Прикладная математика и механика, Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

СЛАБЫЕ ВОЛНЫ В СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ИЗЛУЧЕНИЯ

В. А. Прокофьев

(Москва)

Начиная с классической работы Стокса [1], учет влияния излучения на распространение волн бесконечно малой амплитуды производился на основании закона Ньютона, в силу которого принималось в расчет лишь охлаждение излучением сжатых в волне участков газа (или жидкости). Ниже используются уравнения переноса радиации в движущейся среде и уравнения гидромеханики с учетом притока тепла за счет излучения, механического действия радиации и внутренней энергии. В работе рассматривается гидродинамическая теория распространения плоских возмущений на основании линеаризированных уравнений. Получено характеристическое (частотное) уравнение, определяющее затухание и скорость распространения вынужденных и свободных волн в равновесной среде при весьма широких предположениях о состоянии среды и ее оптических свойствах. Приведены примеры для некоторых индикатрис рассеяния.

Будем рассматривать одномерное движение (с плоскими волнами) вдоль оси x, массовыми силами будем пренебрегать. Среду (жидкость, газ) считаем однородной, вязкой, теплопроводной и излучающей. Если температура газа очень велика, то существенное значение может иметь механическое действие радиации, поэтому в общем случае наряду с тензором напряжений в сплошной среде мы должны учитывать тензор радиационного давления и наряду с внутренней энергией, обусловленной движениями элементарных микроскопических частиц среды, мы должны учитывать внутреннюю энергию за счет радиации (движения фотонов).

Уравнения гидромеханики с учетом излучения для одномерного движения сжимаемой жидкости совместно с термическим и связанным с ним калорическим уравнениями состояния образуют следующую систему (см., например, [2]):

$$\rho \frac{du}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}(p_{xx} + p_{Rxx}), \quad p_{xx} = -p + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{d\rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\rho\frac{d\varepsilon_T}{dt} + \frac{d\varepsilon_R}{dt} - \frac{\varepsilon_R - p_{xx} - p_{Rxx}}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x} - H_x\right) \qquad (1)$$

$$f(p, \rho, T) = 0, \quad \varepsilon_T = \varphi(p, \rho, T)$$

Здесь ρ, p, T, u — соответственно плотность, давление, температура и скорость газа, x, t — координата и время, $c_R = c/n$ — скорость переноса радиации в среде, c — скорость света в вакууме, $n = \sqrt{\mu'\varepsilon'}$ — показатель преломления, μ' — магнитная проницаемость, ε' — диэлектрическая постоянная, μ, λ — коэффициенты вязкости (считаются, как и коэффициент теплопроводности k, известными функциями от уже введенных параметров и новых неизвестных не образуют), ε_T — массовая плотность внутренней термической энергии.

Составляющая $H_x(x, t)$ потока радиации вдоль оси x, объемная плотность радиационной энергии $\varepsilon_R(x, t)$ и компонента $p_{Rxx}(x, t)$ тензора радиационных напряжений по определению выражаются через интегральную интенсивность излучения $J(x, t, s)$ или через интенсивность монохроматического излучения $J_\nu(x, t, s)$ соотношениями

$$
\begin{gathered}
H_x(x, t) = \int_0^\infty H_{\nu x}(x, t)\, d\nu = \int_{4\pi} J(x, t, s) \cos\vartheta\, d\Omega \\
\varepsilon_R(x, t) = \int_0^\infty \varepsilon_{R\nu}(x, t)\, d\nu = \frac{1}{c_R}\int_{4\pi} J(x, t, s)\, d\Omega \qquad (2) \\
p_{Rxx}(x, t) = \int_0^\infty p_{R\nu xx}(x, t)\, d\nu = -\frac{1}{c_R}\int_{4\pi} J(x, t, s) \cos^2\vartheta\, d\Omega \\
J(x, t, s) = \int_0^\infty J_\nu(x, t, s)\, d\nu
\end{gathered}
$$

Индексом ν обозначена зависимость соответствующей величины от частоты ν, индекс 4π у знака интеграла означает, что интегрирование выполняется по сфере единичного радиуса; символ s указывает на зависимость интенсивности от направления; $d\Omega$ — элемент телесного угла (или элемент поверхности сферы единичного радиуса с центром в точке x), Очевидно, в сферических координатах имеем $d\Omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$ $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, где ϑ — угол между лучом s и осью x, φ — угол поворота плоскости (x, s) относительно некоторого фиксированного положения.

Нетрудно убедиться, что для одномерного движения радиационное поле должно быть осесимметричным, т. е. интенсивность излучения будет зависеть только от угла ϑ, в силу чего в выражениях (1) может быть сразу выполнено интегрирование по φ.

Уравнение переноса и уравнение состояния радиации

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{c_R}\frac{\partial J_\nu}{\partial t} + \cos\vartheta \frac{\partial J_\nu}{\partial x} + \frac{u}{c_R}\frac{\partial J_\nu}{\partial x} = \omega_\nu(x, t)\Big[B_\nu(x, t) + \frac{\lambda_\nu(x, t)}{4\pi}\int_{4\pi} J_\nu(x, t, \vartheta') \times \\
\times \gamma_\nu(x, t, s', s)\, d\Omega' - (1 + \lambda_\nu) J_\nu(x, t, \vartheta)\Big] \qquad (3) \\
\eta_\nu(x, t) = F_\nu(p, \rho, T, \alpha_\nu, J_\nu)
\end{gathered}
$$

вместе с уравнениями (1) замкнут систему. Здесь обозначено

$$
\omega_\nu(x, t) = \rho(x, t)\, \alpha_\nu(x, t), \qquad B_\nu(x, t) = \frac{\eta_\nu(x, t)}{\alpha_\nu(x, t)}, \qquad \lambda_\nu(x, t) = \frac{\sigma_\nu(x, t)}{\alpha_\nu(x, t)}
$$

Коэффициенты излучения $\eta_\nu(x, t)$, поглощения $\alpha_\nu(x, t)$ и рассеяния $\sigma_\nu(x, t)$ зависят от ν и от x, t (через параметры состояния среды) и не зависят от направления. Функция рассеяния $\gamma_\nu(x, t, s', s)$ зависит как от направления рассматриваемого луча s, так и от направления s', с которого рассеянием переносится энергия в данное направление s. Она удовлетворяет условию

$$
\frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} \gamma_\nu(x, t, s', s)\, d\Omega = 1 \qquad (4)
$$

В неподвижной равновесной однородной и изотропной среде все направления равноправны и интенсивность излучения может зависеть только от частоты, поэтому из (2) и (3) получим

$$
\begin{aligned}
&H_{\nu x0} = 0, \qquad p_{R\nu xx0} = -p_{R\nu 0} = -\tfrac{1}{3}\varepsilon_{R\nu 0} = -\tfrac{4}{3}\pi J_{\nu 0}\\
&H_{x0} = 0, \qquad p_{Rxx0} = -p_{R0} = -\tfrac{1}{3}\varepsilon_{R0} = -\tfrac{4}{3}\pi J_0 \qquad (5)\\
&\qquad \eta_{\nu 0} = \alpha_{\nu 0} J_{\nu 0}
\end{aligned}
$$

Если считать равновесное излучение черным, то имеют место закон Кирхгофа и закон Планка:

$$J_{\nu 0} = B_{\nu 0} \quad \text{(функция Планка)}, \qquad J_0 = B_0 = \frac{\sigma_R}{\pi} T_0^4 \qquad (6)$$

где σ_R — постоянная Стефана — Больцмана.

Рассмотрим распространения малых плоских возмущений в безграничной покоящейся однородной газовой среде, которую будем считать до возмущения находящейся в равновесии относительно всех процессов, которые принимаются в расчет; при этом будем предполагать наличие и лучистого равновесия. Скорость и поток радиации в невозмущенной среде равны нулю. Соответствующие переменные части давления, плотности, температуры и т. д., вызванные перемещением среды с малой скоростью, а также скорость и поток радиации будем считать малыми вместе с их производными. Поскольку нарушение радиационного равновесия вызвано малыми возмущениями термодинамического равновесия среды, то возникающие приращения радиационных характеристик будем также считать малыми. Предположим, что все параметры (кроме скорости движения среды и потока радиации) имеют вид:

$$p = p_0(1 + p^*) \qquad (7)$$

где величины с индексом 0 внизу относятся к покоящемуся газу и являются постоянными величинами, а величины со звездочками наверху являются относительными малыми приращениями в результате возмущения среды. Подставляя равенства (7) в определение основных радиацонных характеристик (2), получим

$$
\begin{aligned}
&H_{\nu x}(x,t) = 2J_{\nu 0} h\pi_\nu^{(1)}(x,t), \qquad \varepsilon_{R\nu}(x,t) = \frac{4\pi J_{\nu 0}}{c_R}\left(1 + \frac{1}{2} h_\nu^{(0)}(x,t)\right)\\
&p_{R\nu xx}(x,t) = -\frac{4\pi J_{\nu 0}}{c_R}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} h_\nu^{(2)}(x,t)\right) \qquad (8)\\
&h_\nu^{(k)}(x,t) = \int_{-1}^{1} J_\nu^*(x,t,\mu)\,\mu^k\,d\mu \qquad (k = 0, 1, 2)
\end{aligned}
$$

Система уравнений (1), (3) после подстановки (7) и пренебрежения малыми второго порядка будет системой линейных интегро-дифференциальных уравнений относительно функций $p^*(x,t)$ и т. д., причем радиационные функции будут зависеть также от частоты, а приращение интенсивности излучения $J^*(x,t,\vartheta)$ еще и от направления (от угла ϑ).

Основные задачи о распространении малых плоских возмущений в неограниченной среде приводят к нахождению частного решения вида

$$D(x, t) = D^0 e^{ax+bt} \tag{9}$$

где под символом $D(x, t)$ следует понимать любую из малых величин u, p^*, ρ^*, T^*, J_ν^*, а под D^0 — ее начальное значение в начале координат (для вычисления u, p^*, ρ^* и т. д. берется действительная часть этого выражения). Величины D^0 не зависят от x и t и являются либо постоянными числами, либо функциями от частоты и направления (от угла ϑ). Величины a, b — постоянные комплексные числа.

Подставив (8) в линеаризованное уравнение переноса радиации, получим

$$(C_\nu + \mu) J_\nu^*(\mu) - \frac{\omega_{0\nu}}{a}(a_{1\nu}\rho^* + a_{2\nu}T^*) = \frac{\lambda_{\nu 0}\omega_{0\nu}}{4\pi}\int\limits_{4\pi} J_\nu^*(\mu')\gamma_{\nu 0}(s', s)\,d\Omega' \tag{10}$$

где

$$C_\nu = \frac{1}{a}\left[\omega_{0\nu}(1 + \lambda_{0\nu} - a_{3\nu}) + \frac{b}{c_R}\right], \qquad J_0 J^*(\mu) = \int\limits_0^\infty J_{\nu 0}(\mu) J_\nu^*(\mu)\,d\nu, \qquad \mu = \cos\vartheta$$

$$a_{1\nu} = \left(\frac{\partial \ln F_\nu}{\partial \ln \rho}\right)_0 + \left(\frac{\partial \ln \alpha_\nu}{\partial \ln \rho}\right)_0\left[\left(\frac{\partial \ln F_\nu}{\partial \ln \alpha_\nu}\right)_0 - 1\right] \tag{11}$$

$$a_{2\nu} = \left(\frac{\partial \ln F_\nu}{\partial \ln T}\right)_0 + \left(\frac{\partial \ln \alpha_\nu}{\partial \ln T}\right)_0\left[\left(\frac{\partial \ln F_\nu}{\partial \ln \alpha_\nu}\right)_0 - 1\right], \qquad a_{3\nu} = \left(\frac{\partial \ln F_\nu}{\partial \ln J_\nu}\right)_0$$

Функция F_ν задана равенством (3). Если считать выполняющимся закон Кирхгофа — Планка, то в общепринятых символах

$$a_{1\nu} = a_{3\nu} = 0, \qquad a_{2\nu} = \frac{h\nu}{kT_0}\left[\exp\frac{h\nu}{kT_0} - 1\right]^{-1}\exp\frac{h\nu}{kT_0}$$

Величины $\omega_{\nu 0}$, $\lambda_{\nu 0}$, $a_{1\nu}$, $a_{2\nu}$, $a_{3\nu}$ — известные постоянные для данной частоты и заданного состояния невозмущенной среды. Индикатриса рассеяния $\gamma_{\nu 0}(s', s)$ считается заданной функцией.

В силу того, что для одномерного движения функция J_ν^* не зависит от угла φ, можем написать

$$\int\limits_{4\pi} J_\nu^*(\mu')\gamma_{\nu 0}(s', s)\,d\Omega' = \int\limits_{-1}^{1} J_\nu^*(\mu')\gamma_{\nu 0}^{(1)}(\mu', \mu)\,d\mu' \tag{12}$$

где

$$\gamma_{\nu 0}^{(1)}(\mu', \mu) = \int\limits_0^{2\pi}\gamma_{\nu 0}(s', s)\,d\varphi', \qquad \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-1}^{1}\gamma_{\nu 0}^{(1)}(\mu', \mu)\,d\mu' = 1 \tag{13}$$

Уравнение переноса радиации (10) теперь перепишется так:

$$J_\nu^*(\mu) = f(\mu) + \lambda'\int\limits_{-1}^{1} J^*(\mu') K(\mu, \mu')\,d\mu' \tag{14}$$

где

$$f(\mu) = \frac{b_\nu}{\mu + C_\nu}, \qquad b_\nu = \frac{\omega_{0\nu}}{a}(a_{1\nu}\rho^* + a_{2\nu}T^*) \tag{15}$$

$$K(\mu, \mu') = \frac{\gamma_{\nu 0}^{(1)}(\mu', \mu)}{\mu + C_\nu}, \qquad \lambda' = \frac{\lambda_{\nu 0}\omega_{\nu 0}}{4\pi a}$$

Функция $f(\mu)$ на отрезке $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$ и ядро $K(\mu, \mu')$ в квадрате $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$, $-1 \leqslant \mu' \leqslant 1$ непрерывны при непрерывных b_ν и $\gamma_{\nu 0}^{(1)}(\mu', \mu)$, если выполняется хотя бы одно из условий

$$\operatorname{Im} C_\nu \neq 0, \qquad |\operatorname{Re} C_\nu| > 1 \tag{16}$$

Функция $\gamma_{\nu 0}^{(1)}(s', s)$ положительная и, как следует из (13), не превосходит 2π, в силу чего при выполнении условий (16) и считая, что $a_r \equiv \operatorname{Re} a$, $a_i \equiv \operatorname{Im} a$ не обращаются в нуль одновременно (одновременное обращение a_r, a_i в нуль соответствует движению среды как твердого тела), имеем

$$|K(\mu, \mu')| \leqslant \frac{2\pi}{\sqrt{(1 - |C_{\nu r}|)^2 + C_{\nu i}^2}} \tag{17}$$

где

$$C_{\nu i} \equiv \operatorname{Im} C_\nu = \frac{-(1 + \lambda_{\nu 0} - a_{3\nu})\,\omega_{0\nu} a_i + c_R^{-1}(b_i a_r - b_r a_i)}{a_r^2 + a_i^2}$$

$$C_{\nu r} \equiv \operatorname{Re} C_\nu = \frac{(1 + \lambda_{\nu 0} - a_{3\nu})\,\omega_{0\nu} a_r + c_R^{-1}(b_r a_r + b_i a_i)}{a_r^2 + a_i^2} \tag{18}$$

Следовательно, при условии (16) интегральное уравнение (14) является уравнением Фредгольма второго рода. Решение его, как следует из общей теории интегральных уравнений, можно найти для заданной индикатрисы рассеяния методом последовательных приближений в следующем виде:

$$J_\nu^*(\mu) = b_\nu \left(\frac{1}{C_\nu + \mu} + \lambda' \int_{-1}^{1} \frac{R(\mu, \xi, \lambda')}{C_\nu + \xi}\, d\xi \right)$$

где $R(\mu, \xi, \lambda')$ — резольвента ядра $K(\mu, \mu')$:

$$R(\mu, \xi, \lambda') = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda'^n \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \ldots \int_{-1}^{1} K(\mu, \xi_{n-1})\, K(\xi_{n-1}, \xi_{n-2}) \ldots K(\xi_1, \xi)\, d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1}$$

Этот ряд сходится абсолютно и равномерно относительно μ при условии

$$\left| \frac{\lambda_{0\nu}\omega_{0\nu}}{a} \right| < \begin{cases} |C_{\nu i}|, & \text{если } |C_{\nu r}| \leqslant 1 \\ \sqrt{(1 - |C_{\nu r}|)^2 + C_{\nu i}^2}\,, & \text{если } |C_{\nu r}| > 1 \end{cases} \tag{20}$$

или же при несколько ином условии:

$$\left| \frac{\lambda_{\nu 0}\omega_{\nu 0}}{a} \right| < 2\,|C_{\nu i}| \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{C_{\nu r} + 1}{C_{\nu i}} - \operatorname{arc\,tg} \frac{C_{\nu r} - 1}{C_{\nu i}} \right)^{-1} \tag{21}$$

Когда оба условия (16) не выполняются (C_ν является действительным числом, не превышающим по абсолютному значению единицу), то уравнение (14), положив $J_\nu^{*\prime}(\mu) = J_\nu^*(\mu)\,(C_\nu + \mu)$, можно переписать в виде

$$J_\nu^*(\mu) = b_\nu + \lambda' \int_{-1}^{1} J_\nu^*(\mu')\, K(\mu, \mu')\, d\mu' \tag{14'}$$

где b_ν не зависит от μ, а ядро — не ограниченное в точке $\mu = -C_\nu$. Как известно, в этом случае также существует единственное решение уравнения (14), если μ не является собственным значением уравнения.

Интегралы от функции $J_\nu^*(\mu)$, входящие в линеаризованные уравнение движения и уравнение энергии, можно вычислить либо непосредственно, либо с использованием соотношений, которые получатся интегрированием по направлениям уравнения переноса радиации, предварительно умноженного на единицу и на $\cos\vartheta$. В результате получим

$$\int_{-1}^{1} J_\nu^*(\mu)\,\mu^k\,d\mu = b_\nu \Psi_{\nu k} \qquad (k = 0, 1, 2) \tag{22}$$

$$\Psi_{\nu k} = (-1)^{k-1} k C_\nu^{k-1} 2^{2-k} + (-1)^k C_\nu^k \ln\frac{C_\nu + 1}{C_\nu - 1} + \lambda' \int_{-1}^{1} \frac{d\xi}{C_\nu + \xi} \int_{-1}^{1} R(\mu, \xi, \lambda')\mu^k d\mu$$

Отсюда после интегрирования по ν имеем

$$\int_{-1}^{1} J^*(\mu)\,\mu^k\,d\mu = \frac{1}{a}\left[X_{k1}(a, b)\,\rho^* + X_{k2}(a, b)\,T^*\right]$$

$$X_{kn}(a, b) = \int_0^\infty \omega_{\nu 0} a_{n\nu} \Psi_{k\nu}(a, b)\,d\nu \tag{23}$$

Подставив (9) в линеаризованные уравнения (1), придем к системе алгебраических линейных уравнений относительно p^*, ρ^* и т. д., условие существования нетривиального решения которой

$$\left\{-\frac{b}{a}\left[\rho_0 b - (\lambda_0 + 2\mu_0)\,a^2\right] + p_0 a h_1 + \frac{2\pi J_0}{c_R} X_{21}(a, b)\right\} \times$$
$$\times \left[\rho_0 b h_4 + \frac{2\pi J_0}{c_R}\frac{b}{a} X_{02}(a, b) + 2\pi J_0 X_{12}(a, b) - k_0 T_0 a^2\right] = \tag{24}$$
$$= \left[p_0 a h_2 + \frac{2\pi J_0}{c_R} X_{22}(a, b)\right]\left[-b\,(p_0 + 4p_{R0}) - \rho_0 b h_3 + \right.$$
$$\left. + \frac{2\pi J_0}{c_R}\frac{b}{a} X_{01}(a, b) + 2\pi J_0 X_{11}(a, b)\right]$$

представляет собой характеристическое (частотное) уравнение. Оно определяет величину a через величину b в зависимости от физических свойств и состояния невозмущенной среды. Определение затухания и дисперсии малых колебаний в однородной среде с учетом вязкости, теплопроводности и излучения при весьма общих предположениях о состоянии среды и состоянии ее излучения сводится к решению уравнения (24).

В уравнение (24) вошли постоянные

$$h_1 = \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho}\right)_0, \quad h_2 = \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln T}\right)_0, \quad h_3 = -\left(\frac{\partial \varepsilon_T}{\partial \rho}\rho\right)_0, \quad h_4 = c_{v0} T_0 \tag{25}$$

отношение удельных теплоемкостей γ и адиабатическая скорость звука c_0 в покоящейся среде, причем

$$\gamma = 1 + \frac{h_2 h_3}{h_1 h_4} + \frac{h_2}{h_1 h_4}\frac{p_0}{\rho_0}, \qquad c_0^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{0s} = h_1 \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \tag{26}$$

Для идеального газа с постоянными теплоемкостями, подчиняющегося уравнениям $p = \rho RT$, $\varepsilon_T = c_v T$, имеем $h_1 = h_2 = 1$, $h_3 = 0$.

Если имеет место разовая ионизация одноатомного газа и если предположить, что ионизация — равновесная в любой момент времени, и считать образующуюся смесь нейтральных атомов, ионов и электронов идеальным газом, то можно написать уравнения состояния:

$$p = R(1+z)\rho T, \qquad \varepsilon_T = \frac{3}{2} R(1+z) + \frac{\chi}{m_a} z \tag{27}$$

где χ — потенциал ионизации, m_a — масса атома газа, R — газовая постоянная, z — степень ионизации. Последняя величина на основании уравнения действующих масс может быть представлена известной формулой Саха. Из (27) получим

$$h_1 = 2(1+z_0)^{-1}(2-z_0)^{-1}, \qquad h_2 = h_1 - \frac{z_0}{1+z_0}\frac{1-z_0}{2-z_0}\left(\frac{3}{2}+\frac{\chi}{kT_0}\right)$$

$$h_3 = \frac{z_0}{1+z_0}\frac{1-z}{2-z_0}\left(\varepsilon_{T_0}+\frac{\chi}{kT_0}\right) \tag{28}$$

$$h_4 = \varepsilon_{T_0} - \frac{\chi}{m_a} z_0 + \frac{z_0}{1+z_0}\frac{1-z_0}{2-z_0}\left(\frac{3}{2}+\frac{\chi}{kT_0}\right)\left(\varepsilon_{T_0}+\frac{\chi}{m_a}\right)$$

Для очень многих индикатрис рассеяния ядро интегрального уравнения (14) будет вырожденным. Это будет иметь место, например, для всех случаев, когда $\gamma_{\nu 0}(s', s)$ является функцией $\cos(s', s)$, в частности для функции рассеяния Гордова, функций, представимых в виде многочленов по полиномам Лежандра, и т. д. Предположим, что

$$\gamma_{\nu 0}^{(1)}(\mu', \mu) = \sum_{i=1}^{n} k_i''(\mu)\, k_i(\mu') \tag{29}$$

Ядро уравнения (14) примет вид:

$$K(\mu, \mu') = \sum_{i=1}^{n} k_i(\mu)\, k_i(\mu'), \qquad k_i(\mu) = \frac{k''(\mu)}{C_\nu + \mu} \tag{30}$$

Здесь считается, что n — конечное число, а $k_i(\mu)$ и $k_i'(\mu')$ — линейно независимые функции одного только аргумента; следовательно,

$$J_\nu^*(\mu) = f(\mu) + \lambda' \sum_{k=1}^{n} x_i k_i(\mu) \tag{31}$$

Числа x_i определятся из системы

$$x_i - \lambda' \sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_k = f_i, \quad a_{ik} = \int_{-1}^{1} k_i'(\mu)\, k_k(\mu)\, d\mu, \qquad f_i = \int_{-1}^{1} f(\mu)\, k_i'(\mu)\, d\mu \tag{32}$$

В качестве примера рассмотрим индикатрису А. Н. Гордова [3]

$$\gamma_\nu(x, t, s', s) = [1 + \tfrac{1}{3} q_\nu(x, t)]^{-1}\,[1 + p_\nu(x, t)\cos(s', s) + q_\nu(x, t)\cos^2(s', s)]$$

$$\cos(s', s) = \cos\vartheta \cos\vartheta' + \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos(\varphi - \varphi') \tag{33}$$

Ядро и параметр λ' интегрального уравнения (31) запишем в виде

$$K(\mu, \mu') = \frac{1}{\mu + C_\nu}\,[1 + \tfrac{1}{2} q_{\nu_0} + p_{\nu_0}\mu\mu' + \tfrac{1}{2} q_{\nu_0}\mu^2\mu'^2 - \tfrac{1}{2} q_{\nu_0}\mu^2 - \tfrac{1}{2} q_{\nu 0}\mu'^2]$$

$$\lambda' = \frac{\lambda_{\nu 0}\,\omega_{0\nu}}{4\pi a\,(1 + {}^1/_3\, q_{\nu 0})} \tag{34}$$

В (31) величины $k_i(\mu)$ будут рациональными функциями от μ. Коэффициенты x_i будут содержать как целые степени C_ν, так и функцию $\ln[C_\nu + 1)/(C_\nu - 1)]$. Положив в (33) $p_\nu = 0$, $q_\nu = 1$, получим индикатрису рассеяния Рэлея. Дискриминант системы (32) будет равен

$$\Delta(\lambda') = 2\,[-a_{13}^2 + a_{11}(a_{33} + \tfrac{1}{3} a_{13})]\,\lambda'^2 - (a_{11} + a_{33} - 2a_{13})\,\lambda' + 1 \tag{35}$$

Для значений λ', не являющихся собственным значением (система имеет два собственных значения λ'), получим следующее решение интегрального уравнения (31):

$$J_\nu^*(\mu) = \frac{b_\nu}{C_\nu + \mu}\left\{1 + \frac{\lambda'}{\Delta(\lambda')}\left[(3-\mu^2)\Delta_1 + (1+\mu^2)\Delta_2\right]\right\} \tag{36}$$

где

$$\Delta_1 = \tfrac{1}{2}a_{11} - \tfrac{1}{2}a_{11}a_{33}\lambda' + a_{13}{}^2\lambda', \qquad \Delta_2 = (1 + \lambda' a_{33})a_{13} - \tfrac{1}{2}a_{11}a_{33}\lambda'$$

$$a_{11} = \ln\frac{C_\nu + 1}{C_\nu - 1}, \qquad a_{13} = -\tfrac{1}{2}C_\nu(2 - C_\nu a_{11})$$

$$a_{33} = -\tfrac{1}{2}C_\nu\left(\tfrac{2}{3} + 2C_\nu{}^2 - C_\nu{}^3 a_{11}\right)$$

Отсюда

$$\int_{-1}^{1} J_\nu^*(\mu)\,d\mu = b_\nu\left\{\left(1 + \frac{\lambda'}{\Delta(\lambda')}\left[3\Delta_1 + \Delta_2 + (\Delta_1 - \Delta_2)C_\nu\right]\right)a_{11} + \right.$$
$$\left. + \frac{2\lambda'}{\Delta(\lambda')}(\Delta_2 - \Delta_1)\right\} \tag{37}$$

$$\int_{-1}^{1} J_\nu^*(\mu)\,\mu\,d\mu = b_\nu\left\{2\left[1 + \frac{4\lambda'}{3\Delta(\lambda')}(2\Delta_1 + \Delta_2)\right] - \right.$$
$$\left. - a_{11}C_\nu\left[1 + \frac{\lambda'}{\Delta(\lambda')}\left(3\Delta_1 + \Delta_2 + C_\nu(\Delta_1 - \Delta_2)\right)\right]\right\}$$

$$\int_{-1}^{1} J_\nu^*(\mu)\,\mu^2 d\mu = b_\nu\left\{-2C_\nu\left[1 + \frac{\lambda'}{\Delta(\lambda')}\left\{\tfrac{4}{3}(\Delta_1 + \Delta_2) - C_\nu{}^2(\Delta_1 - \Delta_2)\right)\right\}\right] + $$
$$\left. + \left[1 + \frac{\lambda'}{\Delta(\lambda')}\left\{(3 - C_\nu{}^2)\Delta_1 + (1 + C_\nu{}^2)\Delta_2\right\}\right]C_\nu{}^2 a_{11}\right\}$$

Для сферической индикатрисы рассеяния (изотропное рассеяние $p_{\nu 0} = q_{\nu 0} = 0$) имеем

$$J_\nu^*(\mu) = \frac{b_\nu}{C_\nu + \mu}\,\frac{1}{1 - \lambda' a_{11}} \tag{38}$$

что можно сразу получить из уравнения (10). Далее

$$\Psi_{0\nu}(a, b) = \frac{a_{11}}{1 - \lambda' a_{11}}, \qquad \Psi_{1\nu}(a, b) = \frac{2 - C_\nu a_{11}}{1 - \lambda' a_{11}}, \qquad \Psi_{2\nu}(a, b) = C_\nu\frac{C_\nu a_{11} - 2}{1 - \lambda' a_{11}}$$

Для любой зависимости коэффициента поглощения и рассеяния от частоты задача свелась к квадратурам.

Если среда «серая», т. е. все радиационные характеристики не зависят от частоты ν, что можно принять, лишь считая уравнения осредненными по частотам, либо если существенное значение имеет только излучение в узких пределах от ν до $\nu + d\nu$, а в остальном интервале частот $J_\nu \approx 0$, то индекс ν можно просто отбросить и предыдущие выкладки определят сразу интегральные характеристики $J^*(\mu)$ и др. К аналогичному результату придем, если в линеаризованном уравнении переноса радиации считать $\lambda_{\nu 0}$ и $\gamma_{\nu 0}$ не зависящими от частоты, либо если считать $\lambda_{\nu 0} = 0$.

Поступила 22 III 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Stokes G. An examination of the effect of radiation of heat on the propagation of sound, Philosophical Magazine, ser. 4, vol. I, 1851, p. 305.
2. Прокофьев В. А. К вопросу об учете излучения при одномерном стационарном движении одноатомного газа, Ученые записки Московского университета, № 172, Механика, вып. 5, 1954, стр. 79
3. Гордов А. Н. О возможности применения теории рассеяния к реальной атмосфере, Журнал геофизики, т. 6, № 4 (22), 1936, стр. 295.