Прикладная математика и механика, Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

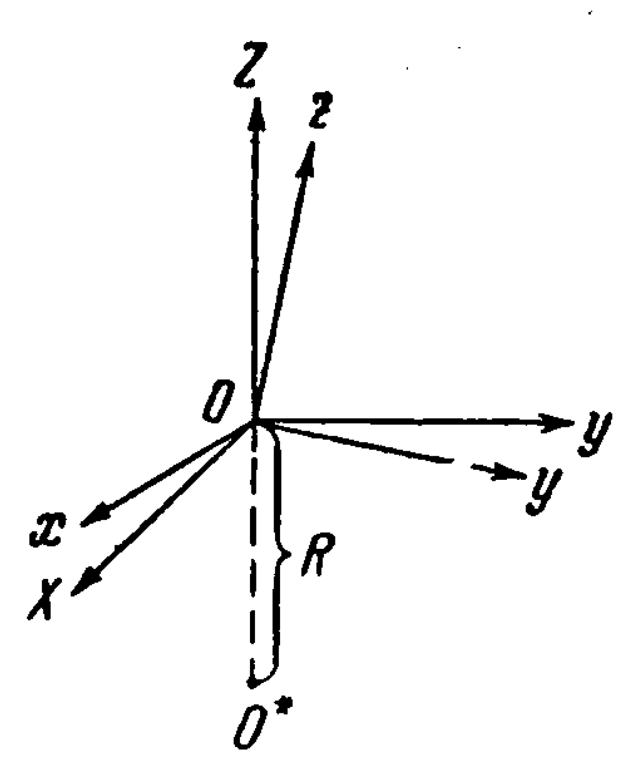
НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ СИЛ

В. В. Белецкий

(Москва)

§ 1. Уравнения движения. Рассмотрим движение твердого тела около неподвижной точки в ньютоновском центральном поле сил.

Пусть неподвижная точка тела O закреплена на расстоянии R от центра притяжения O^*. Поместим в неподвижную точку тела начало O неподвижной системы координат $OXYZ$, причем ось OZ направлена от центра притяжения (фиг. 1). Свяжем с точкой O еще подвижную систему координат $Oxyz$, оси которой направлены по главным осям инерции тела. Пусть γ, γ', γ'' — направляющие косинусы этих осей с осью OZ.



Фиг. 1

Силовая функция U ньютоновского поля сил, действующего на твердое тело, дается формулой

$$U(\gamma, \gamma', \gamma'') = \int\limits_V \frac{\mu\rho(x, y, z)\,dV}{\sqrt{R^2 + 2R(x\gamma + y\gamma' + z\gamma'') + x^2 + y^2 + z^2}} \tag{1.1}$$

Здесь ρ — плотность тела, dV — элемент объема тела. Интеграл распространен на весь объем V тела.

Тогда уравнения движения твердого тела около закрепленной точки O имеют вид (см., например, [1]):

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr = \gamma''\frac{\partial U}{\partial \gamma'} - \gamma'\frac{\partial U}{\partial \gamma''}, \qquad \frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'' \qquad \begin{pmatrix} A, B, C \\ pqr \\ \gamma\gamma'\gamma'' \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Здесь A, B, C — главные моменты инерции тела, p, q, r — составляющие угловой скорости тела по осям x, y, z. Символ в виде скобок справа от формул означает, что остальные формулы получаются циклической перестановкой указанных в символе букв.

Наряду с точными уравнениями движения (1.2) будем рассматривать приближенные уравнения в предположении, что расстояние R велико по сравнению с размерами тела. Разлагая тогда силовую функцию (1.1) в ряд по степеням отношений x/R, y/R, z/R и сохраняя члены только первого и второго порядков, получим с точностью до постоянного слагаемого

$$U = -\frac{\mu M}{R^2}(x_0\gamma + y_0\gamma' + z_0\gamma'') - \frac{3}{2}\frac{\mu}{R^3}(A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2) \tag{1.3}$$

Здесь M — масса тела, x_0, y_0, z_0 — координаты центра масс тела.

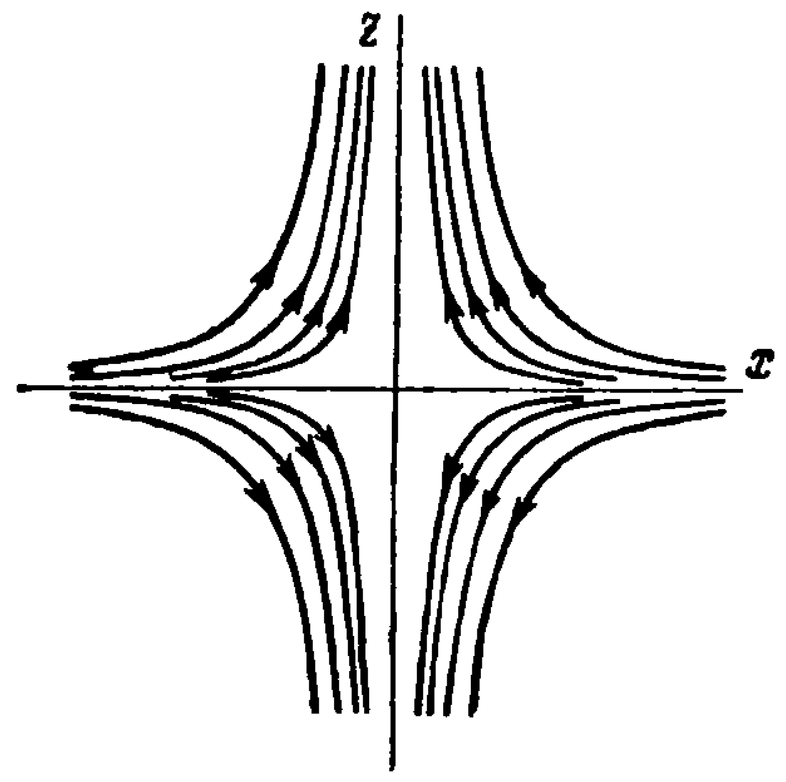
Подставляя это приближенное значение силовой функции в уравнения движения (1.2), получим уравнения движения в виде [2]

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = -Mg(y_0\gamma'' - z_0\gamma') + 3\frac{g}{R}(C-B)\gamma'\gamma'' \quad (1.4)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'' \qquad \begin{pmatrix} pqr \\ ABC \\ \gamma\gamma'\gamma'' \\ x_0, y_0, z_0 \end{pmatrix}$$

Здесь g — ускорение силы тяготения на расстоянии R от центра притяжения.

Уравнения движения (1.4) соответствуют введению в рассмотрение вместо точного ньютоновского поля некоторого приближенного его выражения. А именно в осях $OXYZ$ компоненты ньютоновской силы, действующей на элементарную массу dm с точностью до членов второго порядка малости относительно величин $X/R, Y/R, Z/R$, представляются в виде суммы плоско-параллельного однородного поля сил с компонентами



Фиг. 2

$$F_z^\circ = -g dm, \quad F_y^\circ = 0, \quad F_x^\circ = 0 \quad (1.5)$$

и поля возмущающих сил с компонентами

$$F'_X = -\frac{g}{R}dmX, \quad F'_Y = -\frac{g}{R}dmY, \quad F'_Z = 2\frac{g}{R}dmZ \quad (1.6)$$

При учете только сил (1.5) будем иметь классическую задачу о движении около неподвижной точки тяжелого твердого тела. Первые два слагаемых в правых частях уравнений (1.4) являются моментами этих сил. Поле сил (1.6) вносит поправку к плоско-параллельному однородному полю сил. Эта поправка, как показано в работе [2], в некоторых случаях качественно меняет характер движения тела. На фиг. 2 дана картина силовых линий поля сил (1.6) в плоскости OXZ. Уравнение силовых линий в этой плоскости $Z = C_0 / X^2$ (в любой плоскости, проходящей через ось OZ, картина силовых линий такая же).

Рассмотрение поля возмущений (1.6) помогает лучше представить характер движения тела и объяснить условия устойчивости или неустойчивости некоторых движений, рассмотренных в следующих параграфах. Легко представить, например, что достаточно вытянутое тело будет под действием поля сил, изображенного на фиг. 2, стремиться повернуться вокруг точки O по направлению к оси OZ. Ясно также, что тело, закрепленное в центре масс, не будет находиться в безразличном равновесии, как это имеет место в плоско-параллельном однородном поле сил.

Качественные отличия движения тела в ньютоновском поле сил от движения в плоско-параллельном однородном поле выявляются также в рассматриваемых в § 4, 5 задачах об устойчивости стационарных движений тела.

§ 2. Первые интегралы уравнений движения. Нетрудно проверить, что уравнения движения (1.2) имеют три первых интеграла:

интеграл энергии

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2U(\gamma, \gamma', \gamma'') = h \quad (2.1)$$

интеграл момента количества движения

$$Ap\gamma + Aq\gamma' + Cr\gamma'' = k \quad (2.2)$$

соотношение между направляющими косинусами

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1 \quad (2.3)$$

В случае приближенного рассмотрения ньютоновского поля функция U имеет значение (1.3), и тогда интеграл (2.1) является алгебраическим и имеет вид, указанный в заметке [2].

Принципиальное значение имеет вопрос о наличии у системы (1.2) или системы (1.4) четвертого интеграла.

Можно указать для системы точных уравнений движения (1.2) четвертый интеграл

$$r = r_0 \tag{2.4}$$

который существует, если

$$A = B, \qquad \gamma' \frac{\partial U}{\partial \gamma} - \gamma \frac{\partial U}{\partial \gamma'} = 0 \tag{2.5}$$

Последнее из этих условий выполнено, в частности, если U зависит только от γ'', т. е. $U = U(\gamma'')$. Условие $U = U(\gamma'')$ выполнено, например, для приближенного значения силовой функции ньютоновского поля сил (1.3), если центр масс тела лежит на оси динамической симметрии тела, т. е. при условии $x_0 = y_0 = 0$. Это условие было рассмотрено в заметке [1], где было показано, что задача в этом случае сводится к квадратурам. В следующем параграфе будут сведены к квадратурам точные уравнения движения (1.2) при условиях $A = B$ и $U = U(\gamma'')$.

Укажем также, что если тело закреплено в центре масс, т. е. $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, то уравнения движения (1.4) имеют, кроме интегралов (2.1), (2.2), (2.3), четвертый интеграл:

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 - 3\frac{g}{R}(BC\gamma^2 + AC\gamma'^2 + AB\gamma''^2) = \text{const} \tag{2.6}$$

Интеграл (2.6) впервые нашел Брун [3], рассматривая задачу о движении тела, каждая частица которого притягивается к некоторой неподвижной плоскости, проходящей через неподвижную точку тела, силой, прямо пропорциональной расстоянию до плоскости. Уравнения движения этой задачи по виду совпадают с уравнениями (1.4) при условии $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ и отличаются от этих уравнений только смыслом постоянной величины, обозначенной в уравнениях (1.4) через $3g/R$. Указанная выше задача, рассмотренная в работе [3], была сведена к квадратурам в работе [4].

§ 3. Сведение задачи к квадратурам в случае $A = B$ и $U = U(\gamma'')$. Интегрирование в случае плоского движения. При условиях $A = B$, $U = U(\gamma'')$ уравнения (1.2) принимают вид:

$$\frac{dp}{dt} - mqr_0 = -\gamma'\varphi, \qquad \frac{dq}{dt} + mpr_0 = \gamma\varphi, \qquad \frac{dr}{dt} = 0$$
$$\left(m = \frac{A-C}{A}, \qquad \varphi = \frac{1}{A}\frac{\partial U}{\partial \gamma''} = \varphi(\gamma'')\right) \tag{3.1}$$

Первые интегралы уравнений движения (2.1) и (2.2) можно представить в виде

$$p^2 + q^2 - \frac{2U}{A} = h, \qquad p\gamma + q\gamma' - (m-1)r_0\gamma'' = k \tag{3.2}$$

Пользуясь выписанными соотношениями, задачу можно свести к квадратурам, обобщая метод, которым сводится к квадратурам случай Лагранжа движения тяжелого твердого тела [5]. Подставляя значения γ

и γ' из (3.1) во второе равенство (3.2) и в (2.3) и введя замену переменных $p = \rho\cos\sigma$, $q = \rho\sin\sigma$, получим следующие соотношения:

$$\rho^2 \frac{d\sigma}{dt} + mr_0\rho^2 - (m-1) r_0\gamma''\varphi = k\varphi \tag{3.3}$$

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 + m^2r_0^2\rho^2 + 2mr_0\rho^2\frac{d\sigma}{dt} + \gamma''^2\varphi^2 = \varphi^2 \tag{3.4}$$

$$\rho^2 - \frac{2U}{A} = h \tag{3.5}$$

Умножив обе части уравнения (3.4) на $4\rho^2$ и исключая ρ^2 и $d\sigma/dt$ при помощи (3.3) и (3.5), получим

$$\left(\frac{d\gamma''}{dt}\right)^2 = (1-\gamma''^2)\left[h + \frac{2}{A}U(\gamma'')\right] - [k + (m-1)r_0\gamma'']^2 \equiv P(\gamma'')$$

Разделяя переменные и интегрируя, имеем

$$t + c = \int \frac{d\gamma''}{\sqrt{P(\gamma'')}} \tag{3.6}$$

Таким образом, задача сведена к квадратуре. Обращение интеграла (3.6) дает зависимость γ'' от времени, после чего можно определить как функции времени остальные искомые величины.

Замечание. Из этих результатов получаются как частный случай решение задачи о движении тяжелого твердого тела в случае Лагранжа, решение задачи о движении твердого тела в ньютоновском поле сил при приближенном рассмотрении этого поля для случая, аналогичного случаю Лагранжа [2], а также результаты, полученные в работах Жильдена [6,7]; в этих работах рассматривается задача о движении твердого тела около закрепленной точки в ньютоновском поле сил в предположении, что тело имеет определенную симметричную форму и что плотность тела всюду постоянна.

Задача о движении тела в ньютоновском поле сил сводится к квадратурам еще и в случае плоского движения тела. Это движение имеет место при выполнении условия

$$\partial U / \partial\gamma' = 0 \qquad \text{при } \gamma' = 0$$

Тогда уравнения имеют частное решение

$$p = 0, \quad r = 0, \quad \gamma' = 0, \quad q = -\dot\vartheta, \quad \gamma'' = \cos\vartheta, \quad \gamma = \sin\vartheta$$

где ϑ определяется из уравнения

$$B\frac{d^2\vartheta}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial\vartheta} = 0$$

Это уравнение легко интегрируется. Получаем

$$t - t_0 = \int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{h + 2B^{-1}U(\vartheta)}} \qquad \left(h = \dot\vartheta_0^2 - \frac{2}{B}U(\vartheta_0),\ \dot\vartheta_0 = \left[\frac{d\vartheta}{dt}\right]_{t=t_0}\right) \tag{3.7}$$

Характер движения тела при различных значениях начальных данных можно определить обычным энергетическим анализом, известным в теории колебаний [8].

В случае приближенного рассмотрения ньютоновского поля решение (3.7) совпадает с решением, указанным в заметке [2].

§ 4. Устойчивость стационарного вращения тела, закрепленного в центре масс. Рассмотрим движение твердого тела около центра масс при приближенном представлении ньютоновского поля сил. Тогда уравнения движения допускают следующие интегралы [2]:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 3\,\frac{g}{R}\,(A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2) = h \tag{4.1}$$

$$Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'' = k \tag{4.2}$$

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 - 3\,\frac{g}{R}\,(BC\gamma^2 + AC\gamma'^2 + AB\gamma''^2) = l \tag{4.3}$$

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1 \tag{4.4}$$

По определению, γ'' — косинус угла с той осью, которой соответствует момент инерции C; величине γ' соответствует в этом смысле момент инерции B, величине γ — момент инерции A.

Уравнения движения в рассматриваемом случае допускают частное решение

$$r = r_0, \quad p = 0, \quad q = 0; \qquad \gamma'' = 1, \quad \gamma = 0, \quad \gamma' = 0 \tag{4.5}$$

которое описывает вращение тела с постоянной угловой скоростью r_0 вокруг главной оси инерции, причем направление оси вращения совпадает с направлением на центр притяжения.

Исследуем устойчивость этого движения. Возмущенное движение

$$r = r_0 + \zeta, \quad p, \quad q; \qquad \gamma, \quad \gamma', \quad \gamma'' = 1 + \delta$$

описывается в первом приближении системой, имеющей характеристическое уравнение

$$\lambda^2\,\{\lambda^4 + m\lambda^2 + n\} = 0 \tag{4.7}$$

где

$$m = -3\omega^2\,(a + b) + r_0^2\,(1 + ab)$$

$$n = (3\omega^2 - r_0^2)^2\,ab, \quad a = \frac{C - B}{A}, \quad b = \frac{C - A}{B}, \quad \omega^2 = \frac{g}{R} \tag{4.6}$$

Нетрудно убедиться, что если выполнено хотя бы одно из неравенств $n < 0$, $m < 0$, $m^2 - 4n < 0$, то среди корней уравнения (4.7) найдется по крайней мере один корень с положительной вещественной частью. Соответствующее невозмущенное движение будет неустойчивым.

Обратимся теперь к движению (4.5). Пусть вращение совершается вокруг средней оси инерции, т. е. $A > C > B$ или $B > C > A$.

Тогда $n < 0$ и при любых r_0 вращение вокруг средней оси инерции неустойчиво.

Пусть теперь вращение совершается вокруг оси наименьшего момента инерции (т. е. вокруг наибольшей оси эллипсоида инерции). Тогда

$$C < A, \qquad C < B \tag{4.8}$$

Из интегралов (4.1), (4.3), (4.4) нетрудно получить следующие интегралы:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 3\omega^2\,\{(A - C)\,\gamma^2 + (B - C)\,\gamma^2\} = V_1^0 \tag{4.9}$$

$$(V_1^0,\ V_2^0) = \mathrm{const}$$

$$A(C-A)p^2 + B\,(C-B)q^2 + 3\omega^2(A-C)(C-B)(\gamma^2+\gamma'^2) = V_2^0 \tag{4.10}$$

Квадратичная форма V_2^0 является в силу условия (4.8) знакоопределенной относительно переменных p, q, γ, γ'. Следовательно, движение устойчиво относительно этих переменных. Но тогда из (4.9) сразу следует устойчивость относительно r, а из (4.4) относительно γ''. Таким образом, вращение вокруг оси наименьшего момента инерции устойчиво при любых r_0.

Пусть теперь $C > A$, $C > B$, т. е. вращение происходит вокруг оси наибольшего момента инерции (вокруг наименьшей оси эллипсоида инерции). Тогда $a > 0$, $b > 0$.

Найдем достаточное условие устойчивости вращения.

При помощи интегралов (4.1) — (4.4) получим следующие интегралы возмущенного движения (4.6):

$$Ap^2 + Bq^2 + C\zeta^2 + 2Cr_0\zeta + 3\omega^2\{(A-C)\gamma^2 + (B-C)\gamma'^2\} = V_1$$
$$2Ap\gamma + 2Bq\gamma' + 2C\zeta - Cr_0(\gamma^2 + \gamma'^2 + \delta^2) - 2C\zeta(\gamma^2 + \gamma'^2 + \delta^2) = V_2$$
$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2\zeta^2 + 2C^2r_0\zeta - 3\omega^2\{B(C-A)\gamma^2 + A(C-B)\gamma'^2\} = V_3$$

Будем искать функцию Ляпунова в виде

$$L = V_1 - r_0(1 + \varkappa C)V_2 + \varkappa V_3$$

где $\varkappa$ — произвольный пока множитель. Тогда L можно представить в виде $L = V + W$, где V — квадратичная форма, а W содержит члены только третьего порядка.

Если квадратичная форма V знакоопределенна, то будет знакоопределенной и L. Квадратичная форма V имеет вид:

$$V = (1+\varkappa A)Ap^2 - 2r_0(1+\varkappa C)Ap\gamma + \gamma^2\{3\omega^2(A-C)(1+\varkappa B) + Cr_0^2(1+\varkappa C)\} +$$
$$+ (1+\varkappa B)Bq^2 - 2r_0(1+\varkappa C)Bq\gamma' + \gamma'^2\{3\omega^2(B-C)(1+\varkappa A) + Cr_0^2(1+\varkappa C)\} +$$
$$+ (1+\varkappa C)C\zeta^2 + Cr_0^2(1+\varkappa C)\delta^2$$

и будет положительно-определенной, если

$$\varkappa > -\frac{1}{C}, \qquad r_0^2 > 3\omega^2\frac{(1+\varkappa A)(1+\varkappa B)}{(1+\varkappa C)}$$

Кривая

$$\psi(\varkappa) = \frac{(1+\varkappa A)(1+\varkappa B)}{(1+\varkappa C)}$$

в точке $\varkappa_1 = -\frac{1}{C}(1-\sqrt{ab}) > -\frac{1}{C}$ имеет минимум

$$\psi(\varkappa_1) = \left\{\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{1+\sqrt{ab}}\right\}^2$$

Взяв теперь в функции L в качестве $\varkappa$ величину $\varkappa_1$, получим следующий вывод: вращение вокруг оси наибольшего момента инерции устойчиво, если

$$r_0^2 > 3\omega^2\left\{\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{1+\sqrt{ab}}\right\}^2 \qquad (4.11)$$

Покажем теперь, что при обратном знаке в этом неравенстве движение неустойчиво.

Так как всегда имеют место неравенства $a < 1$ и $b < 1$, то

$$\frac{a+b}{1+ab} < \left\{\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{1+\sqrt{ab}}\right\}^2 \qquad (4.12)$$

Рассмотрим сначала случай, когда

$$r_0^2 < 3\omega^2 \frac{a+b}{1+ab}$$

тогда $m < 0$ и движение неустойчиво.

Пусть теперь

$$3\omega^2 \frac{a+b}{1+ab} < r_0^2 < 3\omega^2 \left\{\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{1+\sqrt{ab}}\right\}^2$$

тогда

$$r_0^2(1+ab) > 3\omega^2(a+b) \tag{4.13}$$

Так как из (4.11) следует (при обратном знаке неравенства), что $r_0^2 < 3\omega^2$, то из (4.13) подавно будем иметь

$$r_0^2(1-\sqrt{ab})^2 > 3\omega^2(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \tag{4.14}$$

Но, как нетрудно убедиться, выражение $m^2 - 4n$, входящее в один из указанных выше критериев неустойчивости, можно представить в виде

$$m^2 - 4n = \{r_0^2(1-\sqrt{ab})^2 - 3\omega^2(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\}\{r_0^2(1+\sqrt{ab})^2 -$$

$$- 3\omega^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\}$$

Согласно (4.11) с обратным знаком неравенства и (4.14) имеем $m^2 - 4n < 0$, т. е. невозмущенное движение неустойчиво.

Угловую скорость

$$r_* = \sqrt{3}\omega \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{1+\sqrt{ab}}$$

можно назвать критической угловой скоростью.

Заметим, что если $r_0^2 \geqslant 3\omega^2$, то условие устойчивости (4.11) будет подавно выполнено.

Оценим, при каких величинах угловой скорости движение будет устойчиво. Для поверхности земли имеем

$$g = 9.81\ м/сек^2, \qquad R = 6.371000\ м, \qquad r_0 \geqslant \sqrt{3g/R} = 0.002.15\ \frac{рад}{сек}$$

т. е. вращение будет устойчивым уже при угловых скоростях порядка $0.1°/сек$ и только при весьма малых угловых скоростях устойчивость теряется.

Из всего сказанного следует также, что тело, закрепленное в центре масс в центральном ньютоновском поле сил, может находиться в равновесии только тогда, когда одна из осей эллипсоида инерции направлена в сторону притягивающего центра. При этом равновесие будет неустойчивым, если эта ось является меньшей или средней, и устойчивым, если с направлением на притягивающий центр совпадает наибольшая ось эллипсоида инерции. В принятых здесь обозначениях условием устойчивого равновесия является условие (4.8).

В заключение проведем сравнение рассмотренной задачи с классической задачей Эйлера о движении около центра масс свободного тела.

1. В классической задаче стационарное вращение около какой-либо оси инерции возможно при любом положении этой оси в пространстве.

В рассмотренной задаче стационарное вращение вокруг оси инерции возможно только в том случае, когда направление оси вращения совпадает с направлением на центр притяжения.

2. В классической задаче вращение вокруг большей и меньшей осей эллипсоида инерции устойчиво, а вокруг средней оси неустойчиво при любой величине скорости вращения.

В рассмотренной задаче вращение устойчиво вокруг большей оси эллипсоида инерции при любой угловой скорости, а вращение вокруг меньшей оси эллипсоида инерции устойчиво при условии, что угловая скорость превосходит некоторую критическую величину. В противном случае вращение неустойчиво.

Вращение вокруг средней оси инерции неустойчиво.

§ 5. Устойчивость стационарного вращения в случае $A = B$, $U = U(\gamma'')$. Уравнения движения (1.2) в случае $A = B$, $U = U(\gamma'')$ имеют частное решение

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = r_0; \qquad \gamma = 0, \quad \gamma' = 0, \quad \gamma'' = 1 \tag{5.1}$$

которое описывает вращение с постоянной угловой скоростью вокруг оси кинетической симметрии, если ее направление в пространстве совпадает с направлением на притягивающий центр.

Возмущеннное движение

$$p, \quad q, \quad r = r_0 + \zeta; \qquad \gamma, \quad \gamma', \quad \gamma'' = 1 + \delta$$

имеет интегралы

$$V_1 = A(p^2 + q^2) + C(\zeta^2 + 2\zeta) - 2\left(\frac{\partial U}{\partial \gamma''}\right)_{\gamma''=1}\delta - 2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \gamma''^2}\right)_{\gamma''=1}\delta^2 + W(\delta^3, \ldots)$$

$$V_2 = A(p\gamma + q\gamma') + C(\zeta\delta + \zeta + r_0\delta), \qquad V_3 = \gamma^2 + \gamma'^2 + \delta^2 + 2\delta = 0, \qquad V_4 = \zeta$$

В выражении V_1 функция $U(1 + \delta)$ разложена в ряд по δ, так что W содержит члены выше второго порядка малости.

Следуя методу Н. Г. Четаева [9], будем искать функцию Ляпунова L в виде связки интегралов:

$$L = V_1 + 2\varkappa V_2 - \left[-\left(\frac{\partial U}{\partial \gamma''}\right)_{\gamma''=1} + Cr_0\varkappa\right]V_3 - 2C(r_0 + \varkappa)V_4 +$$
$$+ \frac{C(C - A)}{A} V_4^2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \gamma''^2}\right)_{\gamma''=1} V_3\delta$$

Производная от L в силу уравнений движения

$$\frac{dL}{dt} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \gamma''^2}\right)_{\gamma''=1} V_3 \frac{d\delta}{dt} = 0$$

так как $V_3 = 0$. Поэтому невозмущенное движение устойчиво, если L — знакоопределенная функция.

Функцию L можно представить в виде $L = V + W^*$, где V — квадратичная форма, а W^* содержит члены выше второго порядка малости.

Функция L знакоопределенна, если знакоопределенна квадратичная форма V. Эта форма имеет вид

$$V = Ap^2 + 2\varkappa Ap\gamma - \left[-\left(\frac{\partial U}{\partial\gamma''}\right)_{\gamma''=1} + Cr_0\varkappa\right]\gamma^2 +$$
$$+ Aq^2 + 2\varkappa Aq\gamma' - \left[-\left(\frac{\partial U}{\partial\gamma''}\right)_{\gamma''=1} + Cr_0\varkappa\right]\gamma'^2 +$$
$$+ \frac{C}{A}\zeta^2 + 2\varkappa C\zeta\delta - \left[-\left(\frac{\partial U}{\partial\gamma''}\right)_{\gamma''=1} + Cr_0\varkappa\right]\delta^2$$

Если выполнено условие

$$C^2r_0^2 + 4A\left(\frac{\partial U}{\partial\gamma''}\right)_{\gamma''=1} > 0 \qquad (5.2)$$

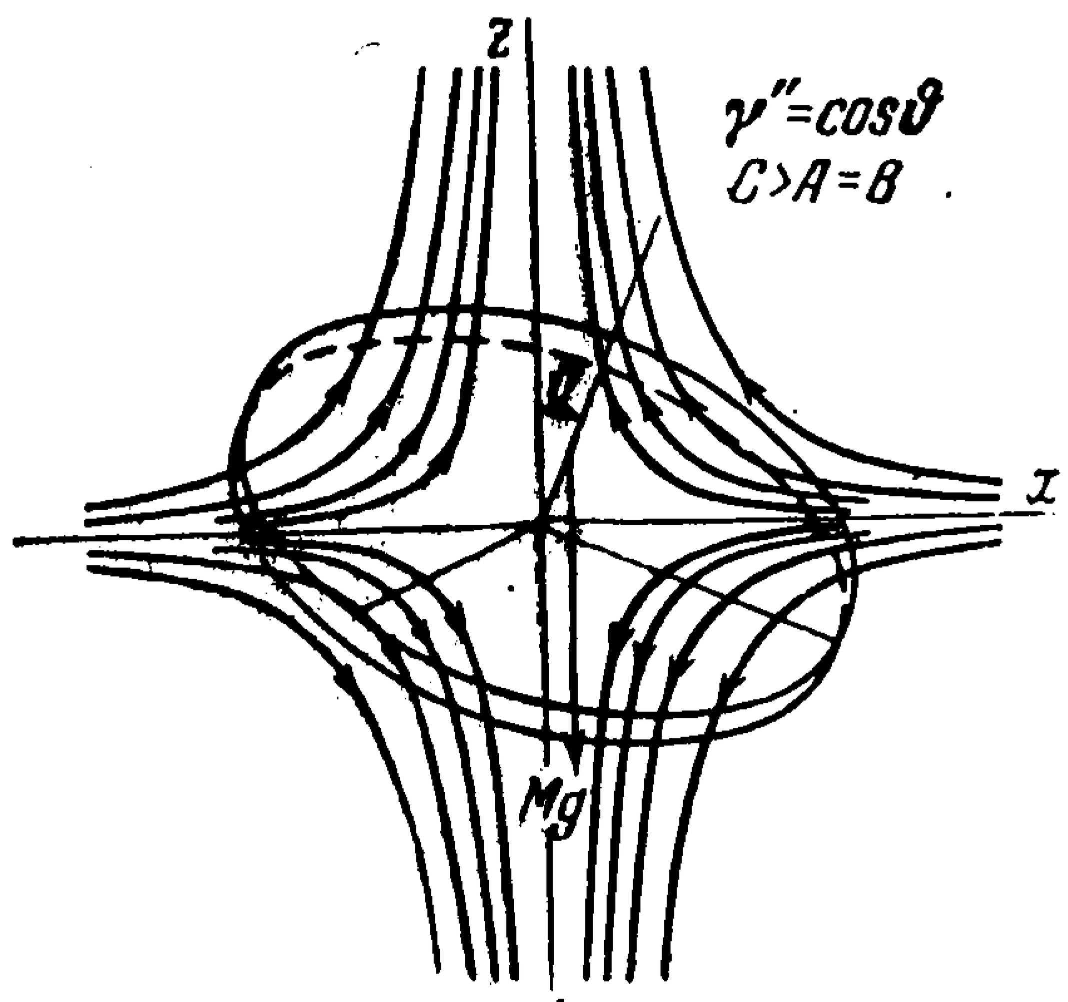
то существует такое $\varkappa$, что V будет положительно-определенной квадратичной формой.

Таким образом, условие (5.2) является достаточным условием устойчивости невозмущенного движения (5.1).

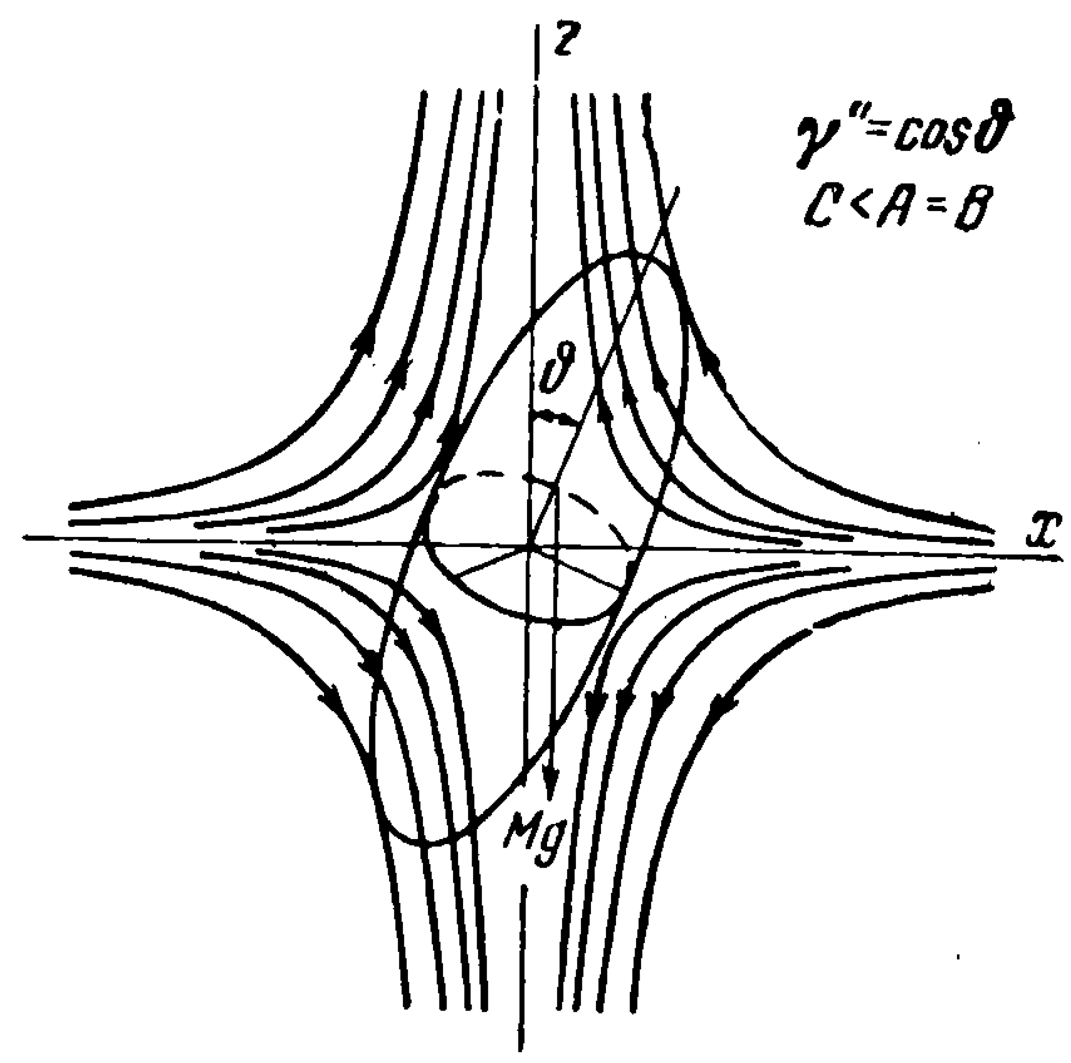
Исследованием уравнений первого приближения нетрудно показать что при

$$C^2r_0^2 + 4A\left(\frac{\partial U}{\partial\gamma''}\right)_{\gamma''=1} < 0$$

невозмущенное движение неустойчиво. Следовательно, условие (5.2) является необходимым и достаточным условием устойчивости.



Фиг. 3



Фиг. 4

Если $U = -Mgz_0\gamma''$, то условие (5.2) дает известное условие устойчивости стационарного движения тяжелого твердого тела в случае Лагранжа [9]:

$$C^2r_0^2 > 4AMgz_0 \qquad (5.3)$$

В случае стационарного движения в ньютоновском поле при приближенном его рассмотрении $U = -Mgz_0\gamma'' - {}^3/_2(g/R)(C-A)\gamma''^2$ и условие (5.2) запишется так:

$$C^2r_0^2 > 4A\left\{Mgz_0 + 3\frac{g}{R}(C-A)\right\} \qquad (5.4)$$

Это условие при $C > A$ является более жестким, чем условие (5.3) в классической задаче, а при $C < A$ — менее жестким, что и следовало ожидать, так как при $C > A$ поле возмущающих сил действует дестабилизирующим образом (фиг. 3), а при $C < A$ — восстанавливающим образом (фиг. 4).

При $r_0 = 0$ и $z_0 = 0$ получим достаточное условие устойчивости равновесия тела, закрепленного в центре тяжести.

При $z_0 = 0$, $r_0 \neq 0$ получаем условие устойчивости вращения около центра масс:

$$r_0^2 > 4 \frac{A}{C} \frac{C-A}{C} 3 \frac{g}{R}$$

которое совпадает с условием (4.11) для случая $A = B$.

Поступила 29 IV 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Горячев Д. Н. Некоторые общие интегралы в задаче о движении твердого тела. Варшава, 1910.
2. Белецкий В. В. Об интегрируемости уравнений движения твердого тела около закрепленной точки под действием центрального ньютоновского поля сил. ДАН, 113, № 2, 1957.
3. de Brun F. Rotation kring en fix punkt. Öfversigt af Konql. Svenska Vetenskaps-Akademiens Vörhandlingar. Stockholm, 1893.
4. Kobb G. Sur le problème de la rotation d'un corps autour d'un point fixe. Bulletin de la Société Mathématique, XXIII, 1895.
5. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Гостехиздат, 1953.
6. Gylden H. Sur un cas général ou le problème de la rotation d'un corps solide admet des intégrales uniformes. Comptes Rendus, CXVI, 1893.
7. Gylden H. Sur un cas général ou le problème de la rotation d'un corps solide admet des intégrales. S'exprimant an moyen de functions uniformes. Comptes Rendus, CXVI, 1893.
8. Булгаков Б. В. Колебания. т. I, ГТТИ, 1949.
9. Четаев Н. Г. Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа, ПММ, XVIII, № 1, 1954.