Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

В. Е. Гермаидзе, Н. Н. Красовский
(Свердловск)

§ 1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t) + R_i(x_1, \ldots, x_n, t) \tag{1.1}$$

где функции X_i непрерывны и удовлетворяют условиям Липшица

$$|X_i(x'', t) - X_i(x', t)| \leqslant L\|x'' - x'\| \qquad (L = \text{const}) \tag{1.2}$$

в области

$$\|x\| < H, \qquad t \geqslant 0 \qquad (\|x\| = \sup(|x_1|, \ldots, |x_n|)) \tag{1.3}$$

Функции R_i определены и ограничены в области (1.3). В точке $x=0$ функции R_i могут не обращаться в нуль, в то время как $X_i(0, \ldots, 0, t) = 0$. Предполагается также, что функции R_i удовлетворяют условиям существования решений.

Наряду с системой (1.1) будем рассматривать уравнения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t) \tag{1.4}$$

Назовем нулевое решение уравнений (1.4) устойчивым при постоянно действующих возмущениях, ограниченных в среднем, если для любой пары чисел $\varepsilon > 0$, $T > 0$ можно указать числа $\delta > 0$ и $\eta > 0$ такие, что при выполнении неравенства

$$\int\limits_t^{t+T} \varphi(\xi)\, d\xi < \eta \tag{1.5}$$

где $\varphi(t)$ — какая-либо непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$|R_i(x_1, \ldots, x_n, t)| \leqslant \varphi(t) \quad \text{в области } \|x\| < \varepsilon \tag{1.6}$$

каждое решение $x(x_0, t_0, t)$ уравнений (1.1) с начальными данными $\|x_0\| < \delta$ удовлетворяет при всех $t \geqslant t_0$ неравенству $\|x(x_0, t_0, t)\| < \varepsilon$.

Замечание. Это определение обобщает известное определение устойчивости при постоянно действующих возмущениях [1–4] в том смысле, что условия (1.5) и (1.6) налагают ограничения на среднее значение абсолютной величины возмущений $R_i(x, t)$ на отрезке времени выбранной длины T, но не требуют малости этих возмущений в каждый момент времени.

Теорема 1.1. Если нулевое решение уравнений (1.4) равномерно асимптотически устойчиво [3], то оно устойчиво при постоянно действующих возмущениях, ограниченных в среднем.

Доказательство. В статьях [3,5,6,7] доказано существование определенно-положительной функции Ляпунова $u(x_1, \ldots, x_n, t)$, производная которой по времени в силу уравнений (1.4) есть функция определенно-отрицательная. Кроме того, $u(x_1, \ldots, x_n, t)$ имеет частные производные любого порядка, причем частные производные $\partial u/\partial x_i$ ограничены. Из последнего следуют неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| < N, \qquad |u(x_1, \ldots, x_n, t)| < N\|x\| \qquad (N = \text{const}) \tag{1.7}$$

Пусть дано $\varepsilon > 0$. В силу определенной положительности $u(x_1, \ldots, x_n, t)$ и выполнения неравенства (1.7) можно указать числа $\alpha > 0$ и $\delta = \alpha / Ne^2$ такие, что $u \geqslant \alpha$ на поверхности $\|x\| = \varepsilon$ и $u \leqslant \alpha / e^2$ на поверхности $x\| = \delta$. Далее по ε и δ можно подобрать числа $c(\varepsilon, \delta)$ и $c_3(\varepsilon, \delta)$ такие, что в области

$$\delta \leqslant \|x\| \leqslant \varepsilon \tag{1.8}$$

будут выполняться неравенства

$$c\|x\| \leqslant u(x_1, \ldots, x_n, t) \leqslant N\|x\|, \qquad \left[\frac{du}{dt}\right]_{(1.4)} < -c_3\|x\| \tag{1.9}$$

Наконец, если ввести функцию $v(x_1, \ldots, x_n, t) = c_3^{-1}(\varepsilon, \delta)\, u$, то в области (1.8) имеют место следующие оценки:

$$|R_i(x_1, \ldots, x_n, t)| < \varphi(t)\|x\|/\delta, \quad c_2\|x\| \leqslant v(x_1, \ldots x_n, t) \leqslant c_1\|x\| \tag{1.10}$$

$$\left[\frac{dv}{dt}\right]_{(1.4)} \leqslant -\|x\|, \qquad \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| < c_1 \qquad (c_1 = Nc_3^{-1}, \quad c_2 = cc_3^{-1}) \tag{1.11}$$

В заметке [8] показано, что при выполнении условий (1.10) и (1.11) и условия

$$\frac{1}{T} \int_{t}^{t+T} \Psi(\xi)\, d\xi < \frac{c_2(1-q)}{c_1^2} \qquad \left(\Psi = \frac{\varphi}{\delta}\right) \text{ при } t \geqslant t_0 \tag{1.12}$$

можно построить функцию $W(x_1, \ldots, x_n, t) = e^{\beta(t)}v$, удовлетворяющую неравенствам [в области (1.8)]

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{(1.1)} < -\frac{q}{c_1} w, \qquad |\beta(t)| < \frac{1-q}{c_1} T \tag{1.13}$$

где q — любое наперед выбранное число из интервала (1.1). Выберем q так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1-q}{c_1} T < 1 \tag{1.14}$$

При таком выборе q в области (1.8) выполняется условие (по выбору δ)

$$\max_{\|x\| = \delta} w(x_1, \ldots, x_n, t) < \min_{\|x\| = \varepsilon} w(x_1, \ldots, x_n, t) \tag{1.15}$$

Выполнение неравенств (1.13) и (1.15) в области (2.8) позволяет сделать заключение (обычным для метода функций Ляпунова способом) о невозможности существования траектории уравнений (1.1), начавшейся в области $\|x\| \leqslant \delta$ и выходящей из области $\|x\| < \varepsilon$ при возрастании времени. Теорема доказана.

Примечание 1. Если $X_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ — периодические функции времени (или не зависят явно от t), то асимптотическая устойчивость всегда равномерна [9]. В этом случае функция Ляпунова, использованная при доказательстве теоремы 1.1, существует в предположении лишь непрерывности функций $X_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ [6,7]. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 1.2. Если нулевое решение уравнений (1.4), где $X_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ — непрерывные периодические функции времени (или не зависят явно от времени), асимптотически устойчиво, то оно устойчиво при постоянно действующих возмущениях, ограниченных в среднем.

Примечание 2. Описанный выше прием построения функции Ляпунова $W(x_1, \ldots, x_n, t)$ можно применить для доказательства существования периодического решения уравнений (1.1) так, как это сделано в статье [10], с той разницей, что возмущения $\mu R_i(x_1, \ldots, x_n, t, \mu)$ (μ — параметр) можно здесь предполагать «малыми в среднем».

§ 2. Рассмотрим системы уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x(t - h_{i1}(t)), \ldots, x_n(t - h_{in}(t)), t) + \tag{2.1}$$

$$+ R_i(x_1(t - h_{i1}(t)), \ldots, x_n(t - h_{in}(t)), t) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1(t - \eta_{i1}(t), \ldots, x_n(t - \eta_{in}(t)), t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.2}$$

где функции X_i в области (1.2) удовлетворяют тем же условиям, что и выше (1.2), (1.3). Величины запаздываний — кусочно-непрерывные функции, удовлетворяющие неравенствам

$$0 \leqslant h_{ik} \leqslant h, \qquad 0 \leqslant \eta_{ik} \leqslant h \qquad (h = \mathrm{const};\ i, k = 1, \ldots, n) \tag{2.3}$$

Метод функций Ляпунова распространен на уравнения с запаздываниями в статье [11]. Основные понятия и обозначения этого метода применяются в этой заметке в том же смысле, что и в статье [11].

Нулевое решение уравнений (2.2) назовем устойчивым при постоянно действующих возмущениях, ограниченных в среднем, если для любой пары чисел $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ можно указать числа $\delta > 0$, $\eta > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что при выполнении неравенств (при каждом $t \geqslant t_0$)

$$\int_t^{t+T} \Psi(\xi)\, d\xi < \eta \qquad (\Psi(\xi) = \sup(|h_{ik}(\xi) - \eta_{ik}(\xi)|)), \qquad \int_t^{t+T} \varphi(\xi)\, d\xi < \gamma \tag{2.4}$$

где $\varphi(t)$ — какая-либо непрерывная функция, удовлетворяющая условию (1.6), все решения $x(x_0(t_0 - \vartheta), t_0, t)$ уравнений (2.1) с начальными данными $x_{0i}(t_0 - \vartheta)$ $(0 \leqslant \vartheta \leqslant h,\ i = 1, \ldots, n)$ из области

$$\|x_0(t_0 - \vartheta)\|_h \leqslant \delta \qquad (\|x_0(t_0 - \vartheta)\|_h = \sup|x_{i0}(t_0 - \vartheta)|)$$

удовлетворяют неравенству

$$\|x(x_0(t_0 - \vartheta), t_0, t)\| < \varepsilon \qquad \text{при } t \geqslant t_0 \tag{2.5}$$

Теорема 2.1. Если нулевое решение уравнений (2.2) равномерно асимптотически устойчиво [11], то оно устойчиво при постоянно действующих возмущениях, ограниченных в среднем.

Доказательство. В статье [11] доказано существование функционала $V(y_1(-\vartheta), t)$, удовлетворяющего оценкам

$$F_1(\|y(\vartheta)\|_h) \leqslant V(y(-\vartheta), t) \leqslant F_2(\|y(-\vartheta)\|_h)$$

$$\varlimsup_{\Delta t \to +0} \left[\frac{\Delta V}{\Delta t}\right]_{(2.2)} \leqslant -F_3(\|y(-\vartheta)\|_h) \tag{2.6}$$

$$|V(y''(-\vartheta), t) - V(y'(-\vartheta), t)| < L_1 \|y''(-\vartheta) - y'(-\vartheta)\|_h$$

$$(F_{1, \ldots, 3}(z) > 0 \text{ при } z \neq 0,\ L_1 = \mathrm{const})$$

Так же[1], как это было сделано при доказательстве теоремы 1.1, выделим в пространство непрерывных функций $y(-\vartheta)$ $(0 \leqslant \vartheta \leqslant h)$ кольцевую область $\delta \leqslant \|y(-\vartheta)\|_h \leqslant \varepsilon$ и построим функционал $W(y(-\vartheta), t) = e^{\beta(t)}V$, который будет удовлетворять в этой области оценкам, аналогичным оценкам (1.13) и (1.15), а именно

$$\overline{\lim_{\Delta t \to +0}} \left[\frac{\Delta W}{\Delta t}\right]_{(2.1)} < -\frac{q}{c_1} W, \qquad |\beta(t)| < \frac{1-q}{c_1} T \tag{2.7}$$

Эти оценки и позволяют завершить доказательство рассуждениями, характерными для второго метода Ляпунова, опираясь на правило замены функции Ляпунова функционалом [11].

Примечание 1. Смысл теоремы (2.1) состоит в том, что малые в среднем изменения запаздываний, а также малые в среднем возмущения, наложенные на систему с запаздываниями, не выведут систему из устойчивого состояния, если эта система была равномерно асимптотически устойчива.

2. Если правые части уравнений (2.2) и запаздывания $h_{ij}(t)$ — периодические функции времени (или не зависят явно от t), то асимптотическая устойчивость всегда равномерна [11]. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. Если нулевое решение уравнений (2.2), где функции X_i и величины запаздывания $\eta_{ik}(t)$ — периодические (или не зависящие явно от t) функции времени одного и того же периода T, асимптотически устойчиво, то оно устойчиво при постоянно действующих возмущениях, ограниченных в среднем.

§ 3. При исследовании устойчивости решений систем уравнений часто пренебрегают членами, содержащими гармоники высшего порядка. Следующая теорема имеет цель — дать обоснование этого приема.

Рассмотрим систему (1.1), где периодические функции X_i удовлетворяют тем же условиям, что и выше в § 1. Функции $R_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ будем полагать ограниченными и удовлетворяющими условиям Липшица по аргументам x_j $(j = 1, \ldots, n)$

$$|R_i(x_1, \ldots, x_n, t)| \leqslant K, \qquad |R_i(x'', t) - R_i(x', t)| < L\|x'' - x'\| \tag{3.1}$$
$$(L,\ K = \mathrm{const})$$

Пусть далее существует по крайней мере одно число $\tau > 0$ (период) такое, что при каждом фиксированном $x = x^\circ$ выполняется для всех $t \geqslant t_0$ равенство

$$\int_t^{t+\tau} R_i(x^\circ, \xi)\, d\xi = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.2}$$

Теорема 3.1. Если нулевое решение уравнений (1.4) равномерно асимптотически устойчиво, то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать числа $\delta > 0$ и $\tau_0 > 0$ такие, что решения $x(x_0, t_0, t)$ уравнений (1.1) с начальными данными, удовлетворяющими неравенству $\|x_0\| \leqslant \delta$, будут удовлетворять при всех $t \geqslant t_0$ неравенству $\|x(x_0, t_0, t)\| < \varepsilon$, коль скоро условие (3.2) выполняется хотя бы для одного $\tau \leqslant \tau_0$.

[1] Подробного доказательства проводить не будем, так как это доказательство аналогично рассуждениям из § 1 с той разницей, что вместо функций Ляпунова следует писать функционалы и вместо нормы (1.3) — писать норму $\|x(-\vartheta)\|_h$.

Примечание. Смысл теоремы 3.1 состоит в том, что при наложении на равномерно асимптотически устойчивую систему достаточно быстрых колебаний, хотя бы и не малой амплитуды, не нарушается устойчивость этой системы.

Доказательство. Так же как при доказательстве теоремы (1.1), строим функцию Ляпунова

$$W(x_1, \ldots, x_n, t) = e^{\beta(t)} v(x_1, \ldots, x_n, t) \tag{3.3}$$

где $v(x_1, \ldots, x_n, t)$ в области (1.8) удовлетворяет оценкам (1.11). Докажем теорему от противного, а именно: предположим, что какое бы малое τ ни взять, будет существовать интегральная кривая, начинающаяся при $t = t_0$ на поверхности $\|x\| = \delta$, целиком лежащая в области (1.8) и в момент $t = t_1$ пересекающая поверхности $\|x\| = \varepsilon$, несмотря на то, что выполнены условия теоремы. Вычислим производную по времени от $W(x_1, \ldots, x_n, t)$ вдоль этой кривой:

$$\frac{dW}{dt} = e^{\beta(t)} \left(\beta'(t) v + \left[\frac{dv}{dt}\right]_{(1.4)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} R_i\right) \tag{3.4}$$

В силу выполнения оценок (1.11) имеем в области (1.8)

$$\frac{dW}{dt} \leqslant W\left(\beta'(t) - \frac{1}{c_1} + \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} R_i\right) \tag{3.5}$$

Определим функции $\omega(t) \geqslant 0$ и $\beta(t)$ равенствами

$$\int_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k+1}} \omega(\xi)\, d\xi = \frac{1-q}{c_1}\tau -$$

$$- \int_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k+1}} \frac{1}{v}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(x_1(t), \ldots, x_n(t), t)}{\partial x_i} R_i(x_i(t), \ldots, x_n(t), t)\right] dt \tag{3.6}$$

$$\beta(t) = \frac{1-q}{c_1}(t - t_0) - \int_{t_0}^{t} \frac{1}{v}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} R_i\right] d\xi - \int_{t_0}^{t} \omega(\xi)\, d\xi \tag{3.7}$$

$$(\vartheta_k = t_0 + k\tau, \quad x_i(t) = x_i(x_0, t_0, t), \quad k = 0, 1, \ldots, \quad 0 < q < 1)$$

Оценим величину интеграла в правой части равенства (3.6). Так как в силу выполнения условия (3.2)

$$\int_{\vartheta_k}^{\vartheta_k+1} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}, \vartheta_k)}{\partial x_i} R_i(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}, t)\right] dt = 0$$

$$(x_i^{(k)} = x_i(x_0, t_0, \vartheta_k))$$

то, очевидно, справедливо равенство

$$\int_{\vartheta_k}^{\vartheta_k+1} \frac{1}{v}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(x_1(t), \ldots, x_n(t), t)}{\partial x_i} R_i(x_1(t), \ldots, x_n(t), t)\right] dt =$$

$$= \int_{\vartheta_k}^{\vartheta_k+1} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial v(x_1(t), \ldots, x_n(t), t)}{\partial x_i} R_i(x_1(t), \ldots, x_n(t), t) \frac{1}{v(x(t), t)} -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial v(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}, \vartheta_k)}{\partial x_1} R_i(x^{(k)}, t) \frac{1}{v(x^{(k)}, \vartheta_k)}\right)\right] dt$$

Из условий теоремы следует[1] существование постоянной $Q > 0$ (которая зависит от ε, K, L, L_1, но не зависит от выбора интегральной кривой) такой, что

$$\left| \int\limits_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k+1}} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} R_i \right] dt \right| < Q\tau^2 \tag{3.8}$$

Выберем τ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\tau < \frac{(1-q)\,\delta}{c_1 Q} = \tau_0(\varepsilon, q) \tag{3.9}$$

При таком выборе τ правая часть равенства (3.6) будет положительна, что обеспечивает возможность подбора неотрицательной функции $\omega(t)$, удовлетворяющей условию (3.6).

Так как $\beta(t_0 + k\tau) = \beta(\vartheta_k) = 0$, то, оценивая $\beta(t)$ на отрезке времени длиной τ, получим

$$|\beta(t)| < P\tau_0 \qquad (P = \mathrm{const}) \tag{3.10}$$

Наконец, выберем величину q так, чтобы выполнялось неравенство $\beta(t)| < 1$. При таком выборе q вдоль рассматриваемой интегральной кривой выполняются неравенства (1.13) и (1.15). Это позволяет завершить доказательство, так как предположение, сделанное в начале его, легко приводится к противоречию с неравенствами (1.13) и (1.15).

В заключение заметим, что метод функций Ляпунова был применен в последней теореме не совсем обычным образом. Именно функция Ляпунова $W(x_1, \ldots, x_n, t)$ подбиралась для данной траектории, однако это не нарушает корректности доказательства, так как оценки свойств бесконечно малого высшего предела и определенной положительности построенной функции W не зависят от выбора траектории.

Поступила 18 VII 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1955.
2. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Гостехиздат, 1952.
3. Малкин И. Г. К вопросу об обращении теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. ПММ, т. XVIII, вып. 1, 1954.
4. Дубошин Г. Н. К вопросу об устойчивости движения относительно постояннодействующих возмущений. Труды Астрон. ин-та им. Штернберга, т. XIV, 1940.
5. Красовский Н. Н. Обращение теорем второго метода Ляпунова и вопросы устойчивости по первому приближению. ПММ, т. XX, вып. 2, 1956.
6. Курцвейль Я. Об обращении второй теоремы Ляпунова об устойчивости движения. Чехословацкий мат. журн. 6 (81), 1956.
7. Massera J. L. Contributions to stability theory. Annals of Math., vol. 64, № 1, 1956.
8. Гермаидзе В. Е. Об асимптотической устойчивости по первому приближению. ПММ, т. XXI, вып. 1, 1957.
9. Massera J. L. On Liapounoff's condition of stability. Annals of Math., vol. 50, № 3, 1949.
10. Берштейн. К вопросу о периодических решениях нелинейных систем с малым параметром. ДАН СССР, т. CXIII, № 1, 1956.
11. Красовский Н. Н. О применении второго метода Ляпунова для уравнений с запаздываниями времени. ПММ, т. XX, вып. 3, 1956.

[1] Если применить к последнему подынтегральному выражению теорему о среднем, учитывая, что функция v имеет непрерывные частные производные любого порядка.