форма которого зависит от того, в каком виде выбираются соотношения упругости. В рамках точности гипотезы о неизменяемости нормального элемента можно это уравнение брать в форме

$$\eta = -\frac{1}{2}c^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\psi_\beta \tag{2.6}$$

Из (2.4) и (2.6) вытекает равенство $M^{jk}c_{jk}=0$, являющееся условием симметрии тензора M^{jk}.

Введя обозначения

$$(T)_{jk}=c_{sj}c_{tk}T^{st}, \qquad (M)_{jk}=c_{jt}c_{sk}M^{st} \tag{2.7}$$

можно (2.4) и (2.5) преобразовать к виду

$$(M)_{jk}=\nabla_j\psi_k+b_{jk}\chi+c_{jk}\eta \tag{2.8}$$

$$(T)_{jk}=\nabla_k(\nabla_j\chi-b_{.j}^{\lambda}\psi_\lambda)-c_{\lambda j}b_{.k}^{\lambda}\eta \tag{2.9}$$

Геометрические соотношения (2.1), (2.2) и (2.3), с одной стороны, и статические соотношения (2.8), (2.9) и (2.6), с другой стороны, имеют тождественную структуру (статико-геометрическая аналогия). Поэтому воспользовавшись идеей В. В. Новожилова [2], помножим каждое из геометрических соотношений на $2Eh\nu$, где

$$\nu=\frac{h}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}} \tag{2.10}$$

а каждое из статических соотношений на i и сложим соответствующие равенства попарно. Тогда, введя обозначения

$$\begin{gathered}E_{jk}=\nu(2Eh\varepsilon_{jk})+i(M)_{jk}, \qquad A_{jk}=\nu(2Eh\mu_{jk})+i(T)_{jk}\\ V_k=\nu(2Ehv_k)+i\psi_k, \qquad W=\nu(2Ehw)+i\chi\\ U=\nu(2Eh\delta)+i\eta\end{gathered} \tag{2.11}$$

получим три комплексных равенства:

$$\begin{gathered}E_{jk}=\nabla_jV_k+b_{jk}W+c_{jk}U\\ A_{jk}=\nabla_k(\nabla_jW-b_{.j}^{\alpha}V_\alpha)-c_{\alpha j}b_{.k}^{\alpha}U, \qquad U=-\tfrac{1}{2}c^{\alpha\beta}\nabla_\alpha V_\beta\end{gathered} \tag{2.12}$$

эквивалентные шести равенствам (2.1)—(2.3) и (2.6), (2.8), (2.9).

§ 3. Тензоры ε_{jk} и μ_{jk} связаны уравнениями неразрывности деформаций, два из которых имеют вид:

$$c^{\alpha\beta}c^{st}b_{s\beta}\mu_{t\alpha}+c^{\alpha\beta}\nabla_\beta\zeta_\alpha=0, \qquad c^{\alpha\beta}\nabla_\beta\varepsilon_{j\alpha}-\zeta_j=0$$

Исключая отсюда ζ_j, получим

$$c^{jn}c^{mk}b_{nm}\mu_{jk}+c^{jn}c^{km}\nabla_n\nabla_m\varepsilon_{jk}=0 \tag{3.1}$$

Тензоры T^{jk} и M^{jk} связаны уравнениями равновесия, два из которых в случае, когда внешняя поверхностная нагрузка нормальна к срединной поверхности, имеют вид

$$b_{s\beta}T^{s\beta}+\nabla_\beta N^\beta=x, \qquad -c_{\alpha i}\nabla_\beta M^{\alpha\beta}+c_{\alpha i}N^\alpha=0$$

(x — интенсивность внешней нагрузки).

Исключив тензор перерезывающих усилий N^α и заменив $T^{s\beta}$ и $M^{\alpha\beta}$ соответственно через $(T)_{jk}$ и $(M)_{jk}$, получим

$$c^{jn}c^{mk}b_{nm}(T)_{jk}+c^{jn}c^{km}\nabla_n\nabla_m(M)_{jk}=-x \tag{3.2}$$

Геометрическое уравнение (3.1) и статическое уравнение (3.2) эквивалентны одному комплексному уравнению

$$c^{jn}c^{mk}b_{nm}A_{jk}+c^{jn}c^{km}\nabla_n\nabla_mE_{jk}=-ix \tag{3.3}$$

§ 4. Введем в рассмотрение соотношения упругости

$$\varepsilon_{jk} = B'(P_{jk\alpha\beta}T^{\alpha\beta} + Q_{jk\alpha\beta}M^{\alpha\beta}) \tag{4.1}$$

$$M^{jk} = D(G^{jk\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta} + H^{jk\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}) \tag{4.2}$$

где

$$B' = \frac{1}{2Eh}, \qquad D = \frac{2Eh}{1-\sigma^2}\frac{h^2}{3} \tag{4.3}$$

Тензоры $P_{jk\alpha\beta}$ и $G^{jk\alpha\beta}$ определяются формулами

$$P_{jk\alpha\beta} = a_{j\alpha}a_{k\beta} - \sigma c_{j\alpha}c_{k\beta}, \qquad G^{jk\alpha\beta} = a^{j\alpha}a^{k\beta} + \sigma c^{j\alpha}c^{k\beta} \tag{4.4}$$

Что касается тензоров $Q_{jk\alpha\beta}$ и $H^{jk\alpha\beta}$, то в рамках теории Кирхгоффа-Лява они определены быть не могут, так как неточности этой теории сказываются на главных частях $Q_{jk\alpha\beta}$ и $H^{jk\alpha\beta}$

Внеся в (4.1), (4.2) выражения (4.4) и выразив $T^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$ через функции напряжения, а $\mu_{\alpha\beta}$ и $\varepsilon_{\alpha\beta}$ через компоненты перемещения, мы можем после некоторых преобразований представить соотношения упругости так:

$$\varepsilon_{jk} = -B'\{(c_{\cdot}^{\cdot\beta}c_{jk}^{\alpha} + \sigma a_{j}^{\cdot\beta}a_{\cdot k}^{\alpha})\nabla_\beta\nabla_\alpha\chi - (Q)_{jk}^{\cdot\cdot\alpha\beta}b_{\alpha\beta}\chi + ({}_1Q)_{jk}^{\cdot\cdot\beta}\psi_\beta + ({}_2Q)_{ik}\eta\} \tag{4.5}$$

$$(M)_{jk} = D\{(c_{j}^{\cdot\beta}c_{\cdot k}^{\alpha} - \sigma a_{j}^{\cdot\beta}a_{\cdot k}^{\alpha})\nabla_\beta\nabla_\alpha w + (H)_{jk}^{\cdot\cdot\alpha\beta}b_{\alpha\beta}w + ({}_1H)_{jk}^{\cdot\cdot\beta}v_\beta + ({}_2H)_{jk}\delta\} \tag{4.6}$$

где

$$(Q)_{jk}^{\cdot\cdot\alpha\beta} = c^{s\beta}c^{\alpha t}Q_{jkst}, \qquad (H)_{jk}^{\cdot\cdot\alpha\beta} = c_{jt}c_{sk}H^{st\alpha\beta}$$

$$({}_1Q)_{jk}^{\cdot\cdot\beta} = -c^{st}(c^{\alpha\beta}Q_{jk\alpha t}\nabla_s + c^{\alpha\lambda}P_{jk\alpha t}\nabla_s b_{\cdot\lambda}^{\beta})$$

$$({}_1H)_{jk}^{\cdot\cdot\beta} = c_{jt}c_{sk}(H^{st\alpha\beta}\nabla_\alpha - G^{st\alpha\lambda}\nabla_\lambda b_{\cdot\alpha}^{\beta})$$

$$({}_2Q)_{jk} = -c^{\alpha\beta}Q_{jk\alpha\beta} + c^{s\beta}b_{\cdot s}^{\alpha}P_{jk\alpha\beta}$$

$$({}_2H)_{jk} = c_{jt}c_{sk}(c_{\alpha\beta}H^{st\alpha\beta} - c_{\nu\alpha}b_{\cdot\beta}^{\nu}G^{st\alpha\beta}) \tag{4.7}$$

Помножив (4.5) на $2Eh\nu$, а (4.6) на i, сложив эти равенства и учитывая (2.10), (2.11), получим

$$\begin{aligned} E_{jk} = i\nu\{&c_{j}^{\cdot\beta}c_{\cdot k}^{\alpha}\nabla_\beta\nabla_\alpha W - \sigma\nabla_j\nabla_k\overline{W} + \tfrac{1}{2}(H)_{jk}^{\cdot\cdot\alpha\beta}b_{\alpha\beta}(W+\overline{W}) - \\ &-\tfrac{1}{2}(Q)_{jk}^{\cdot\cdot\alpha\beta}b_{\alpha\beta}(W-\overline{W}) + \tfrac{1}{2}({}_1H)_{jk}^{\cdot\cdot\beta}(V_\beta+\overline{V}_\beta) + \\ &+\tfrac{1}{2}({}_1Q)_{jk}^{\cdot\cdot\beta}(V_\beta-\overline{V}_\beta) + \tfrac{1}{2}({}_2H)_{jk}(U+\overline{U}) + \tfrac{1}{2}({}_2Q)_{jk}(U-\overline{U})\} \end{aligned} \tag{4.8}$$

(величины, отмеченные черточкой сверху, отличаются от величин, не отмеченных черточкой, знаком при i).

§ 5. В (4.8) тензор E_{jk} можно выразить через U, V_k, W при помощи первого из равенств (2.12). Тогда соотношение (4.8), которое в силу симметрии E_{jk} эквивалентно трем уравнениям, вместе с третьим из равенств (2.12) составит полную систему уравнений теории оболочек в перемещениях и функциях напряжения.

Эти уравнения выводил В. В. Новожилов [3], который назвал их системой уравнений в комплексных перемещениях. В полной мере преимущества этой системы выявляются после некоторых преобразований.

Составим из уравнений (4.8) инвариантную комбинацию, помножив это равенство на $c^{jn}c^{km}\nabla_n\nabla_m$:

$$c^{jn}c^{km}\nabla_n\nabla_m E_{ik} = -i\nu\{a^{\beta n}a^{\alpha m}\nabla_n\nabla_m\nabla_\beta\nabla_\alpha W + \sigma c^{jn}c^{km}\nabla_n\nabla_m\nabla_j\nabla_k\overline{W} -$$
$$-\tfrac{1}{2}c^{jn}c^{km}\nabla_n\nabla_m(H)_{jk}^{\cdot\cdot\alpha\beta}b_{\alpha\beta}(W+\overline{W}) + \tfrac{1}{2}c^{jn}c^{km}\nabla_n\nabla_m(Q)_{jk}^{\cdot\cdot\alpha\beta}b_{\alpha\beta}(W-\overline{W}) -$$
$$-\tfrac{1}{2}c^{jn}c^{km}\nabla_n\nabla_m({}_1H)_{jk}^{\cdot\cdot\beta}(V_\beta+\overline{V}_\beta) - \tfrac{1}{2}c^{jn}c^{km}\nabla_n\nabla_m({}_1Q)_{jk}^{\cdot\cdot\beta}(V_\beta-\overline{V}_\beta) -$$
$$-\tfrac{1}{2}c^{jn}c^{km}\nabla_n\nabla_m({}_2H)_{jk}(U+\overline{U}) - \tfrac{1}{2}c^{jn}c^{km}\nabla_n\nabla_m({}_2Q)_{jk}(U-\overline{U})\} \quad (5.1)$$

При помощи (3.3) и (2.12) левую часть уравнения (5.1) можно преобразовать так:

$$c^{jn}c^{km}\nabla_n\nabla_m E_{jk} = -c^{kn}c^{sj}b_{sn}A_{jk} - ix =$$
$$= -c^{kn}c^{sj}b_{sn}[\nabla_k(\nabla_j W - b_{\cdot j}^{\lambda}V_\lambda) - c_{\lambda j}b_{\cdot k}^{\lambda}U] - ix \quad (5.2)$$

Но

$$c^{kn}c^{sj}b_{sn}c_{\lambda j}b_{\cdot k}^{\lambda} = c^{kn}b_{\lambda n}b_{\cdot k}^{\lambda} = 0$$

так как тензор $b_{\lambda n}b_{\cdot k}^{\lambda}$ симметричен, а тензор c^{kn} антисимметричен.

Кроме того, мы имеем уравнения Кодацци

$$\nabla_2 b_{11} = \nabla_1 b_{12}, \qquad \nabla_1 b_{22} = \nabla_2 b_{21}$$

Пользуясь этим, (5.2) можно преобразовать к виду

$$c^{jn}c^{km}\nabla_n\nabla_m E_{jk} = -c^{kn}c^{sj}\nabla_k b_{sn}\nabla_j W + \nabla_k c^{kn}c^{sj}b_{sn}b_{\cdot j}^{\lambda}V_\lambda - ix \quad (5.3)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что имеет место тождество

$$-\nabla_k c^{kn}c^{sj}b_{sn}b_{\cdot j}^{\lambda}V_\lambda = \nabla_\alpha(KV^\alpha) = K^\alpha V_\alpha + K\nabla^\alpha V_\alpha \quad (5.4)$$

где

$$K = \tfrac{1}{2}c^{st}c^{mn}b_{sm}b_{tn} \quad (K\text{ — гауссова кривизна}), \qquad K_\alpha = \frac{\partial K}{\partial \alpha}$$

Помножив первое из равенств (2.12) на Ka^{jk}, получим после несложных преобразований

$$Ka^{jk}E_{jk} = K\nabla^\alpha V_\alpha - KHW \quad (H = -a^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}\text{ — средняя кривизна поверхности})$$

Отсюда видно, что при помощи (4.8) можно исключить в (5.4) величину $K\nabla^\alpha V_\alpha$; это даст

$$-\nabla_k c^{kn}c^{sj}b_{sn}b_{\cdot j}^{\lambda}V_\lambda = K^\alpha V_\alpha + KHW + i\nu K\{-\Delta W - \sigma\Delta\overline{W} +$$
$$+\tfrac{1}{2}a^{jk}(H)_{jk}^{\cdot\cdot\alpha\beta}b_{\alpha\beta}(W+\overline{W}) - \tfrac{1}{2}a^{jk}(Q)_{jk}^{\cdot\cdot\alpha\beta}b_{\alpha\beta}(W-\overline{W}) + \quad (5.5)$$
$$+\tfrac{1}{2}a^{jk}({}_1H)_{jk}^{\cdot\cdot\beta}(V_\beta+\overline{V}_\beta) + \tfrac{1}{2}a^{jk}({}_1Q)_{jk}^{\cdot\cdot\beta}(V_\beta-\overline{V}_\beta) +$$
$$+\tfrac{1}{2}a^{jk}({}_2H)_{jk}(U+\overline{U}) + \tfrac{1}{2}a^{jk}({}_2Q)_{jk}(U-\overline{U})\}$$

Здесь $\Delta = a^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta$ — обобщенный оператор Лапласа.

§ 6. Воспользовавшись (5.3), (5.5) и заметив, что из теоремы о замене порядка ковариантного дифференцирования вытекают формулы:

$$a^{\beta n}a^{\alpha m}\nabla_n\nabla_m\nabla_\beta\nabla_\alpha = \Delta\Delta - K\Delta - K^\alpha\nabla_\alpha$$

$$c^{\beta n}c^{\alpha m}\nabla_n\nabla_m\nabla_\beta\nabla_\alpha = -K\Delta - K^\alpha\nabla_\alpha$$

уравнение (5.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned}c^{kn}c^{sj}\nabla_k b_{sn}\nabla_j W + KHW + K^\alpha V_\alpha + ix = i\nu\{\Delta\Delta W +\\ + (\tfrac{1}{2}F^{jk}[(H)_{jk}^{\cdot\cdot\alpha\beta} - (Q)_{jk}^{\cdot\cdot\alpha\beta}]\,b_{\alpha\beta} - K^\alpha\nabla_\alpha)W +\\ + (\tfrac{1}{2}F^{jk}[(H)_{jk}^{\cdot\cdot\alpha\beta} + (Q)_{jk}^{\cdot\cdot\alpha\beta}]\,b_{\alpha\beta} - \sigma K^\alpha\nabla_\alpha)\overline{W} +\\ + \tfrac{1}{2}F^{st}[({}_1H)_{st}^{\cdot\cdot\beta} + ({}_1Q)_{st}^{\cdot\cdot\beta}]\,V_\beta + \tfrac{1}{2}F^{st}[({}_1H)_{st}^{\cdot\cdot\beta} - ({}_1Q)_{st}^{\cdot\cdot\beta}]\,\overline{V}_\beta +\\ + \tfrac{1}{2}F^{st}[({}_2H)_{st} + ({}_2Q)_{st}]\,U + \tfrac{1}{2}F^{st}[({}_2H)_{st} - ({}_2Q)_{st}]\,\overline{U}\}\end{aligned} \tag{6.1}$$

где

$$F^{jk} = -c^{jn}c^{km}\nabla_n\nabla_m - Ka^{jk}$$

Равенство (4.8), если в нем раскрыть смысл E_{jk} при помощи первой из формул (2.12), принимает вид:

$$\begin{aligned}\nabla_j V_k + b_{jk}W + c_{jk}U = i\nu\{c_j^{\cdot\beta}c_{\cdot k}^{\alpha}\nabla_\beta\nabla_\alpha W - \sigma\nabla_j\nabla_k\overline{W} +\\ + \tfrac{1}{2}(H)_{jk}^{\cdot\cdot\alpha\beta}b_{\alpha\beta}(W + \overline{W}) - \tfrac{1}{2}(Q)_{jk}^{\cdot\cdot\alpha\beta}b_{\alpha\beta}(W - \overline{W}) +\\ + \tfrac{1}{2}({}_1H)_{jk}^{\cdot\cdot\beta}(V_\beta + \overline{V}_\beta) + \tfrac{1}{2}({}_1Q)_{jk}^{\cdot\cdot\beta}(V_\beta - \overline{V}_\beta) +\\ + \tfrac{1}{2}({}_2H)_{jk}(U + \overline{U}) + \tfrac{1}{2}({}_2Q)_{jk}(U - \overline{U})\}\end{aligned} \tag{6.2}$$

Наконец, мы имеем еще равенство

$$U + \tfrac{1}{2}c^{\alpha\beta}\nabla_\alpha V_\beta = 0 \tag{6.3}$$

Уравнения (6.1) — (6.3) образуют ту систему, обсуждение которой составляет основную цель статьи.

В дальнейшем в уравнении (6.1) будем полагать $x = 0$, т. е. рассматривать только однородную задачу. Переход к случаю $x \neq 0$ на любом этапе рассуждений не представляет никаких затруднений; он может быть выполнен при помощи прибавления слагаемого ix к выражению $c^{kn}c^{sj}\nabla_k b_{sn}\nabla_j W$.

§ 7. Отбросим в каждом из уравнений (6.1), (6.2) слагаемые, зависящие от $Q_{jk\alpha\beta}$ и $H_{jk\alpha\beta}$, а также члены, подобные этим слагаемым (входящие в те же уравнения, содержащие те же неизвестные, те же степени ν и символы дифференцирования того же порядка).

В результате рассматриваемая система примет вид:

$$c^{kn}c^{sj}\nabla_k b_{sn}\nabla_j W + KHW + K^\alpha V_\alpha = i\nu\Delta\Delta W \tag{7.1.1}$$

$$\nabla_j V_k + b_{jk}W + c_{jk}U = i\nu\{c_j^{\cdot\beta}c_{\cdot k}^{\alpha}\nabla_\beta\nabla_\alpha W - \sigma\nabla_j\nabla_k\overline{W}\} \tag{7.1.2}$$

$$U + \tfrac{1}{2}c^{\alpha\beta}\nabla_\alpha V_\beta = 0 \tag{7.1.3}$$

Переход от (6.1)—(6.3) к (7.1) сводится к тому, что среди членов, которые множатся на ν, отбрасываются члены, содержащие производные от W и U порядка ниже $n-1$ и производные от V_α порядка ниже n по сравнению с членами, содержащими производные от W порядка n. Подобные слагаемые и в дальнейшем можно отбрасывать, или, если это выгодно, добавлять.

Пусть v_k^*, w^* — компоненты смещения, соответствующие перемещению оболочки как жесткого целого, а ψ_k^*, χ^* — функции напряжения, соответствующие нулевым усилиям и моментам. Составив по формулам (2.11) U^*, V_k^*, W^*, мы получим комплексные функции, которые удовлетворяют следующим уравнениям:

$$E_{jk} \equiv \nabla_j V_k + b_{jk} W + c_{jk} U = 0 \tag{7.2}$$

$$A_{jk} \equiv \nabla_k (\nabla_j W - b^{\alpha}_{.j} V_\alpha) - c_{\alpha j} b^{\alpha}_{.k} U = 0 \tag{7.3}$$

Будет выполняться и уравнение

$$c^{kn} c^{sj} \nabla_k b_{sn} \nabla_j W + KHW + K^\alpha V_\alpha = 0$$

левая часть которого составлена из выражений A_{jk} и E_{jk}.

Таким образом, левые части уравнений (7.1) обратятся в нули, в то время как правые части будут отличны от нуля.

Мы приходим к формальному противоречию такого же порядка, как, например, невыполнение шестого уравнения равновесия (в малых слагаемых), которое может иметь место при решении задачи теории оболочек в перемещениях, если произвольно отбрасывать члены, содержащие $Q_{jk\alpha\beta}$ и $H^{jk\alpha\beta}$. Это противоречие можно устранить, заменив в правых частях (7.1) выражение $\nabla_k \nabla_j W$ на выражение A_{jk}. Эту операцию мы будем записывать так:

$$\nabla_k \nabla_j W \to \nabla_k (\nabla_j W - b^{\alpha}_{.j} V_\alpha) - c_{\alpha j} b^{\alpha}_{.k} U \tag{7.4}$$

(замена законна, так как мы добавляем производные от U порядка $n-2$ и производные от V_k порядка $n-1$).

К вопросу о том, в каких случаях следует прибегать к уточнению правых частей уравнений (7.1) при помощи замены (7.4), мы вернемся в § 10, а пока ограничимся замечанием, что правую часть соотношения (7.4) можно различным образом преобразовывать при помощи уравнений (7.2) и (7.3). Например, исключив в (7.4) $\nabla_k V_\alpha$ при помощи (7.2), получим

$$\nabla_k \nabla_j W \to \nabla_k \nabla_j W - (\nabla_k b^{\alpha}_{.j}) V_\alpha + b^{\alpha}_{.j} b_{k\alpha} W \tag{7.5}$$

§ 8. Приступая к обзору возможных применений полученных уравнений, заметим прежде всего, что левые части уравнений (7.1) составлены точно, поэтому, отбросив все члены, содержащие множитель ν, получим точные уравнения безмоментной теории в перемещениях и функциях напряжения:

$$c^{kn} c^{sj} \nabla_k b_{sn} \nabla_j W + KHW + K^\alpha V_\alpha = 0$$

$$\nabla_j V_k + b_{jk} W + c_{jk} U = 0, \qquad U + \tfrac{1}{2} c^{\alpha\beta} \nabla_\alpha V_\beta = 0$$

Равенства, которые получаются, если приравнять нулю коэффициенты при мнимых частях выписанных выражений, эквивалентны уравнениям равновесия безмоментной теории; приравняв нулю действительные части этих выражений, получим уравнения бесконечно малых изгибаний срединной поверхности.

Обратимся теперь к оболочкам, описанным по произвольной поверхности постоянной кривизны. При $K = \mathrm{const}$ система (7.1) распадается. Первое из уравнений этой системы принимает вид:

$$c^{kn}c^{sj}\nabla_k b_{sn}\nabla_j W + KHW = i\nu\Delta\Delta W$$

и определение W выделяется в самостоятельную задачу.

Мы получаем обобщение на случай произвольного постоянного K известного уравнения

$$c^{kn}c^{sj}\nabla_k b_{sn}\nabla_j W = i\nu\Delta\Delta W$$

неоднократно использсванного при расчете оболочек нулевой кривизны (см., например, [4]).

Для оболочек произвольного очертания также можно исключить из системы (7.1) неизвестные U, V_α и получить самостоятельное уравнение для определения W. Запишем (7.1.1) так:

$$L(W) - i\nu\Delta\Delta W + K^\alpha V_\alpha = 0 \tag{8.1}$$

где

$$L(W) = c^{kn}c^{sj}\nabla_k b_{sn}\nabla_j W + KHW$$

а в (7.1.2) исключим U при помощи (7.1.3) и запишем это уравнение в виде трех равенств:

$$\nabla_1 V_1 + b_{11}W = L_{11}(W) \tag{8.2}$$

$$\frac{1}{2}(\nabla_1 V_2 + \nabla_2 V_1) + b_{12}W = L_{12}(W) \tag{8.3}$$

$$\nabla_2 V_2 + b_{22}W = L_{22}(W) \tag{8.4}$$

где

$$L_{jk} = i\nu\{c_j^{\cdot\beta} c_{\cdot k}^{\alpha}\nabla_\beta\nabla_\alpha W - \sigma\nabla_j\nabla_k\bar{W}\}$$

Помножив обе части равенства (8.1) на $^1/_2(\Delta_1\Delta_2 + \Delta_2\Delta_1)$ и выполнив преобразования, получим

$$\begin{aligned} &K^1\nabla_2\nabla_1 V_1 + K^2\nabla_1\nabla_2 V_2 + (\nabla_2 K^1)\nabla_1 V_1 + (\nabla_1 K^1)\nabla_2 V_1 + (\nabla_2 K^2)\nabla_1 V_2 + \\ &+ (\nabla_1 K^2)\nabla_2 V_2 + [(\nabla_1\nabla_2 K^1) - a_{12}KK^1]V_1 + [(\nabla_2\nabla_1 K^2) - a_{21}KK^2]V_2 + \\ &+ \frac{1}{2}(\nabla_1\nabla_2 + \nabla_2\nabla_1)[L(W) - i\nu\Delta\Delta W] = 0 \end{aligned} \tag{8.5}$$

Кроме того, помножив обе части равенства (8.1) на ∇_j, будем иметь

$$K^\alpha\nabla_j V_\alpha + (\nabla_j K^\alpha)V_\alpha + \nabla_j[L(W) - i\nu\Delta\Delta W] = 0 \tag{8.6}$$

В уравнениях (8.5), (8.6) величины $\nabla_2\nabla_1 V_1$, $\nabla_1\nabla_2 V_2$, $\nabla_1 V_1$, $\nabla_2 V_2$ можно исключить при помощи равенств (8.2), (8.4). Тогда уравнение (8.5), два уравнения (8.6), уравнение (8.3) и уравнение (8.1) составят систему из пяти линейных алгебраических уравнений относительно четырех величин $\nabla_2 V_1$, $\nabla_1 V_2$, V_1, V_2. Исключив их, получим искомое дифференциальное уравнение относительно W:

$$\begin{vmatrix} (\nabla_1 K^1) & (\nabla_2 K^2) & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ 0 & K^2 & (\nabla_1 K^1) & (\nabla_1 K^2) & A_{25} \\ K^1 & 0 & (\nabla_2 K^1) & (\nabla_2 K^2) & A_{35} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & b_{12}W \\ 0 & 0 & K^1 & K^2 & L(W) \end{vmatrix} = 0 \tag{8.7}$$

Здесь

$$A_{13} = (\nabla_1\nabla_2 K^1) - a_{12}KK^1, \quad A_{14} = (\nabla_2\nabla_1 K^2) - a_{21}KK^2$$
$$A_{15} = \frac{1}{2}(\nabla_1\nabla_2 + \nabla_2\nabla_1)[(L(W) - i\nu\Delta\Delta W)] - (\nabla_2 K^1 b_{11} + \nabla_1 K^2 b_{22})W$$
$$A_{25} = \nabla_1[L(W) - i\nu\Delta\Delta W] - K^1 b_{11} W$$
$$A_{35} = \nabla_2[L(W) - i\nu\Delta\Delta W] - K^2 b_{22} W$$

Среди членов, содержащих множитель ν, достаточно оставлять только те, в которые входят производные от W двух самых высоких порядков (см. § 7); в соответствии с этим в последнем столбце определителя отброшены слагаемые, не оказывающие влияния на упомянутые члены.

Насколько известно автору, система уравнений оболочки произвольного очертания сведена к одному уравнению впервые. Надо заметить, что полученное уравнение имеет порядок, равный шести, и остается открытым вопрос о возможности получить разрешающие уравнения четвертого порядка.

§ 9. Рассмотрим вопрос о применении уравнений (7.1) к приближенному построению напряженных состояний с положительным показателем изменяемости. Под этим подразумеваются напряженные состояния, в которых

$$\nabla_j P \approx \varkappa P, \quad \varkappa = h^{-t} \tag{9.1}$$

Здесь P — любое из неизвестных U, V_α, W или какая-либо из их частных производных, $\approx$ — знак соизмеримости (в случае, когда $\nabla_1 P$ и $\nabla_2 P$ — величины разных порядков, учитывается только наибольшая из этих двух величин), $t > 0$ показатель изменяемости.

Будем предполагать, что кривизны срединной поверхности не слишком велики и что на всей срединной поверхности или на достаточно большой ее части установлена координация, в которой

$$a_{jk} \approx b_{jk} \approx 1 \tag{9.2}$$

а следовательно,

$$K \approx H \approx 1$$

(Соизмеримость тензора с числом устанавливается по наибольшей абсолютной величине его компонент; принимается, что масштаб длин фиксирован, например равен одному из размеров срединной поверхности оболочки, и поэтому геометрические величины рассматриваются как безразмерные.)

В монографии[5] (гл. 14) было показано, что при не слишком больших t (при $t < 1$)

$$\nabla_j v_k \approx \delta \approx w$$

Отсюда, пользуясь статико-геометрической аналогией, заключаем, что

$$\nabla_j \psi_k \approx \eta \approx \chi$$

а следовательно,

$$\nabla_j V_\alpha \approx U \approx W$$

(подразумевается соизмеримость в отдельности действительных и мнимых частей выписанных величин).

На основании изложенного получаем следующие оценки:

$$c^{kn}c^{sj}\nabla_k b_{sn}\nabla_j W \approx \varkappa^2 W, \quad KHW \approx W, \quad K^\alpha V_\alpha \approx \varkappa^{-1} W$$

из которых вытекает, что если на срединной поверхности оболочки установлена метрика (9.2) и построению подлежит напряженное состояние с положительным показателем изменяемости, то с точностью до величин порядка $\varkappa^{-2}$ по сравнению с единицей уравнение (7.1.1) можно брать в виде

$$c^{kn}c^{sj}\nabla_k b_{sn}\nabla_j W = i\nu\triangle\triangle W \tag{9.3.1}$$

а с точностью до величин порядка $\varkappa^{-3}$ по сравнению с единицей в виде

$$c^{kn}c^{sj}\nabla_k b_{sn}\nabla_j W + KHW = i\nu\triangle\triangle W \tag{9.3.2}$$

[В этом параграфе не принимаются в расчет погрешности, которые содержатся в самих уравнениях (7.1)].

Для дальнейшего повышения точности можно воспользоваться уравнением (8.5). Если в нем пренебречь членами порядка $\varkappa^{-4}$ по сравнению с единицей, то после преобразований, основанных на использовании уравнений (8.2) и (8.4), получим

$$\nabla_1\nabla_2\,[c^{kn}c^{sj}\nabla_k b_{sn}\nabla_j W + KHW] - K^1 b_{11}\nabla_2 W - K^2 b_{22}\nabla_1 W = i\nu\nabla_1\nabla_2\triangle\triangle W \tag{9.3.3}$$

Уравнение (9.3.1) было предложено для исследования напряженных состояний с большим показателем изменяемости в работах [1,6], уравнения (9.3.2) и (9.3.3) — уточнения этого уравнения. Можно, конечно, получить и еще более точные варианты. В частности, «абсолютно точным» будет уравнение (8.7).

§ **10.** Обратимся к исследованию погрешностей системы (7.1). Они зависят от свойств рассматриваемого напряженного состояния. Поэтому уточним постановку задачи, перечислив те напряженные состояния, которые будут в дальнейшем обсуждаться.

1. Безмоментное напряженное состояние. В нем расчетными являются напряжения от тангенциальных усилий, приближенное определение которых сводится к интегрированию уравнений равновесия безмоментной теории:

$$c^{kn}c^{sj}\nabla_k b_{sn}\nabla_j\chi + KH\chi + K^\alpha\psi_\alpha = 0$$
$$\nabla_j\psi_k + b_{jk}\chi + c_{jk}\eta = 0$$

2. Чисто моментное напряженное состояние. В нем расчетными являются напряжения от моментов, приближенное определение которых сводится к интегрированию уравнений изгибания срединной поверхности:

$$c^{kn}c^{sj}\nabla_k b_{sn}\nabla_j w + KHw + K^\alpha v_\alpha = 0$$
$$\nabla_j v_k + b_{jk}w + c_{jk}\delta = 0$$

3. Краевой эффект. В нем расчетными являются напряжения от тангенциальных усилий и моментов, причем приближенное определение тех и других сводится к интегрированию уравнений

$$c^{kn}c^{sj}\nabla_k b_{sn}\nabla_j\,(2Ehw) = -\Delta\Delta\chi$$
$$c^{kn}c^{sj}\nabla_k b_{sn}\nabla_j\chi = \nu^2\Delta\Delta(2Ehw)$$

Методами, изложенными в монографии [5] (гл. 14), можно показать, что для всех перечисленных выше напряженных состояний имеют место соотношения

$$\chi \approx \varkappa\psi_\alpha, \quad w \approx \varkappa v_\alpha \tag{10.1}$$

а связь между χ и w устанавливается для безмоментного, чисто моментного напряженных состояний и краевого эффекта соответственно следующими формулами:

$$\chi \approx \varkappa^{-2}(2Ehw) \qquad (10.2.1)$$

$$\chi \approx h^2\varkappa^2(2Ehw) \qquad (10.2.2)$$

$$\chi \approx h(2Ehw) \qquad (10.2.3)$$

Рассмотрим уравнение (7.1.1). Расшифруем в нем V_α и W по формулам (2.11) и перейдем от одного комплексного уравнения к системе двух действительных уравнений:

$$c^{kn}c^{sj}\nabla_k b_{sn}\nabla_j(2Ehw) + KH(2Ehw) + K^\alpha(2Ehv_\alpha) = -\Delta\Delta\chi \qquad (10.3.1)$$

$$c^{kn}c^{sj}\nabla_k b_{sn}\nabla_j\chi + KH\chi + K^\alpha\psi_\alpha = \nu^2\Delta\Delta(2Fhw) \qquad (10.3.2)$$

где

$$\nu^2 = \frac{h^2}{3(1-\sigma^2)} \approx h^2$$

Пусть определению подлежит безмоментное напряженное состояние. Тогда в системе (10.3) основным будет уравнение (10.3.2), так как из него отбрасыванием правой части получается первое из уравнений равновесия безмоментной теории. Слагаемые, входящие в первый член левой части уравнения (10.3.2), оцениваются соотношением

$$c^{kn}c^{sj}\nabla_k b_{sn}\nabla_j\chi \approx \varkappa^2\chi \quad (\text{не суммировать по } k,\ j,\ s,\ n!)$$

Вместе с тем слагаемые, которые были отброшены в правой части (10.3.2), содержат множитель ν^2 и производные от w второго порядка (см. § 7); следовательно, они соизмеримы с $h^2\varkappa^2(2Ehw)$ или в силу (10.2.1) с $h^2\varkappa^4\chi$.

Итак, при определении безмоментного напряженного состояния мы должны считать, что система (10.3), а следовательно, и порождающее ее комплексное уравнение (7.1.1) составлены с точностью до величин порядка $h^2\varkappa^2$ по сравнению с единицей. Аналогично доказывается, что и при определении чисто моментного напряженного состояния надо считать, что уравнение (7.1.1) составлено с той же погрешностью.

Отсюда вытекает, что если при определении безмоментного или чисто моментного напряженных состояний левая часть уравнения (9.3) будет составлена с точностью до величин порядка $\varkappa^{-(n+1)}$ по сравнению с единицей, то эта точность имеет реальную ценность только до тех пор, пока наименьший из членов, сохраняемых в левой части, остается больше членов, отброшенных в правой части уравнения (7.1), т. е. только при

$$\varkappa^{-n} > h^2\varkappa^2$$

Отсюда, помня, что $\varkappa = h^{-t}$, выводим

$$t < \frac{2}{2+n}$$

Таким образом, при построении безмоментного и чисто моментного напряженных состояний применение уравнения (9.3.2) оправдано, только пока $t < {}^1/_2$, а применение уравнения (9.3.3) — только пока $t < {}^2/_5$ и т. д.

При помощи более тонкого анализа, на котором мы не останавливаемся, можно показать, что при определении краевого эффекта надо считать, что уравнение (7.1.1) составлено с точностью до величин порядка $\varkappa^2$ по сравнению с единицей[1]. Это значит, что если определению подлежит краевой эффект, то правую и левую части уравнения (9.3.1) надо считать составленными с адекватной погрешностью ($\varkappa^2$ по сравнению с единицей), и уточнение, заключающееся в переходе к (9.3.2) или (9.3.3), является кажущимся. Погрешность системы (7.1) в этом случае возрастает с убыванием $\varkappa$ и становится сколь угодно большой при $\varkappa \approx 1$, т. е. при $t = 0$.

Обобщенный краевой эффект, связанный с асимптотической линией срединной поверхности, может иметь показатель изменяемости, равный нулю; в этом случае мы называем его выродившимся. Полученный выше результат сводится к тому, что система (7.1) не пригодна для построения выродившихся краевых эффектов; она должна быть исправлена при помощи замен вида (7.4) или (7.5), устраняющих формальные противоречия.

Заметим, что расчет выродившихся краевых эффектов всегда требует особой осторожности в отбрасывании малых членов. Теория цилиндрических оболочек В. З. Власова [7] в сущности посвящена приближенному исследованию вырожденных краевых эффектов, и, как известно, она может быть построена только при условии, что шестое уравнение равновесия не будет нарушаться даже в членах, которые в рамках теории Кирхгоффа-Лява не должны были бы учитываться.

Существуют и другие, сходные с выродившимся краевым эффектом напряженные состояния (особые — по терминологии монографии [5]), для которых система (7.1) непригодна.

Замечание. В этом параграфе речь шла о погрешностях, допущенных при составлении тех или иных уравнений. Погрешности интегралов этих уравнений могут, конечно, быть и выше.

§ 11. Рассмотрим теперь пологие оболочки. Оболочку будем называть пологой в том случае, если на всей ее срединной поверхности можно установить систему криволинейных координат, в которой

$$a_{jk} \approx c_{jk} \approx 1, \quad b_{jk} \approx b^\circ \ll 1 \qquad (11.1)$$

Для пояснения этого определения обратимся к оболочке, срединная поверхность которой есть часть параболоида

$$z = z_0 + \frac{r}{2} x^2 + \frac{t}{2} y^2 \qquad (z_0,\ r,\ t \text{ — константы})$$

содержащая вершину.

Приняв x, y за параметры криволинейной системы координат, получим первую и вторую квадратичные формы поверхности:

$$\mathrm{I} = (1 + r^2x^2)\, dx^2 + 2rtxy\, dx\, dy + (1 + t^2y^2)\, dy^2$$

$$\mathrm{II} = -\frac{r\, dx^2 + t\, dy^2}{\sqrt{1 + r^2x^2 + t^2y^2}}$$

и формулы для кривизны срединной поверхности

$$K = \frac{rt}{(1 + r^2x^2 + t^2y^2)^2}, \quad H = -\frac{(1 + r^2x^2)\, t + (1 + t^2y^2)\, r}{(1 + r^2x^2 + t^2y^2)^{3/2}}$$
$$\frac{\partial K}{\partial x} = -\frac{4r^3tx}{(1 + r^2x^2 + t^2y^2)^3}, \quad \frac{\partial K}{\partial y} = -\frac{4rt^3y}{(1 + r^2x^2 + t^2y^2)^3} \qquad (11.2)$$

[1] Такая погрешность сохраняется и в том случае, когда исследованию подлежат напряженные состояния с показателем изменяемости, бо́льшим $1/2$, т. е. изгибное и тангенциальное напряженные состояния по терминологии монографии [5].

Если за единицу измерения принять наибольший размер проекции срединной поверхности оболочки на плоскость oxy, то наибольшая из абсолютных величин (x, y) будет соизмерима с единицей. Учитывая это, нетрудно убедиться, что оболочка будет пологой, если $(r, t) \ll 1$, и тогда будут выполняться соотношения (11.1).

Всегда будет считаться, что на срединной поверхности пологой оболочки криволинейные координаты выбраны так, что имеет место соотношение (11.1). Кроме того, на основании аналогии с формулами (11.2) примем, что

$$K \approx b^{\circ 2}, \quad H \approx b^{\circ}, \quad K^{\alpha} \approx b^{\circ 4}$$

Случай, когда одна из величин r, t точно или приближенно равна нулю, т. е. когда оболочка цилиндрическая или почти цилиндрическая, здесь не затрагивается; его можно рассмотреть при помощи результатов § 8.

Поделим обе части равенства (7.1.1) на b_0 и, расшифровав ν по формуле (2.10), напишем

$$c^{kn}c^{sj}\nabla \frac{b_{sn}}{b^{\circ}}\nabla_j W + \frac{1}{b^{\circ}} KHW + \frac{K^{\alpha}}{b^{\circ}} V_{\alpha} = i\sqrt{\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)b^{\circ 2}}}\,\triangle\triangle W \quad (11.3)$$

Так как $b_{sn}/b_0 \approx 1$, то основное ядро этого уравнения (первые члены правой и левой частей) будет таким же, как и в случае оболочки среднего подъема (§ 8), только роль h будет играть h°, равное h/b°. Это позволяет рассмотреть вопрос о пологих оболочках описанными выше методами, в связи с чем мы сократим аргументацию последующих утверждений.

Пользуясь тем, что величины KH/b° и K^{α}/b° малы по сравнению с единицей, (11.3) можно заменить приближенными уравнениями

$$c^{kn}c^{sj}\nabla_k \frac{b_{sn}}{b_0}\nabla_j W = i\sqrt{\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)b^{\circ 2}}}\,\triangle\triangle W \quad (11.4)$$

или

$$c^{kn}c^{sj}\nabla_k \frac{b_{sn}}{b^{\circ}}\nabla_j W + \frac{1}{b^{\circ}} KHW = i\sqrt{\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)b^{\circ 2}}}\,\triangle\triangle W \quad (11.5)$$

Уравнение (11.4) было положено В. З. Власовым в основу предложенной им теории пологих оболочек [8]; (11.5) представляет собой уточнение уравнения (11.4). Исходя из уравнения (8.7), можно достигнуть и дальнейших уточнений.

Левые части уравнений (11.4) и (11.5) составлены соответственно с точностью до величин порядка $(b^{\circ}\varkappa^{-1})^2$ и $(b^{\circ}\varkappa^{-1})^3$ по сравнению с единицей. Погрешности правых частей этих уравнений зависят от характера рассматриваемого напряженного состояния. При исследовании безмоментного и чисто моментного напряженных состояний надо считать, что правые части (11.4) и (11.5) составлены с точностью до величин порядка $h^{\circ 2}\varkappa^2 b^{\circ 2}$ по сравнению с единицей. При исследовании краевых эффектов следует считать, что правые части (11.4) и (11.5) составлены с точностью до величин порядка $(b^{0}\varkappa^{-1})^2$. Отсюда вытекает, что переход от (11.4) к (11.5) дает реальное уточнение только при построении безмоментного и чисто моментного напряженнных состояний.

Изложенные результаты позволяют сделать некоторые заключения о возможных приближенных методах расчета пологих оболочек.

Первый из этих методов заключается в расчете пологих оболочек при помощи расчленения полного напряженного состояния на безмоментное и чисто моментное напряженные состояния и краевой эффект, т. е. в использовании безмоментной теории и приближенной теории простого краевого эффекта. Применение этого метода возможно в том случае, когда выполняются все условия применимости безмоментной теории, сформулированные в монографии [5]. В частности, надо требовать, чтобы не выходили из определенных пределов ε — асимптотические погрешности безмоментной теории. Данные в [5] формулы для ε в применении к пологим оболочкам приобретают вид:

$$\varepsilon = h^{\circ 2-6t'} = \varkappa^6 h^{\circ 2} \quad (K \neq 0), \qquad \varepsilon = h^{\circ 2-8t'} = \varkappa^8 h^{\circ 2} \qquad (K = 0)$$

(здесь t' — приведенный показатель изменяемости, определяется формулой $\varkappa = h^{\circ -t'}$). Мы видим, что в пологих оболочках при уменьшении b° увеличивается h°, а вместе с ним увеличиваются и погрешности безмоментной теории. При $b^\circ \approx h$ безмоментная теория становится неприемлемой.

Второй метод заключается в использовании (11.4). Область его применения определяется требованием, чтобы $b^{\circ 2}\varkappa^{-2}$ было достаточно мало.

Третий метод заключается в использовании уравнения (11.5). Его целесообразно применять в тех случаях, когда оказываются неприемлемыми первые два метода (оболочки средней пологости или оболочки малой пологости, не поддающиеся расчету по безмоментной теории).

По поводу третьего метода расчета сделаем два замечания.

1. При расчете оболочки по второму методу можно считать, что на ее срединной поверхности установлена эвклидова метрика, так как при выводе уравнения (11.4) гауссова кривизна K считалась пренебрежимо малой. При расчете оболочек по третьему методу этого делать уже нельзя, так как при выводе (11.5) мы считали малой только величину K^α.

2. При расчете оболочек по третьему методу краевые эффекты, как указывалось выше, будут определены с той же точностью, что и по второму. Это, однако, не обесценивает уравнения (11.5). Дело в том, что для краевых эффектов, как правило, значение $\varkappa$ будет больше, чем для безмоментного и чисто моментного напряженных состояний, а так как погрешности уравнения (11.4) возрастают с убыванием $\varkappa$, то уточнения коснутся именно тех величин, которые в этом нуждаются больше других.

§ 12. Для удобства сопоставления расшифруем уравнения (7.1), считая, что срединная поверхность оболочки отнесена к произвольной ортогональной (вообще, не сопряженной) системе координат и, пользуясь обозначениями монографии [5].

Уравнение (7.1.1) эквивалентно одному уравнению

$$\frac{1}{AB}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{A}\frac{1}{R_2'}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{R_{12}}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{R_{12}}\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{B}\frac{1}{R_1'}\frac{\partial}{\partial\beta}\right\}W+$$

$$+KHW+\frac{1}{A}\frac{\partial K}{\partial\alpha}\frac{V_1}{A}+\frac{1}{B}\frac{\partial K}{\partial\beta}\frac{V_2}{B}=i\frac{h}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}\Delta\Delta W$$

$$\left(\Delta=\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)$$

Уравнение (7.1.2) эквивалентно трем уравнениям

$$\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{V_1}{A}\right)-\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{V_2}{B}-\frac{W}{R_1'}=i\frac{h}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}\left[-\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\frac{\partial W}{\partial\beta}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{A^2B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial W}{\partial\alpha}-\sigma\left(\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{A}\frac{\partial\overline{W}}{\partial\alpha}+\frac{1}{AB^2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial\overline{W}}{\partial\beta}\right)\right]$$

$$\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{B}\frac{V_2}{B}\right)+\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{A}\frac{V_1}{A}\right)+\frac{W}{R_{12}}+U=i\frac{h}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}\frac{2(1-\sigma)}{AB}\left(\frac{\partial^2W}{\partial\alpha\,\partial\beta}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial W}{\partial\beta}-\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial W}{\partial\alpha}\right)$$

$$\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{V_2}{B}\right)-\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{V_1}{A}-\frac{W}{R_2'}=i\frac{h}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}\left[-\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{A}\frac{\partial W}{\partial\alpha}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{AB^2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial W}{\partial\beta}-\sigma\left(\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\frac{\partial\overline{W}}{\partial\beta}+\frac{1}{A^2B}\frac{\partial B}{\partial\beta}\frac{\partial\overline{W}}{\partial\alpha}\right)\right]$$

Уравнение (7.1.3) эквивалентно одному уравнению

$$U+\frac{1}{2}\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(B\frac{V_2}{B}\right)-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(A\frac{V_1}{A}\right)\right]=0$$

В этих уравнениях

$$W=\frac{h}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}(2Ehw)+ic,\qquad U=\frac{h}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}(2Eh\delta)+i\nu$$

$$\frac{V_1}{A}=\frac{h}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}(2Ehu)+ia,\qquad \frac{V_2}{B}=\frac{h}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}(2Ehv)+ib$$

u, v, w — компоненты смещения, δ — угол поворота (вокруг нормали) a, b, c, ν — функции напряжения.

Усилия, моменты и компоненты деформации определяются через u, v, w, a, b, c, ν по известным формулам, которые можно найти, например, в монографии [5].

Поступила 15 IV 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Качественное исследование напряженного состояния тонкой оболочки. ПММ, т. XI, вып. 6, 1945.
2. Новожилов В. В., Новый метод расчета тонких оболочек. Изв. АН СССР, ОТН, № 1, 1946.
3. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1951.
4. Лурье А. И. Концентрация напряжений в области отверстия на поверхности кругового цилиндра. ПММ, т. X, вып. 3, 1946.
5. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. ГИТТЛ, 1953.
6. Работнов Ю. Н. Уравнения пограничной зоны в теории оболочек. ДАН СССР, т. XLVII, № 5, 1945.
7. Власов В. З. Строительная механика оболочек. ОНТИ, Стройиздат, 1936.
8. Власов В. З. Основные дифференциальные уравнения общей теории оболочек. ПММ, т. VIII, вып. 2, 1944.