

К РАСПРОСТРАНЕНИЮ ВОЛН В РЕЗИНЕ

Н. Кристеску

(Бухарест)

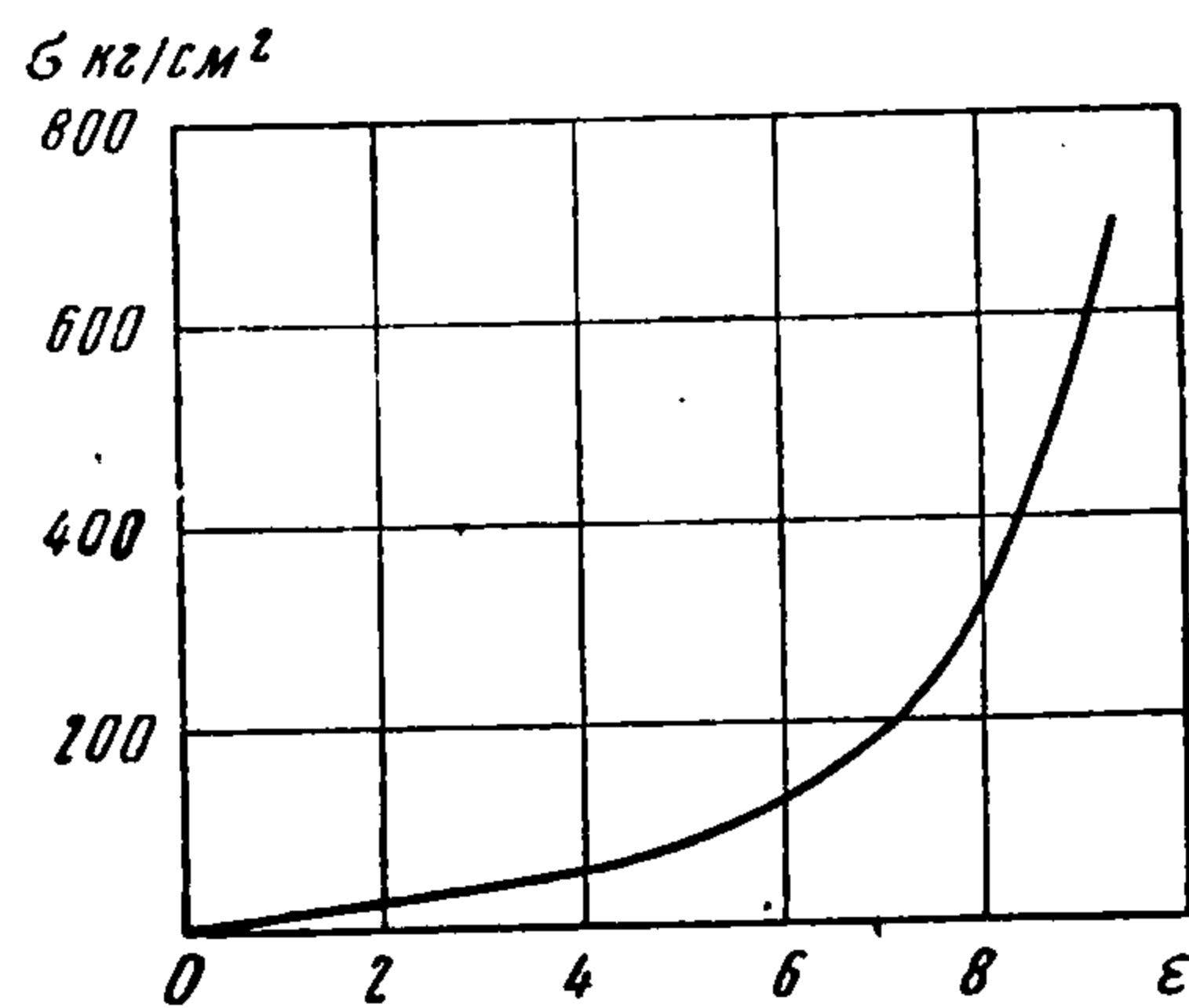
Известно, что в резине и вообще в других высоких полимерах деформации могут быть большими, при этом диаграмма $\sigma \sim \epsilon$ обращена вогнутостью к оси напряжений. Ряд авторов (В. С. Ленский и М. А. Тарасова [1], Г. Кольский [2]) обратили внимание на то, что в таких материалах волны с меньшими значениями амплитуды деформаций распространяются медленнее и, следовательно, возможно появление ударных волн. В. С. Ленский и М. А. Тарасова [1] обратили внимание на то, что ударные волны в резиновом брусе (или нити) могут возникнуть даже в случае монотонной нагрузки на конце бруса (или нити). В дальнейшем мы ставим себе задачу исследовать этот вопрос.

Рассмотрим резиновый брус (или нить), который растягивается статически до определенной деформации и потом загружается динамической монотонной нагрузкой. Начальная статическая деформация может быть сколько угодно большой, однако динамическая деформация достаточно мала, так что можно использовать обыкновенную теорию распространения волн и пренебречь влиянием скорости деформации. Задаваясь различными начальными статическими деформациями, рассмотрим особенности появляющихся в результате динамической деформации волн. Предположим, что длина бруса достаточно велика, так что можно не рассматривать вопрос об отражении волн. Рассмотрим диаграммы $\sigma - \epsilon$ двух типов: диаграмму, в которой вогнутость кривой направлена лишь в сторону положительных напряжений, и другую, в которой вогнутость вначале направлена в сторону оси ϵ , а впоследствии изменяется (кривая $\sigma - \epsilon$ имеет S-образный вид). С этими двумя типами кривых $\sigma - \epsilon$ приходится иметь дело в случае резинового бруса.

§ 1. Выберем начало координат в конце бруса и предположим, что лагранжева координата возрастает в его направлении. Рассмотрим сначала случай вулканизированной резины, для которой квазистатическое соотношение между напряжением и деформацией, предложенное Р. Ариано (см. Г. С. Израелит [3], стр. 55), имеет вид

$$\sigma = -\frac{a\epsilon}{\epsilon - b} \quad (1.1)$$

Здесь a и b — положительные постоянные, свойственные материалу, ϵ — относительная деформация, а σ — напряжение (условное или истинное). Постоянная b является пределом относительного удлинения, т. е. при $\epsilon \rightarrow b$ напряжение стремится к бесконечности, а постоянная a характеризует начальное сопротивление резины деформации. Значения этих постоянных зависят от состава смеси и режима вулканизации. Кривая $\sigma \sim \epsilon$, соответствующая (1.1), обращена вогнутостью в сторону оси поло-



Фиг. 1

жительных напряжений. На фиг. 1 изображена графически функция (1.1) для $a = 854$ и $b = 10.33$. Эти значения постоянных соответствуют резине, составленной из 100 частей натурального каучука и 8 частей серы, вулканизированной в течение 40 мин. при 143°C [3]. Уравнение распространения плоских волн имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c(\varepsilon) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \left(c(\varepsilon) = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}}, \quad E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right) \quad (1.2)$$

где u — перемещение, ρ_0 — начальная плотность, $c(\varepsilon)$ — местная скорость распространения волн, а E — местный модуль упругости.

Характеристики и дифференциальные зависимости на этих характеристиках, учитывая (1.1), имеют вид [4]:

$$dx = -\sqrt{\frac{ab}{\rho_0}} \frac{dt}{\varepsilon - b}, \quad v = \int^\varepsilon c(\varepsilon) d\varepsilon + \text{const} \quad (1.3)$$

В первой зависимости (1.3) знак соответствует прямым волнам. Во второй зависимости (1.3) $v = \partial u / \partial t$ — скорость частицы.

Фронты прямых волн, на которых $\varepsilon = \text{const}$, следовательно, являются прямыми линиями:

$$x = -\sqrt{\frac{ab}{\rho_0}} \frac{t - \tau}{\varepsilon - b} \quad (1.4)$$

где τ — параметр, имеющий размерность времени.

В качестве примера зададим закон изменения деформации на конце бруса в виде

$$\varepsilon = \lambda \tau \quad (1.5)$$

где λ — положительный параметр.

Фронт волны, возникающей в момент $t = \tau$ на конце бруса, на которой деформация постоянна, описывается уравнением

$$x = -\sqrt{\frac{ab}{\rho_0}} \frac{t - \tau}{\lambda \tau - b} \quad (1.6)$$

Так как $d\sigma$ возрастает с ростом деформации, то внецентренный пучок прямых (1.6) является сходящимся. Поэтому представляет интерес определение геометрического места пересечений этих прямых. Такое геометрическое место находится из (1.6) путем дифференцирования по τ . Получаем таким образом

$$t = \frac{b}{\lambda}, \quad x = \sqrt{\frac{ab}{\rho_0}} \frac{1}{\lambda} = x^* \quad (1.7)$$

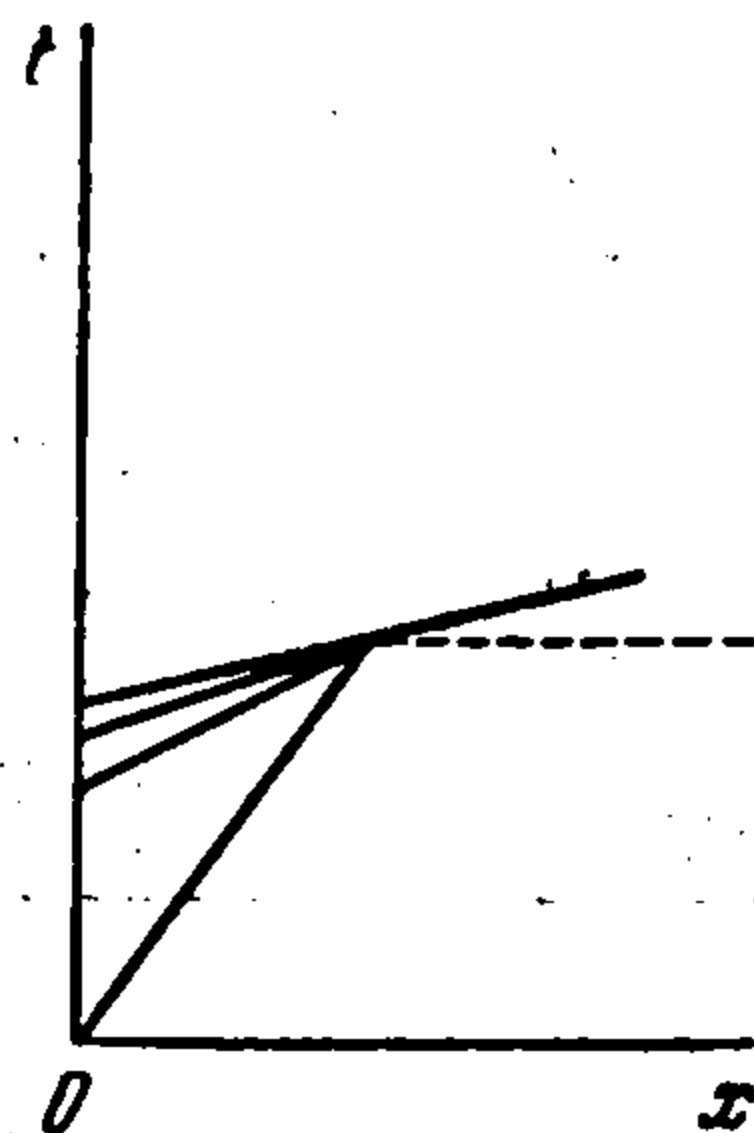
Соотношения (1.7) для данных значений постоянных a и b , а также параметра λ изображают неподвижную точку.

Следовательно, для материалов, удовлетворяющих соотношению (1.1), и для монотонной нагрузки (1.5) на конце бруса фронты всех прямых волн проходят через неподвижную точку (1.7). На отрезке бруса $0 < x < x^*$ эти волны являются волнами второго порядка, т. е. на них терпят разрыв первые производные от напряжения и вторые производные от перемещения. В остальной части бруса эти волны могут переходить в ударные волны, на фронтах которых, следовательно, терпят разрыв и напря-

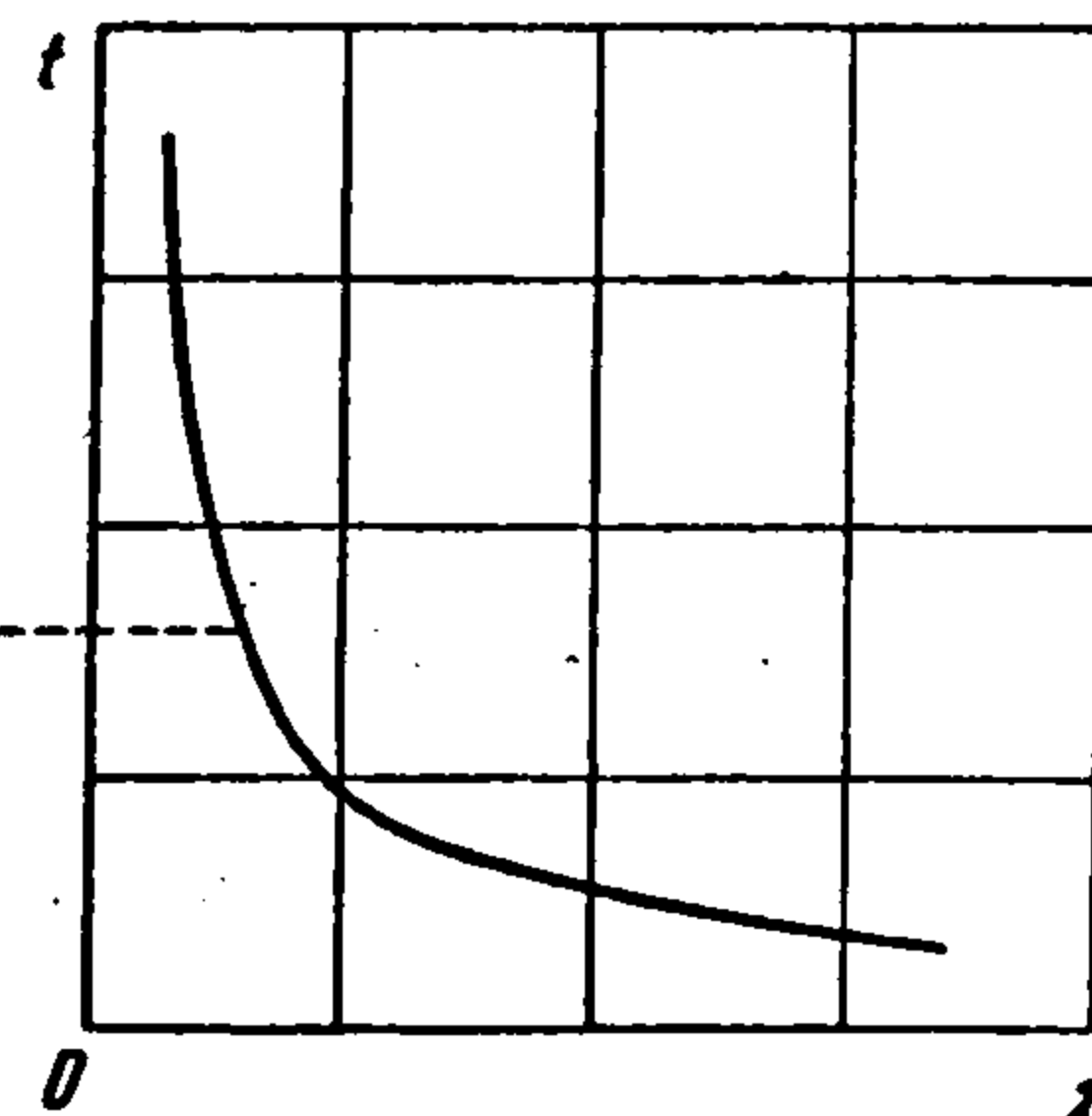
жения и скорости частиц. Из всех этих прямых волн роль ударной волны будет играть та волна, на которой деформация является максимальной. Предположим, что ϵ возрастает монотонно на конце бруса и затем в некотором промежутке времени остается постоянной и равной ϵ_{\max} . При этом на отрезке бруса $x > x^*$ будет распространяться ударная волна, на которой $\epsilon = \epsilon_{\max}$. Необходимо отметить, что для материалов, удовлетворяющих соотношению (1.1), на отрезке бруса $x > x^*$ ударные волны возникают даже при очень малых деформациях.

Для различных значений параметра геометрическое место неподвижных точек (1.7) получается в виде прямой

$$x = \sqrt{\frac{a}{\rho_0 b}} t \quad (1.8)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

проходящей через начало координат (фиг. 2). Для графического изображения мы взяли $1/\rho_0 = 10.54 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4/\text{гр. сек}^2$, $\sqrt{a/\rho_0 b} = 0.02952$. Отметим, что эта прямая и есть первая волна Римана, соответствующая $\tau = 0$. На фиг. 3 изображена графически зависимость между t и λ , представляющая гиперболу.

Если бы вместо соотношения (1.5) мы взяли на конце бруса закон нагрузки, квадратичной по τ , то выводы были бы аналогичными. Различие состоит в том, что геометрическое место пересечения фронтов прямых волн не является более точкой, а в основном кривой, огибающей эти волны. Поскольку расчеты аналогичны нижеследующим, не будем приводить их здесь.

Все приведенные выше соображения справедливы лишь для небольших пределов изменения динамической деформации, т. е. на небольших отрезках кривой $\sigma - \epsilon$, во-первых, потому, что в резине деформации могут быть очень велики, тогда как используется линейная теория волн, и во-вторых, потому, что не учитывается влияние скорости деформации. Аналогичные рассуждения можно применить и к другим материалам с аналогичными особенностями кривой $\sigma - \epsilon$.

§ 2. Рассмотрим теперь другой тип материала (резина), имеющий S-образную кривую $\sigma - \epsilon$. Для таких материалов А. Айзенберг и Е. Фаленберг (см. [3], стр. 57) предложили зависимость вида

$$\sigma = \alpha\epsilon + \beta\epsilon^2 + \gamma\epsilon^3 \quad (2.1)$$

где α и γ — положительные постоянные, а β — отрицательная постоянная, свойственные материалу. Рассмотрим для иллюстрации случай неполной смеси натурального каучука, для которой $\alpha = 11.46$, $\beta = -5.07$ и $\gamma = 1.14$, так что

$$\sigma = 11.46\epsilon - 5.07\epsilon^2 + 1.14\epsilon^3 \quad (2.2)$$

Зависимость (2.2) показана на фиг. 4. Изменение знака вогнутости происходит при $\epsilon = 1.4824$ (точка m на оси ϵ фиг. 4).

Фронты продольных волн, распространяющиеся в таком материале, получаются аналогично предыдущим:

$$x = \sqrt{\frac{\alpha + 2\beta\varepsilon + 3\gamma\varepsilon^2}{\rho_0}} (t - \tau) \quad (2.3)$$

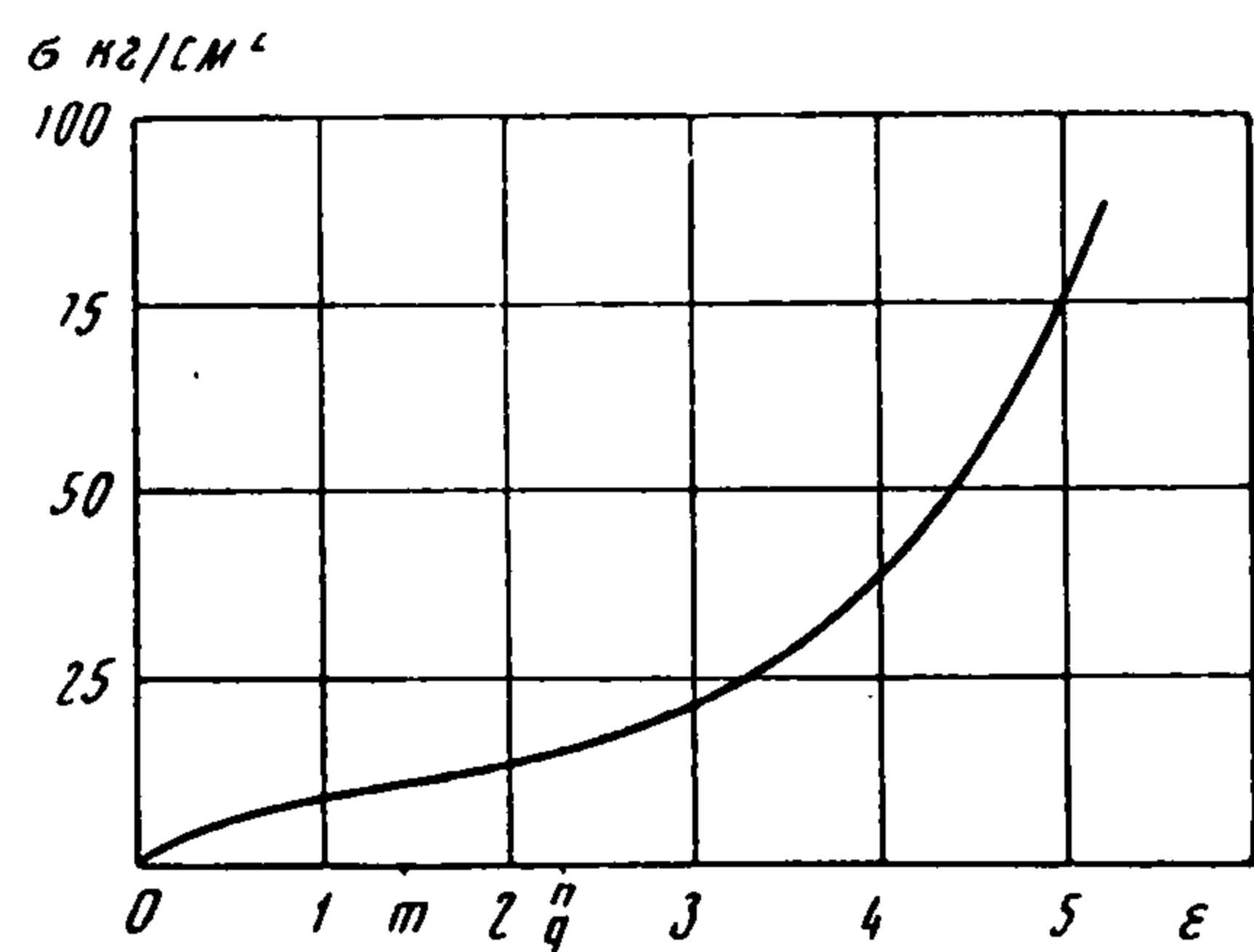
Для монотонной нагрузки вида (1.5) на конце бруса уравнения (2.3) имеют вид:

$$x = \sqrt{\frac{\beta + 2\beta\lambda\tau + 3\gamma\lambda^2\tau^2}{\rho_0}} (t - \tau) \quad (2.4)$$

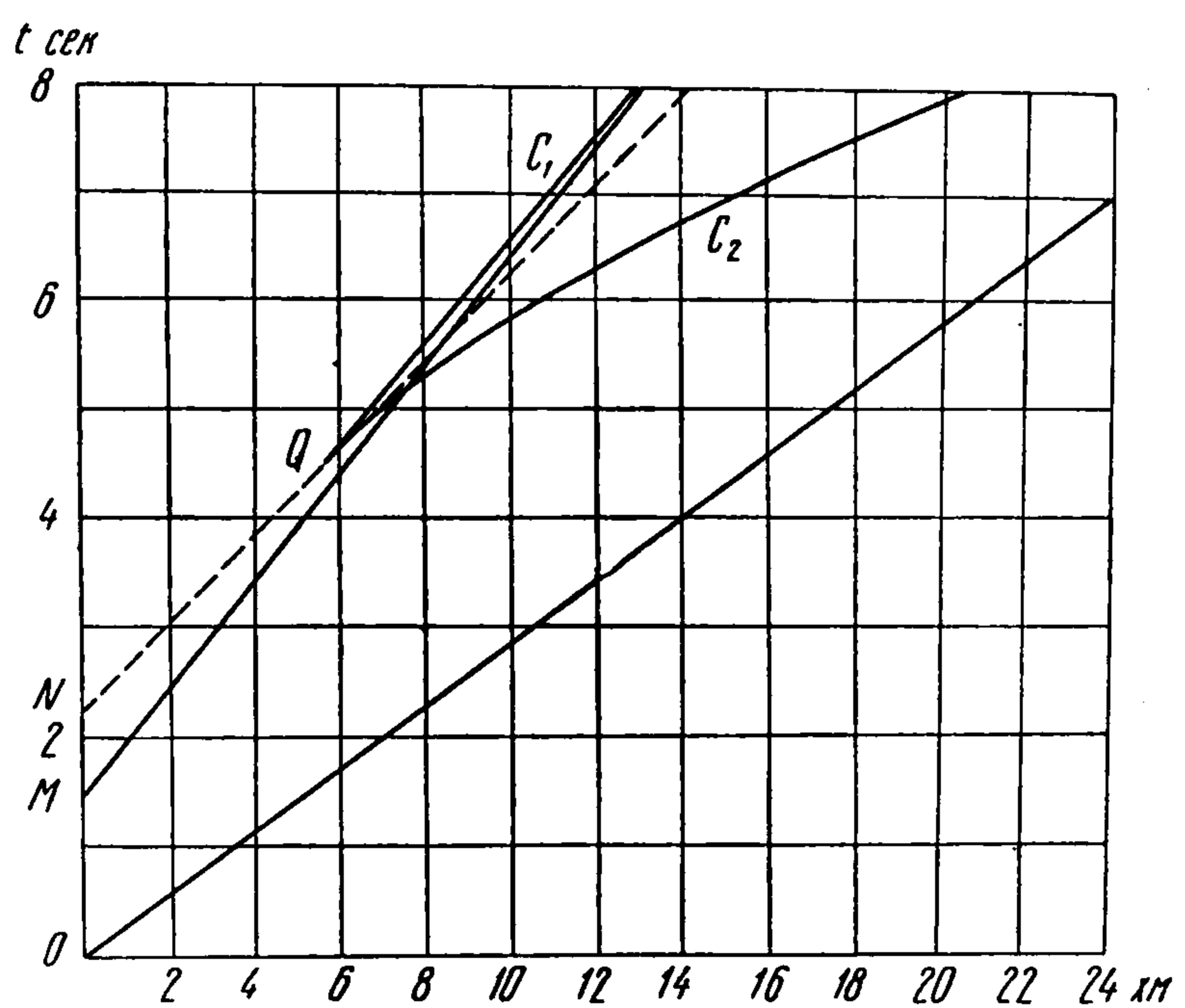
Геометрическое место точек пересечения фронтов прямых волн получается дифференцированием (2.4) по τ

$$\tau = \frac{-3(\gamma\lambda t - \beta) \pm \sqrt{9(\gamma\lambda t - \beta)^2 + 24\gamma(\beta\lambda t - \alpha)}}{-12\gamma\lambda} \quad (2.5)$$

и исключением параметра τ из (2.5) и (2.4). Искомое геометрическое место показано на фиг. 5 для частного случая, соответствующего кривой (2.2) при $1/\rho_0 = 10.54 \cdot 10^{-6}$ м⁴/гр. сек² и $\lambda = 1$. Оно представляет кривую с двумя ветвями (C_1) и (C_2), касающимися в точке Q .



Фиг. 4



Фиг. 5

Фронт первой упругой волны, соответствующий значению $\tau = 0$, отделяющий в плоскости xt возмущенную область от невозмущенной, есть прямая OP . Фронты волн, пересекающие ось t между точками O и M , являются расходящимися. Следовательно, для соответствующих деформаций, представленных зависимостью (1.5), возникновение ударных волн невозможно. Точка M соответствует точке перегиба на диаграмме $\sigma \sim \varepsilon$. Для больших начальных статических деформаций, при которых фронты волн пересекают ось Ot между точками M и N , т. е. когда начальная деформация на рис. 4 находится в пределах от m до n , возникновение ударных волн представляется возможным. Рассмотрим одну из этих волн, соответствующую некоторому значению τ_1 . Как и в предыдущем случае, предположим, что динамическая деформация на конце бруса возросла монотонно и далее, начиная с момента времени τ_1 , остается постоянной и равной $\lambda\tau_1$ при $t < \tau_1$. Из (2.5) и (2.4) получаем координаты x_1 и t_1 точки касания нашей волны с огибающей (C_1). При $0 < x \leq x_1$ волна второго порядка, а при $x > x_1$ она превращается в ударную волну.

Характеристики, проходящие через точки M и N , являются соответственно фронтами первой и последней волн, обладающими этим свойством. На отрезке бруса $0 < x < x_1$ деформация возрастает монотонно под влиянием пучка прямых волн. На отрезке бруса $x > x_1$ деформация терпит скачок вследствие одиночной ударной волны, фронт которой проходит через точку (x_1, t_1) .

При еще бóльших начальных статических деформациях, т. е. для фронтов волн, пересекающих ось Ot выше точки N , положение вещей аналогично предыдущему. Верхняя и нижняя ветви (C_1) и (C_2) кривой на рис. 5 играют, однако, различную роль в процессе распространения волн. Каждая точка на (C_1) разделяет соответствующую волну, фронт которой проходит через эту точку и представляет прямую линию, на две части: на первой она является волной второго порядка, а на второй ее необходимо считать ударной волной. Следовательно, касающиеся (C_1) фронты волн независимо от того, являются ли они волнами второго порядка или ударными волнами, представляют прямые линии, а точки на этой кривой лишь разделяют эти прямые на две части. Они играют роль неподвижных точек из предыдущего примера.

Кривая (C_2) играет роль фронта ударной волны, на которой деформации являются не постоянными, а монотонно возрастающими. Эта волна возникает лишь в том случае, если деформация на конце бруса превосходит деформацию, соответствующую точке N . В нашем численном примере $\varepsilon_N = 2.242$. Координатами точки Q тогда являются $x_Q = 5.77$ м и $t_Q = 4.52$ сек. Обозначим через t_2 и x_2 координаты точки на (C_2) , являющейся точкой касания кривой (C_2) с фронтом волны Римана, соответствующей максимальному значению ε на конце бруса. Как и выше, предположим, что динамическая деформация растет монотонно на конце бруса и далее, достигая максимального значения $\varepsilon_{\max} = \lambda\tau_2$, сохраняется постоянной в некотором отрезке времени. Если на конце бруса $\varepsilon > \varepsilon_N$, положение будет следующим: на отрезке бруса $0 < x \leq x_Q$ волны являются волнами второго порядка и их фронты представляют собой прямые линии. При $x_Q < x < x_2$ в брус распространяется ударная волна, фронт которой и есть кривая (C_2) , на которой деформация и скорость распространения являются монотонно возрастающими. В каждой точке (C_2) скорость распространения и деформацию можно найти из уравнения касательной в этой точке, являющейся одной из прямых (2.4). При $x > x_2$ фронт ударной волны представляет собой прямую линию, касающуюся (C_2) в точке (x_2, t_2) . Следовательно, при $x > x_2$ скорость распространения является постоянной.

Если на конце бруса $\varepsilon < \varepsilon_N$, кривая (C_2) не появляется.

Заключение. Напомним, что все проделанные выше расчеты справедливы лишь для небольших динамических деформаций, которым предшествуют сколь угодно большие высокоэластичные деформации. Эти расчеты можно проделать и для других материалов, с другими кривыми $\sigma \sim \varepsilon$, удовлетворяющими лишь условию, чтобы по крайней мере на одном из их отрезков вогнутость была направлена в сторону оси напряжений.

При различных монотонных нагрузках на конце бруса и для различных зависимостей $\sigma \sim \varepsilon$ можно точно выявить отрезки бруса, по которым проходят волны второго порядка или ударные волны. Чем быстрее растет деформация на конце бруса, тем меньшим является отрезок бруса, в котором не возникают ударные волны. При

нагрузках, которые можно считать «мгновенными», этим отрезком можно пренебречь и, следовательно, можно предположить, что ударные волны начинаются на конце бруса.

Фронты ударных волн, возникающие в резине, не являются непременно прямыми линиями в плоскости xt . Так как эти волны зависят от граничных условий и от соотношения $\sigma \sim \varepsilon$, они могут представлять собой и кривые линии. В последнем случае скорость распространения этой волны является переменной (возрастающей) и деформация на волне также является переменной (возрастающей).

Если в примере § 1 мы предположили бы, что нагрузка на конце бруса изменяется пропорционально второй степени τ , то получили бы огибающую, аналогичную кривой (C_1), полученной для примера § 2. Она играла бы ту же самую роль, что и эта кривая (C_1).

Необходимо отметить, что, хотя нагрузка на конце бруса подчинялась в обоих примерах тому же самому закону (1.5), кривая (C_2) появилась лишь во втором случае. Следовательно, в этих частных примерах эта кривая обязана своим появлением не виду нагрузки, а ходу кривых $\sigma \sim \varepsilon$.

Важнейшим выводом из вышеприведенных примеров является тот, что скорость распространения фронта волн в резине может претерпевать на определенном расстоянии от конца бруса разрыв. Величина этого разрыва может вычисляться.

В заключение мы должны обратить внимание на то, что из-за поперечной инерции, образование ударных волн могло бы быть смешанным. На этот факт обратил внимание, в особенности, Е. Х. Ли (см., например, [5]). Из-за этого факта вышеприведенные результаты должны рассматриваться в качестве средних результатов.

Поступила 4 IV 1957

Математический институт
Академии РНР

ЛИТЕРАТУРА

1. Л е н с к и й В. С., Т а р а с о в а М. А. Определение динамической диаграммы «напряжения—деформации» резины. Вестник Московского Университета, 12, 1950.
2. К о л с к у Н. Stress waves in solids, Oxford, 1953. (Есть русский перевод: Волны напряжения в твердых телах. ИЛ, 1955).
3. И з р а е л и т Г. С. Механические испытания резины и каучука. Госхимиздат, 1949.
4. Р а х м а т у л и н Х. А. О распределении волны разгрузки. ПММ, т. IX, 1945.
5. L e e E. H. Wave propagation in helical compression springs Proceedings of the Fifth Symposium in Applied Mathematics, Mc Grow-Hill Book Co., 1954.