

## О НЕКОТОРЫХ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЯХ «МЕЛКОЙ ВОДЫ»

П. Я. Полубаринова - Кочина

(Москва)

Задача о рассеивании под действием силы тяжести столба жидкости, опирающегося непосредственно на твердую горизонтальную плоскость, привлекла в последнее время внимание ряда ученых. В работе Пенни и Торнхилла<sup>[1]</sup>, посвященной этому вопросу, указывается, что эта задача и более общая — о растекании жидкого столба, окруженного второй, более легкой жидкостью, — была связана с наличием «основной волны», которая наблюдалась при испытании атомного оружия в Бикини. В качестве других примеров приводятся случаи растекающегося движения при взрыве стены дамбы, внезапном разрушении сосуда, наполненного жидкостью, и т. п. По поводу первого примера делается замечание, что в случае атомного оружия основная волна, сопутствующая растеканию жидкого столба, имеет большое практическое значение, так как полагают, что она содержит большинство смертоносных продуктов, вызывающих распад клеток.

Проблема растекания жидкого столба идеализируется и рассматривается как задача о потенциальном движении несжимаемой жидкости.

В указанной работе рассматриваются случаи течений, симметричных относительно вертикальной плоскости или вертикальной оси. Потенциал скорости ищется в виде рядов по косинусам кратных дуг для плоской и по полиномам Лежандра для осесимметричной задачи, причем коэффициенты рядов ищутся в виде полиномов по степеням времени. Задача рассматривается как нелинейная, поэтому вычисления получаются чрезвычайно сложными и приходится ограничиваться тремя-пятью членами ряда. Начальная форма бугра бралась в виде полуцилиндра или полусферы.

Кроме того, авторы применяют метод характеристик для сплюснутых бугров, т. е. таких, для которых в начальный момент времени высота колонны мала по сравнению с шириной: для полуэллипса, прямоугольника.

В качестве приложения к статье приводится сообщение Фокса и Гудвина, которые рассматривали плоскую задачу о растекании водяной колонны, имевшей первоначально форму прямоугольника. Решение получено методом релаксации (конечных разностей). Приводится просчитанный пример, причем отмечается, что с возрастанием времени поведение линии свободной поверхности все более портится вблизи твердой стенки.

Во всех трех способах точность получается небольшой, между тем как вычисления очень трудоемки.

Данная задача имеет аналогию с задачей о растекании бугра грунтовых вод. Опыты, проведенные Мартином и Мойсом<sup>[2]</sup> в стеклянных лотках, дают картину, похожую на соответствующую картину растекания глицерина в щелевом лотке, моделирующую растекание бугра грунтовых вод.

Эта аналогия наводит на мысль рассмотреть задачу в «гидравлической» постановке, т. е. осреднив поток по высоте. Получающееся при этом уравнение является аналогом уравнения Буссинеска в теории движения грунтовых вод.

Мы ищем автомодельные решения этого уравнения, используя методы, разработанные Л. И. Седовым<sup>[3]</sup> и примененные Г. И. Баренблаттом<sup>[4-7]</sup> для исследования автомодельных и предельных автомодельных решений уравнений движения жидкости и газа в пористой среде. Оказывается, что такие решения существуют.

Они дают не те задачи, которые были рассмотрены указанными выше авторами: у нас получаются в основном случаи разлета постоянной массы жидкости, сосредоточенной в начальный момент времени в бесконечно малой области. Некоторые результаты могут быть перенесены на случай адиабатического (изэнтропического) движения газа с показателем адиабаты  $\gamma = 2$  (см., например [8]).

Выражаю благодарность М. М. Семчиновой и А. Р. Шкирич за выполнение вычислений.

**1. Вывод основного уравнения.** Рассматривается неустановившееся движение несжимаемой идеальной жидкости в слое конечной глубины. Делаем предположение, обычное в теории длинных волн (см., например, [9]), что вертикальная составляющая ускорения мала. Тогда третье из уравнений Эйлера ( $v_z$  — вертикальная составляющая скорости,  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление,  $g$  — ускорение силы тяжести)

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$$

дает, что давление распределяется по гидростатическому закону, который можно записать так:

$$p - p_0 = g\rho(\zeta - z) \quad (1.1)$$

Здесь  $p_0$  — давление на свободной поверхности,  $\zeta$  — ордината точки свободной поверхности,  $z$  — ордината рассматриваемой точки.

Из уравнения (1.1) следует, что для ординаты  $\zeta$  свободной поверхности выполняется уравнение

$$\zeta = z + \frac{p - p_0}{\rho g} \quad (1.2)$$

Из сделанного предположения вытекает, что вертикальная составляющая скорости мала по сравнению с горизонтальными [9]. Тогда в первых двух уравнениях Эйлера дифференцирование по  $z$  будет отсутствовать и можно считать, что горизонтальные составляющие скорости  $v_x$ ,  $v_y$  не зависят от высоты, т. е. постоянны вдоль каждой вертикали.

Примем, что  $v_x$ ,  $v_y$  имеют потенциал  $\varphi(x, y, t)$ :

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (1.3)$$

Можно уравнение неразрывности вывести из рассмотрения расходов через грани столбика жидкости с основанием  $dx dy$  и высотой  $\zeta$ .

Общее изменение расхода

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \zeta \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \zeta \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right] dx dy$$

равно взятому со знаком минус изменению со временем объема жидкости в выделенном столбике, т. е. выражению  $(-\partial \zeta / \partial t) dx dy$ .

Приравнивая эти выражения и сокращая на  $dx dy$ , получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \zeta \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \zeta \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \quad (1.4)$$

Выражение для  $\zeta$  найдем из интеграла Эйлера — Лагранжа

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2g} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] = 0 \quad (1.5)$$

в котором согласно условию пренебрегаем вертикальной составляющей скорости. На свободной поверхности принимаем  $p = 0$ . Тогда на осно-

вании (1.2) уравнение свободной поверхности примет вид:

$$\zeta = -\frac{1}{g} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\text{grad } \varphi)^2 \right\} \quad (1.6)$$

Это выражение  $\zeta$  мы подставим в уравнение (1.4), которое предварительно перепишем в виде

$$\zeta \Delta \varphi + \text{grad } \zeta \cdot \text{grad } \varphi + \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \quad (1.7)$$

где

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad (1.8)$$

В случае плоского движения имеем

$$(\text{grad } \varphi)^2 = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2, \quad \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (1.9)$$

и уравнение (1.7) можно записать в развернутом виде так:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \frac{3}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad (1.10)$$

а уравнение свободной поверхности в виде

$$\zeta = -\frac{1}{g} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (1.11)$$

Для случая осевой симметрии, когда осью симметрии является ось  $z$ , обозначая через  $r$  расстояние до этой оси, будем иметь для  $\varphi$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} + \frac{3}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^3 + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad (1.12)$$

уравнение же свободной поверхности будет

$$\zeta = -\frac{1}{g} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 \right] \quad (1.13)$$

Заметим, что для одномерных движений введение функции  $\varphi$  не является ограничением задачи.

**2. Автомодельные решения плоской задачи. 1°. Общие уравнения.** Будем искать решения уравнения (1.10) в форме, зависящей от переменных  $x$ ,  $t$  и некоторой постоянной  $\sigma$ , имеющей размерность  $L^2 T^{-p-1}$ , где  $L$  — размерность длины,  $T$  — размерность времени. Такие решения представляются в виде

$$\varphi = \sigma t^p f(x, t, \sigma, p) \quad (2.1)$$

где  $p$  — безразмерная постоянная. При этом имеем

$$[\varphi] = \frac{L^2}{T}, \quad [x] = L, \quad [t] = T, \quad [\sigma] = \frac{L^2}{T^{p+1}}$$

Функция  $f$  зависит от трех величин, из которых две имеют независимые размерности. Отсюда следует, что единственная безразмерная величина, которую можно составить из  $x$ ,  $t$  и  $\sigma$ , есть

$$\frac{x}{\sqrt{\sigma t^{p+1}}}$$

Последнее выражение, как это сделано в работе [6], умножим на  $\sqrt{p+1}$  (при  $p \neq -1$ ). Будем искать решение вида

$$\varphi = \sigma t^p f(\xi) \quad \xi = x \sqrt{\frac{p+1}{\sigma t^{p+1}}} \quad (2.2)$$

Подстановка в уравнение (1.10) выражения (2.2) дает для  $f(\xi)$  уравнение

$$\left[ \xi^2 - 6\xi f' + \frac{4p}{p+1} f + 6f'^2 \right] f'' + \frac{4(p-1)}{p+1} f'^2 - \frac{3(p-1)}{p+1} \xi f' + \frac{4p(p-1)}{(p+1)^2} f = 0 \quad (2.3)$$

Уравнение свободной поверхности (1.11) будет иметь вид:

$$\zeta = -\frac{\sigma(p+1)}{g} t^{p-1} \left[ \frac{p}{p+1} f - \frac{1}{2} \xi f' + \frac{1}{2} f'^2 \right] \quad (2.4)$$

Горизонтальная составляющая скорости имеет выражение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = V \sqrt{\sigma(p+1)} t^{\frac{p-1}{2}} f'(\xi) \quad (2.5)$$

2°. *Понижение порядка уравнения для  $f(\xi)$ .* Уравнение (2.3) инвариантно относительно группы преобразования

$$\alpha^{-2} f(\alpha \xi) \quad (2.6)$$

Это означает, что если  $f(\xi)$  есть решение уравнения (2.3), то и выражение (2.6) при любом постоянном значении  $\alpha$  также является решением этого уравнения. В таком случае можно понизить порядок уравнения подстановкой [4]

$$f = \xi^2 w(\eta), \quad \eta = \ln \xi \quad (2.7)$$

Действительно, составляя производные

$$\frac{df}{d\xi} = \xi \left( \frac{dw}{d\eta} + 2w \right), \quad \frac{d^2 f}{d\xi^2} = \frac{d^2 w}{d\eta^2} + 3 \frac{dw}{d\eta} + 2w \quad (2.8)$$

и подставляя их в (2.3), получим уравнение

$$\begin{aligned} & (w'' + 3w' + 2w) \left[ 1 - \frac{4(2p+3)}{p+1} w - 6w' + 6(2w + w')^2 \right] + \\ & + \frac{4(p-1)}{p+1} (2w + w')^2 - \frac{3(p-1)}{p+1} (2w + w') + \frac{4p(p-1)}{(p+1)^2} w = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

(штрих означает дифференцирование по  $\eta$ ).

Так как это уравнение не содержит явно независимой переменной  $\eta$ , то, приняв  $w'$  за новую функцию,  $w$  за независимую переменную, получим уравнение первого порядка. Для упрощения этого уравнения можно принять за новую функцию выражение

$$u = \frac{dw}{d\eta} + 2w \quad (2.10)$$

Тогда

$$w'' + 3w' + 2w = (u - 2w) \frac{du}{dw} + u, \quad w' = u - 2w \quad (2.11)$$

и уравнение (2.9) можно переписать так:

$$\frac{dw}{du} = \frac{(u-2w) \left( 1 + \frac{4p}{p+1} w - 6u + 6u^2 \right)}{\frac{2(p-2)}{p+1} u - \frac{4p(p-1)}{(p+1)^2} w + \frac{2(p+5)}{p+1} u^2 - 6u^3 - \frac{4p}{p+1} uw} \quad (2.12)$$

Формула (2.5) для горизонтальной скорости примет вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = V \sqrt{\sigma(p+1)} t^{\frac{p-1}{2}} \xi u \quad (2.13)$$

а уравнение свободной поверхности

$$\zeta = \frac{\sigma(p+1)}{2g} \xi^2 t^{p-1} \left( u - u^2 - \frac{2p}{p+1} w \right) \quad (2.14)$$

Перейдем теперь к рассмотрению отдельных задач.

3°. *Вытекание при постоянном уровне в начальном сечении.* Это случай, когда  $p = 1$ . При этом получается значительное упрощение уравнения (2.3), которое принимает вид:

$$(\xi^2 + 2f - 6\xi f' + 6f'^2) f'' = 0 \quad (2.15)$$

Если принять  $f'' = 0$ , то  $f' = C$ ,  $f = C\xi + C_1$  и уравнение свободной поверхности будет  $\zeta = \text{const}$ . Приравняв нулю второй множитель уравнения (2.15), получим для  $f'$  уравнение

$$f' = \frac{1}{2} \xi \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3}(\xi^2 - 4f)}$$

Подстановка  $f = \frac{1}{4} \xi^2 (1 - v^2)$  приводит к решению

$$f = \frac{1}{6} \xi^2 + \frac{B}{6} \xi - \frac{B^2}{12}, \quad f' = \frac{1}{3} \left( \xi + \frac{B}{2} \right)$$

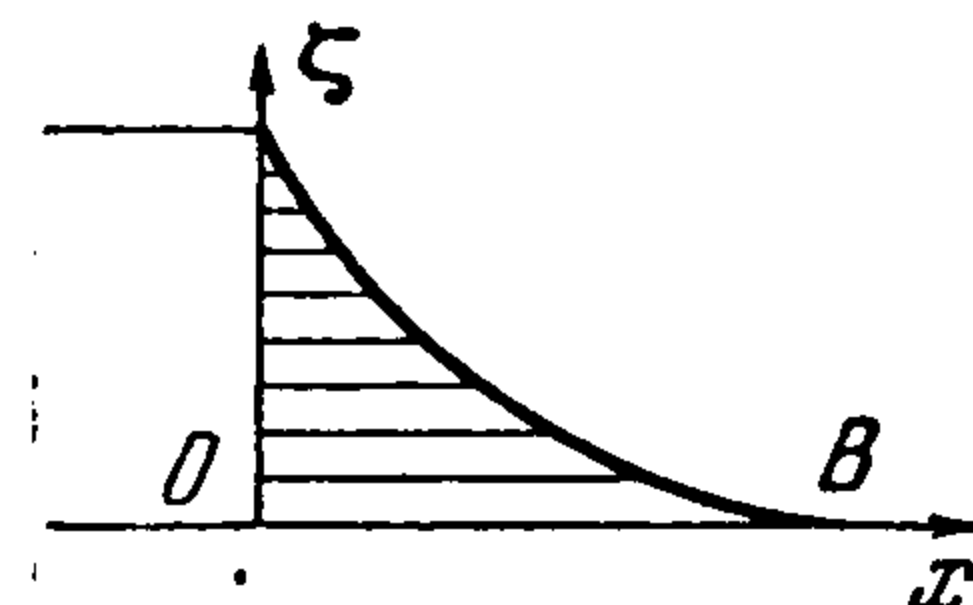
где  $B$  — произвольная постоянная.

Для скорости и ординаты свободной поверхности получаем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{V\sqrt{2\sigma}}{3} \left( \xi + \frac{B}{2} \right), \quad \zeta = \frac{\sigma}{18g} (\xi - B)^2 \quad (2.16)$$

Имеем параболу, часть которой, в промежутке  $0 \leq \xi \leq B$ , может быть принята за свободную поверхность (фиг. 1). При  $\xi = 0$  получаем постоянную ординату  $\zeta_0$ , через которую можно выразить  $B$ :

$$\zeta_0 = \frac{\sigma B^2}{18g}, \quad B = 3 \sqrt{\frac{2g\zeta_0}{\sigma}}$$



Фиг. 1

С течением времени язык воды удлиняется, причем отрезок оси  $\xi$  равен  $\xi_0 = B$ , так что абсцисса основания  $x_0$  перемещается со скоростью  $B \sqrt{1/2\sigma}$  (равной скорости  $\partial\varphi/\partial x$ ):

$$x_0 = B \sqrt{1/2\sigma} t$$

Расход, поступающий через отрезок  $\zeta_0$ , равен

$$Q = \zeta_0 \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{x=0} = \frac{B^3 \sigma \sqrt{2\sigma}}{108g}$$

4°. *Растекание постоянного объема жидкости.* Объем воды, толщина которого в направлении, перпендикулярном плоскости  $xoz$ , равна единице, выражается в виде интеграла

$$v = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta dx \quad (2.17)$$

где  $\zeta$  — ордината свободной поверхности, которую мы возьмем из уравнения (2.4). При этом выпишем выражения

$$x = \xi \sqrt{\frac{\sigma t^{p+1}}{p+1}}, \quad dx = \sqrt{\frac{\sigma t^{p+1}}{p+1}} d\xi$$

Получим

$$v = \frac{\sigma \sqrt{\sigma}}{g \sqrt{p+1}} t^{\frac{3p-1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) d\xi$$

$$F(\xi) = -\frac{p+1}{2} \xi f' + pf + \frac{p+1}{2} f'^2$$

Для того чтобы объем  $v$  не изменялся со временем, необходимо, чтобы  $p = 1/3$ . В этом случае уравнение (2.3) принимает вид:

$$(\xi^2 - 6\xi f' + f + 6f'^2) f'' - 2f'^2 + \frac{3}{2} \xi f' - \frac{1}{2} f = 0$$

Группируя его члены в интегрируемые комбинации, после интегрирования найдем первый интеграл:

$$2\xi^2 f' - \xi f - 6\xi f'^2 + 2ff' + 4f'^3 = C_1 \quad (2.18)$$

где  $C_1$  — произвольная постоянная.

К этому уравнению могут быть применены подстановки (2.7), (2.10), что даст уравнение

$$4u^3 - 6u^2 + 2(w+1)u - w + \frac{8C^3}{\xi^3} = 0 \quad (2.19)$$

$$(8C^3 = -C_1)$$

Подстановка  $u = 1/2 + v$  уничтожает член со второй степенью, и мы получаем

$$v^3 + \frac{1}{2} \left( w - \frac{1}{2} \right) v + \frac{2C^3}{\xi^3} = 0 \quad (2.20)$$

Уравнение свободной поверхности примет вид:

$$\zeta = \frac{2\sigma\xi^2}{3gt^{3/2}} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} w - v^2 \right) \quad (2.21)$$

Прежде всего рассмотрим случай  $C = 0$ . Уравнение (2.20) распадается на два множителя:

$$v \left( v^2 + \frac{1}{2} w - \frac{1}{4} \right) = 0$$

Если второй множитель равен нулю, то, как показывает (2.21), ордината свободной поверхности равна нулю. В случае же  $v = 0$  имеем

$$\xi \frac{dw}{d\xi} + 2w - \frac{1}{2} = 0 \quad (2.22)$$

Отсюда ( $C_1$  — произвольная постоянная)

$$w = \frac{f}{\xi^2} = \frac{C_1}{\xi^2} + \frac{1}{4} \quad (f = C_1 + \frac{1}{4} \xi^2) \quad (2.23)$$

и из (2.21), которое теперь принимает вид:

$$\zeta = \frac{2\sigma\xi^2}{3gt^{3/2}} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} w \right)$$

получаем

$$\zeta = \frac{\sigma}{12gt^{3/2}} (\xi^2 + C_1) = \frac{x^2}{9gt^2} + \frac{C_2}{t^{3/2}} \quad (2.24)$$

Таким образом, свободная поверхность — парабола второй степени, уходящая вверх на бесконечность. Вся парабола не может быть взята в качестве линии свободной поверхности, так как мы исходим из допу-

щений «мелкой воды». Но мы можем обрезать параболу (2.24) в любой точке  $\xi = \xi_0$ , где  $\xi_0$  — заданная постоянная. В самом деле, можно рассматривать вертикальную плоскость  $\xi = \xi_0$  как поверхность стационарного разрыва, поэтому на ней должно выполняться условие равенства скорости частицы и скорости перемещения поверхности разрыва. В нашем случае это есть условие

$$\left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{\xi=\xi_0} = \frac{dx_0}{dt} \quad (2.25)$$

Так как

$$x_0 = \xi_0 \frac{\sqrt{3\sigma}}{2} t^{1/2}$$

то

$$\frac{dx_0}{dt} = \sqrt{\frac{\sigma}{3}} \xi_0 t^{-1/2} \quad (2.26)$$

Как нетрудно видеть, по (2.13), полагая  $u = \frac{1}{2}$ ,  $p = \frac{1}{3}$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{\xi=\xi_0} = \sqrt{\frac{\sigma}{3}} \xi_0 t^{-1/2}$$

следовательно, условие стационарности разрыва выполняется и рассматриваемое движение возможно (однако давление в теории «мелкой воды» терпит разрыв непрерывности).

Постоянная  $C_1$  определяет ординату свободной поверхности при  $\xi = 0$ . При  $C_1 < 0$  эта ордината будет отрицательной. Однако такое решение все же можно рассматривать, если исключить область отрицательных ординат (фиг. 2), так как в точках пересечения параболы с осью абсцисс условие (2.25) выполняется.

Вернемся теперь к общему случаю уравнения (2.23), когда  $C$  отлично от нуля. Из (2.20) найдем  $w$  как функцию от  $v$ :

$$w = \frac{1}{2} - 2v^2 - \frac{4C^3}{v\xi^3} \quad (2.27)$$

Тогда уравнение свободной поверхности (2.21) будет

$$\zeta = \frac{4C^3\sigma}{3gt^{1/2}\xi v} \quad (2.28)$$

Чтобы найти зависимость между  $v$  и  $\xi$ , перепишем (2.11), подставив  $u = \frac{1}{2} + v$  и  $w$  из (2.27). Найдем

$$\frac{4(C^3 - v^3\xi^3)dv}{v^2\xi^2 d\xi} = 4v^2 + v - \frac{1}{2} - \frac{4C^3}{v\xi^3} \quad (2.29)$$

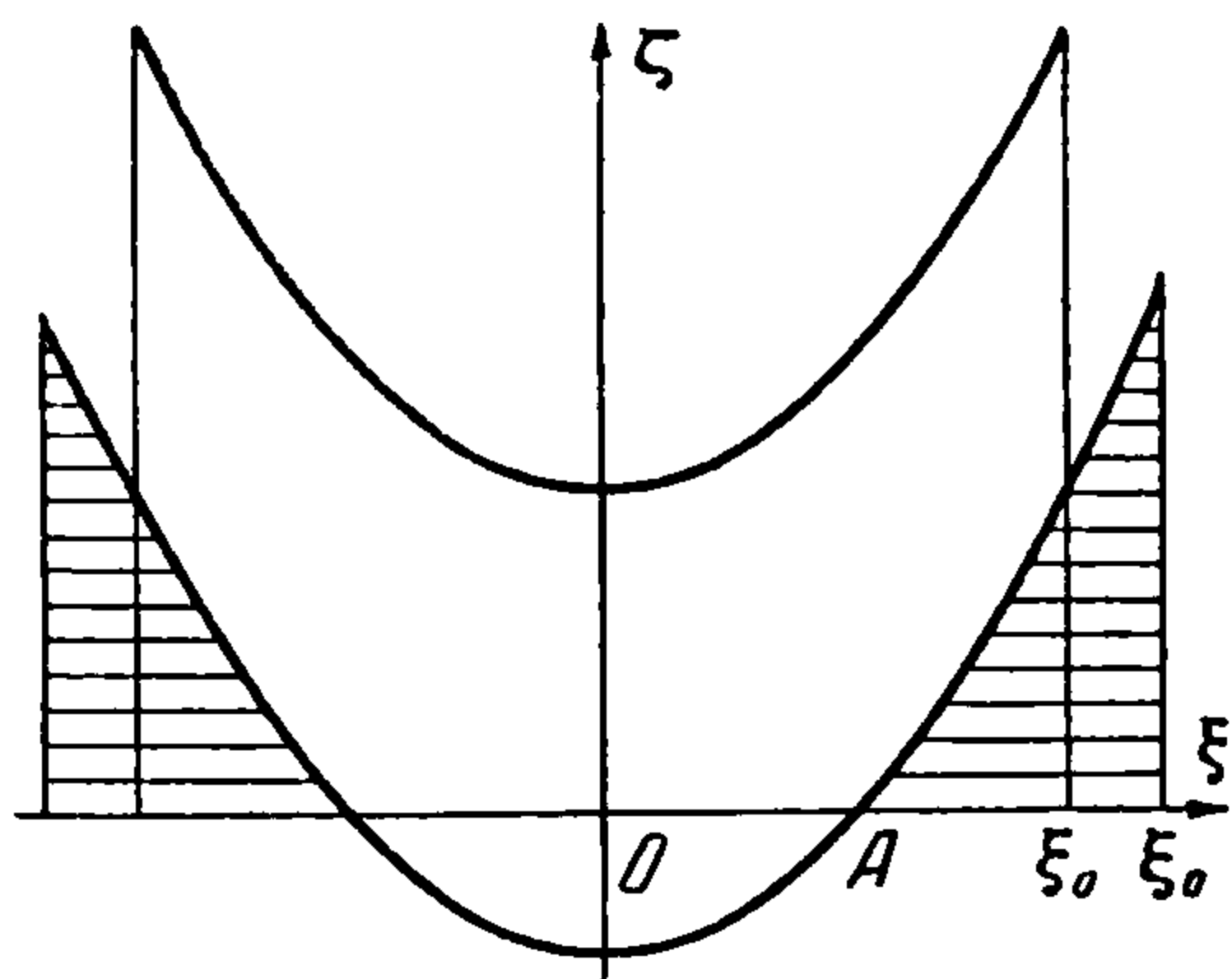
Подстановка  $v\xi = C/Z$ ,  $\xi = 2CX$  приводит к уравнениям

$$\zeta = \frac{4C^2\sigma}{3gt^{1/2}} Z \quad (2.30)$$

$$\frac{dZ}{dX} = \frac{(1 - XZ)Z^2}{2(1 - Z^3)} \quad (2.31)$$

На фиг. 3 показан общий вид интегральных кривых уравнения (2.31) (пунктиром). Сплошные линии получены путем численного интегрирования. Вершины интегральных линий лежат на гиперболе  $XZ = 1$ . Вблизи нейтральной особой точки  $X = 1$ ,  $Z = 1$  линии имеют вид гипербол.

Те ветви интегральной кривой, которые имеют асимптотой ось  $X$ , стремятся к нулю как  $X^{-1}$ , следовательно, при вычислении площади мы получаем расходящиеся интегралы (растекание бесконечного объема).



Фиг. 2

Обрезать эти линии нельзя, так как условие (2.25) не выполняется ни при каком значении  $\xi_0$ . Действительно, на основании (2.13) имеем

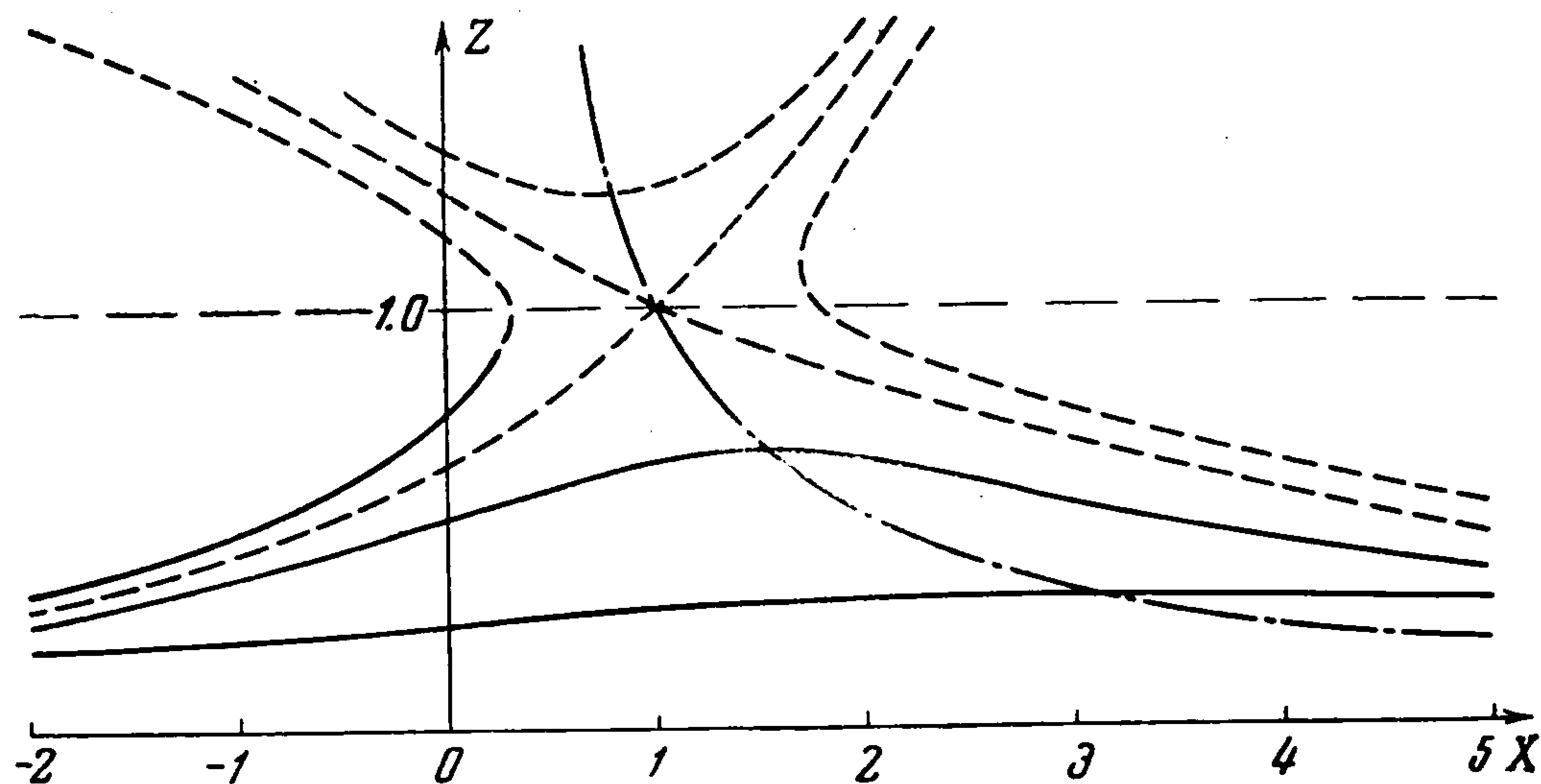
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \sqrt{\frac{\sigma}{3}} t^{-1/2} \left( \xi + \frac{2C}{Z} \right) \quad (2.32)$$

что может равняться  $dx_0/dt$  лишь при  $Z = \infty$  или  $C = 0$ . Заметим, что для той ветви, для которой  $Z \rightarrow 0$  при  $X \rightarrow \infty$ , имеем  $\lim (XZ) = -1$ , откуда  $2C/Z \approx -\xi + C_1$  и, следовательно,  $\partial \varphi / \partial x$  ограничено или равно нулю на бесконечности.

Таким образом, случай  $C \neq 0$  не дает решений, удовлетворяющих условию постоянства растекающегося конечного объема. Можно использовать нижние кривые фиг. 3 лишь для решения такой задачи: в некоторый момент времени  $t = t_1$  ( $t_1 \neq 0$ ) задана форма свободной поверхности, определяемая некоторой интегральной линией уравнения (2.31,) уравнение которой мы запишем в виде

$$\zeta = \Phi(\xi_1) t_1^{\frac{-p+1}{2}} \quad \left( \xi_1 = x \sqrt{\frac{p+1}{\sigma}} t_1^{\frac{-p+1}{2}} \right)$$

Тогда для  $t > t_1$  уравнение этой поверхности будет  $\zeta = \Phi(\xi) t^{\frac{-p+1}{2}}$ .



Фиг. 3

Заметим, что уравнение (2.3) при любом  $p$  имеет решение вида  $f(\xi) = A\xi^2 + B\xi + C$ . Для любого  $p$  получается

$$f = \frac{1}{3(p+1)} \xi^2, \quad f' = \frac{2}{3(p+1)} \xi$$

причем уравнение свободной поверхности оказывается не зависящим ни от  $\sigma$ , ни от  $p$ :

$$\zeta = \frac{x^2}{9gt^2}$$

В случае  $p = 1$  имеем, кроме того, решение (2.16), в случае  $p = 1/3$  — решение (2.25). Только эти решения удовлетворяют условию стационарности. Для других  $p$  (отличных от 1 и  $1/3$ ) условие стационарности поверхности разрыва не выполняется, и, следовательно, эти решения для нас непригодны.

Однако существуют и при  $p \neq 1/3$  решения непрерывные, могущие давать некоторую начальную форму свободной поверхности. Так, отметим в качестве примера случай  $p = 0$ , когда уравнение (2.3) упрощается, ибо в нем пропадают члены с  $f$ :

$$(\xi^2 - 6\xi f' + 6f'^2) f'' - 4f'^2 + 3\xi f' = 0$$

Полагая  $f' = \xi u$ , получим однородное уравнение, общее решение которого может быть записано в виде

$$\xi^2 = \frac{c}{(1-u)\sqrt{u(u-2/3)}}, \quad \zeta = \frac{\sigma \xi^2}{2gt} u(u-1) \quad (2.33)$$

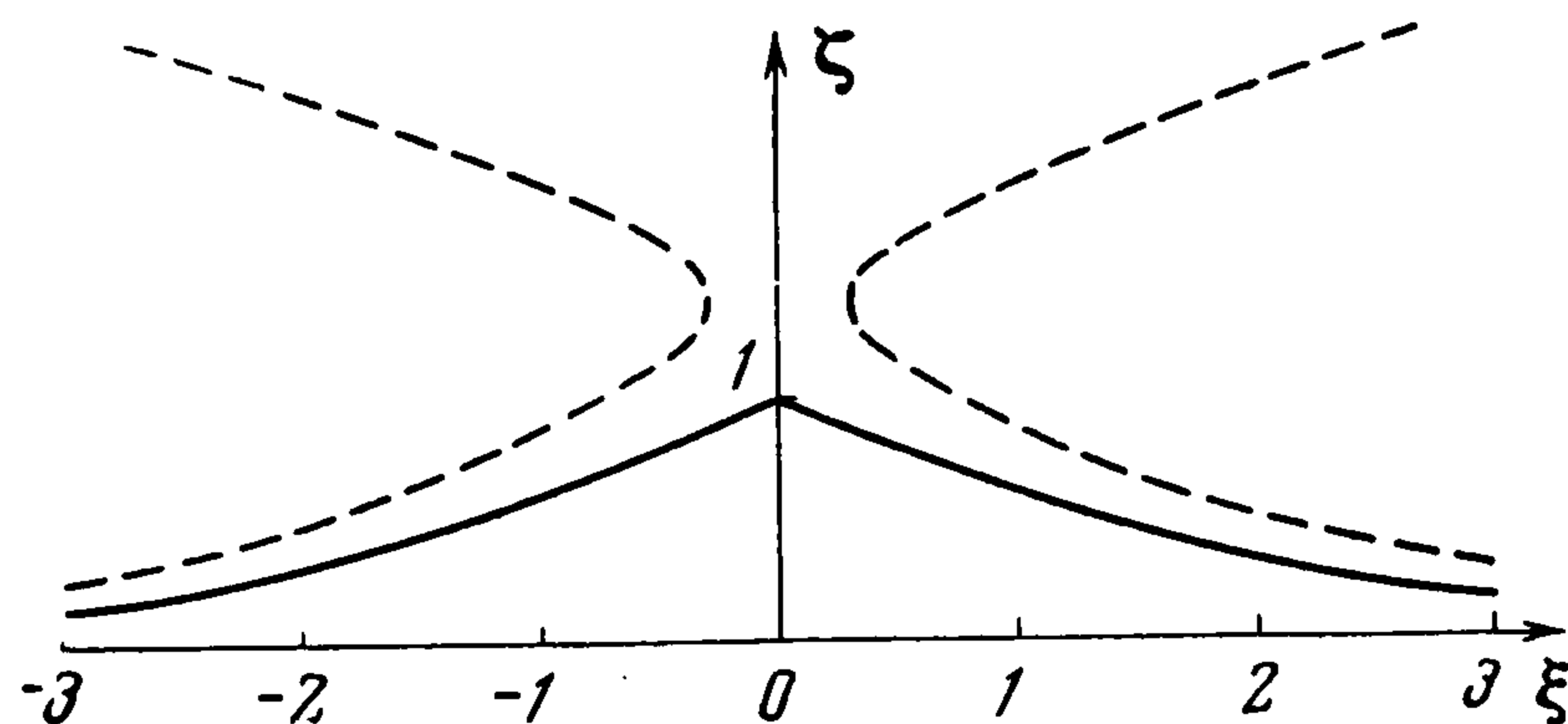
Среди кривых (2.26) форму, возможную для свободной поверхности, дают те, для которых  $-\infty < u \leq 0$  (см. фиг. 4, где сплошная линия построена по точкам.). При  $\xi = 0$  имеем угловую точку, так как

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = -\frac{\sigma \sqrt{c}}{6gt} \text{ при } \xi = 0.$$

**3. Случай осевой симметрии.** Будем рассматривать решения уравнения (1.12) вида

$$\varphi = \sigma t^p f(\xi) \quad (3.1)$$

где  $\xi$  — одночленная безразмерная комбинация из  $r$ ,  $t$  и  $\sigma$ . Нетрудно



Фиг. 4

обнаружить, что  $\xi$  имеет тот же вид, что и в плоском случае, лишь с заменой  $x$  на  $r$ :

$$\xi = r \sqrt{\frac{p+1}{\sigma t^{p+1}}} \quad (3.2)$$

Подстановка выражения (3.1) в уравнение (1.12) дает для  $f(\xi)$  дифференциальное уравнение

$$f'' \left[ \xi^2 - 6\xi f' + \frac{4p}{p+1} f + 6f'^2 \right] - \frac{3(p-1)}{p+1} \xi f' + \frac{4p(p-1)}{(p+1)^2} f + \frac{2(p-3)}{p+1} f'^2 + \frac{4p}{p+1} \frac{f f'}{\xi} + \frac{2}{\xi} f'^3 = 0 \quad (3.3)$$

Уравнение свободной поверхности при этом будет иметь вид:

$$\zeta = \frac{\sigma t^{p-1}}{g} \left[ \frac{p+1}{2} \xi f' - pf - \frac{p+1}{2} f'^2 \right] \quad (3.4)$$

Особый интерес, как и в плоском случае, представляет задача о растекании бугра воды, т. е. движение постоянного объема жидкости. Этот объем  $v$  выражается интегралом

$$v = 2\pi \int_0^{\infty} r \zeta dr \quad (3.5)$$

Так как

$$dr = \sqrt{\frac{\sigma}{p+1}} t^{\frac{p+1}{2}} d\xi$$

то имеем

$$v = \frac{2\pi\sigma^2}{g(p+1)} t^{2p} \int_0^{\infty} \xi F(\xi) d\xi \quad (3.6)$$

где

$$F(\xi) = \frac{p+1}{2} \xi f' - pf - \frac{p+1}{2} f'^2 \quad (3.7)$$

Объем  $v$  не будет зависеть от времени при  $p=0$ . Уравнение (3.3) принимает вид:

$$(\xi^3 - 6\xi^2 f' + 6\xi f'^2) f'' - 6\xi f'^2 + 3\xi^2 f' + 2f'^3 = 0 \quad (3.8)$$

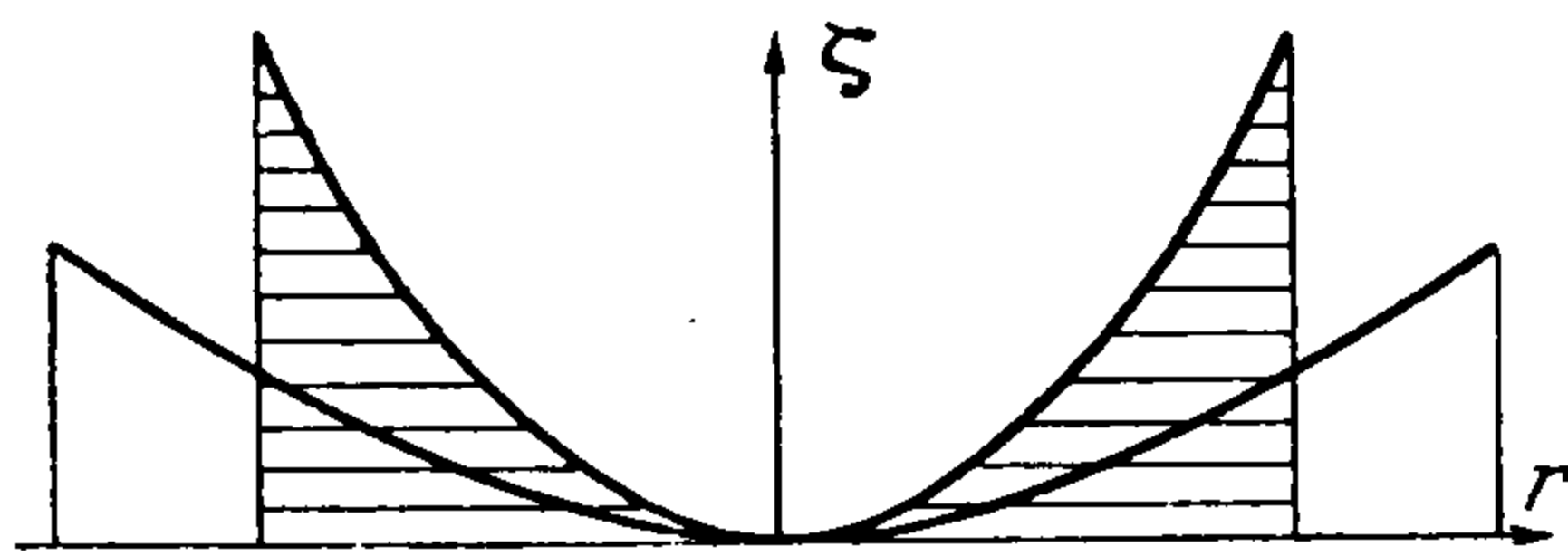
Сгруппировав его члены должным образом, получаем интегрируемые комбинации, дающие после интегрирования первый интеграл

$$2\xi f'^3 - 3\xi^2 f'^2 + \xi^3 f' = C \quad (3.9)$$

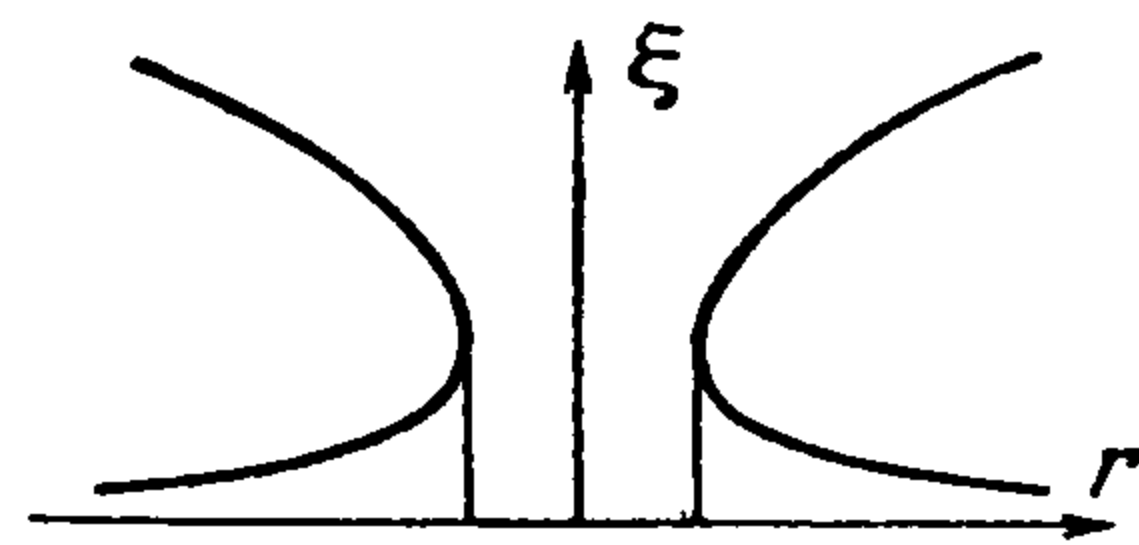
Уравнение свободной поверхности при  $p=0$  имеет вид:

$$\zeta = \frac{\sigma}{2gt} (\xi f' - f'^2) \quad (3.10)$$

Рассмотрим сначала случай  $C=0$  в уравнении (3.9). Оно распадается на два: 1)  $f'=0$ , что приводит к  $\zeta=0$  и 2)  $2f'^2 - 3\xi f' + \xi^2 = 0$ , что



Фиг. 5



Фиг. 6

дает два значения  $f'$ :  $f' = \xi$ , при котором  $\zeta = 0$ , и, наконец,  $f' = 1/2\xi$ , для которого

$$\zeta = \frac{\sigma}{8gt} \xi^2 = \frac{r^2}{8gt^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{t}} \xi = \frac{r}{2t} \quad (3.11)$$

В качестве возможной формы свободной поверхности получается параболоид вращения (фиг. 5). Его можно обрезать любым цилиндром  $\xi = \xi_0$ , так как для любого  $\xi_0$  выполняется условие стационарности разрыва

$$\left[ \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right]_{r=r_0} = \frac{dr_0}{dt}, \quad r_0 = \xi_0 \sqrt{\sigma t} \quad (3.12)$$

Значение постоянной  $\xi_0$  можно определить, если известен объем движущейся жидкости  $v$ . Так как

$$v = 2\pi\sigma t \int_0^{\xi_0} \zeta \xi d\xi = \frac{\pi}{2} r_0^2 \zeta_0 = \frac{\pi\sigma^2}{16g} \xi_0^4$$

то

$$\xi_0 = (16gv / \pi\sigma^2)^{1/4}$$

Заметим, что явление, представляющее аналогию рассматриваемому случаю, можно наблюдать во время очень сильного дождя, когда крупная капля его падает на твердую поверхность и, превратившись в кольцевую волну, растекается, оставаясь одним кольцом (см. также [10], стр. 14 — опыты с падением капли воды в молоко).

При  $t$  близких к нулю ордината  $\zeta_0$  велика,  $r_0$  мало. Будем считать, что в пределе имеем

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \left( \frac{\pi}{2} r_0^2 \zeta_0 \right) = v$$

В случае, когда постоянная  $C$  уравнения (3.9) отлична от нуля, подстановка  $f' = \xi u$  дает для  $\xi^2$  и  $\zeta$  выражения

$$\xi^2 = C_1 \left[ u(1-u) \left( \frac{1}{2} - a \right) \right]^{-1/2}, \quad \zeta = \frac{\sigma \xi^2 u (1-u)}{2gt} \quad (3.13)$$

Действительные значения получаются лишь в интервале  $0 \leq u \leq 1/2$  (фиг. 6). При  $\xi \rightarrow \infty$  ордината ветви, стремящейся к нулю, убывает как  $\xi^{-2}$ , следовательно, интеграл (3.6), выражающий объем жидкости, расходится.

Рассматривать разрывное решение здесь нельзя, так как скорость частицы  $\partial\varphi/\partial r = \xi u / \sqrt{\sigma t}$  нигде не равна скорости перемещения поверхности разрыва  $\xi = \xi_0$ , кроме точки  $u = 1/2$ , для которой  $\xi = \infty$ ,  $\zeta = \infty$ . Следовательно, в случае осевой симметрии при  $p = 0$  имеем единственное приемлемое решение, отвечающее  $C = 0$  и представляющее обрванный параболоид вращения для свободной поверхности.

4. Один случай политропного газа ( $\gamma = 2$ ). Для совершенного, не вязкого и не теплопроводного газа уравнения движения, неразрывности и адиабатичности можно написать в виде [3]

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho^0} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \rho^0}{\partial t} + \frac{\partial \rho^0 v}{\partial r} + (\nu - 1) \frac{\rho^0 v}{r} = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho^0 \gamma} \right) + v \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{p}{\rho^0 \gamma} \right) = 0 \quad (4.3)$$

Здесь  $v$  — скорость,  $p$  — давление,  $\rho^0$  — плотность,  $r$  — координата одномерного движения,  $t$  — время,  $\gamma$  — показатель адиабаты;  $\nu = 1$  для плоского,  $\nu = 2$  для цилиндрического,  $\nu = 3$  для сферического движения.

В случае  $p = a\rho^{\gamma}$  ( $a$  — постоянная) уравнение (4.3) выполняется тождественно. Для  $\gamma = 2$ , полагая  $2a\rho^0 = \rho$ , перепишем (4.1) и (4.2) в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial \rho}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial r} + (\nu - 1) \frac{\rho v}{r} = 0 \quad (4.4)$$

Эти же уравнения для  $\nu = 1, 2$ , если положить  $\rho = g\zeta$  ( $g$  — ускорение силы тяжести), определяют движение «мелкой воды», рассмотренное выше другим способом.

Автомодельные решения системы (4.4) можно искать в виде

$$v = \sigma_1 t^{\alpha_1} \Phi(\xi), \quad \rho = \sigma_2 t^{\alpha_2} F(\xi) \quad (4.5)$$

где

$$\xi = r \sqrt{\frac{\alpha}{\sigma t^\alpha}} \quad (4.6)$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sigma}{\alpha}}, \quad \sigma_2 = \frac{\sigma}{2\alpha}, \quad \alpha_1 = \frac{\alpha-2}{2}, \quad \alpha_2 = \alpha-2 \quad (4.7)$$

Для  $\Phi$ ,  $F$  получаем систему

$$\begin{aligned} (\alpha-2)F - \frac{\alpha}{2}\xi F' + (F\Phi)' + \frac{\nu-1}{\xi}F\Phi &= 0 \\ (\alpha-2)\Phi - \alpha\xi\Phi' + 2\Phi\Phi' + F' &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Если искать  $F$  в виде полинома второй степени и  $\Phi$  в виде полинома первой степени от  $\xi$ , то оказывается, что решение, представляющее интерес для газодинамической задачи, получается при  $\alpha=2$  (оно соответствует случаю  $p=1$  раздела 2):

$$\rho = \frac{\sigma}{36a}(\xi-B)^2, \quad v = \frac{\sqrt{2\sigma}}{3}\left(\xi + \frac{B}{2}\right) \quad (4.9)$$

В этом случае имеем постоянную во времени подачу массы газа в сечении  $\xi=0$ . Плотность распределяется по параболе второй степени (фиг. 1), причем точка  $\xi=B$  перемещается с постоянной скоростью. Такого рода движение можно интерпретировать как движение газа в пустоту. Если известна масса газа

$$M = (\rho v)_{\xi=0} = \frac{\sigma\sqrt{\sigma}B^2}{36a\sqrt{2}}$$

то известно и значение постоянной  $B$ . Давление

$$p = a\rho^{\sigma_2} = \frac{1}{4a}\rho^2 = \frac{\sigma^2}{1296a}(\xi-B)^4$$

изменяется непрерывно при переходе через точку  $\xi=B$ .

Что касается других значений  $\alpha$ , то для них получаются решения вида

$$v = \frac{2}{2+\nu}\frac{r}{t}, \quad \rho = \frac{\nu}{(2+\nu)^2}\frac{r^2}{t^2} \quad (4.10)$$

а для  $\nu=1$ ,  $\alpha=\frac{4}{3}$  еще решение

$$v = \frac{2}{3}\frac{r}{t}, \quad \rho = \frac{\sigma}{12t^{2/3}}(\xi^2 + C_1) = \frac{r^2}{9t^2} - \frac{C_2}{t^{2/3}} \quad (4.11)$$

с произвольной постоянной  $C_1$ . Эти решения содержатся, как частный случай, в общем решении Л. И. Седова<sup>[3]</sup> (гл. IV, § 16). Полученные выше решения для движения «мелкой воды», представленные на фиг. 3–5, могут быть использованы и для рассматриваемой газодинамической задачи.

Поступила 4 VII 1957

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Penney W. G. and Thornhill C. K. The dispersion, under gravity, of a column of fluid supported on a rigid horizontal plane. Phil. Trans. A, vol. 244, 1952.
2. Martin J. C. and Moyses W. J. An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane. Phil. Trans. A, vol. 244, 1952.
3. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. 4-е изд., М.—Л., 1957.
4. Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. ПММ, т. XVI, вып. 1, 1952.
5. Баренблатт Г. И. Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде. ПММ, т. XVI, вып. 6, 1952.
6. Баренблатт Г. И. О некоторых задачах неустановившейся фильтрации. Известия АН СССР, ОТН, № 6, 1954.
7. Баренблатт Г. И. О предельных автомодельных движениях в теории нестационарной фильтрации газа в пористой среде и теории пограничного слоя. ПММ, т. XVIII, вып. 4, 1954.
8. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., 1954.
9. Ламб Г. Гидродинамика. Перевод с англ. под ред. Н. А. Слезкина. М.—Л., 1947.
10. Флеминг Дж. Волны в воде, в воздухе и в эфире. М.—Л., 1926.