Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ ПОЛОСТЬЮ, НАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В. В. Румянцев

(Москва)

Задачей о движении твердого тела, имеющего эллипсоидальную полость, полностью заполненную идеальной несжимаемой жидкостью, интересовались многие ученые (Кельвин, Ламб, Н. Е. Жуковский [1], Ф. А. Слудский [2], Хаф [3], Пуанкаре [4] и другие), решавшие ее различными методами.

В недавнее время снова появился интерес к этой задаче. С. Л. Соболев [5] исследовал методами функционального анализа малые колебания волчка и наполняющей его полость жидкости в окрестности равномерного вращения вокруг неподвижной оси всей системы как одного твердого тела.

Задача об устойчивости движения твердого тела с полостями, наполненными идеальной жидкостью, совершающей безвихревое движение, решена в точной постановке Н. Г. Четаевым [6].

В работе [7] даны достаточные условия устойчивости вращения вокруг вертикали тяжелого твердого тела вращения, имеющего эллипсоидальную полость вращения, полностью заполненную идеальной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение.

В данной статье исследуется устойчивость невозмущенного движения твердого тела, имеющего полость в форме трехосного эллипсоида, полностью заполненную идеальной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение. Рассмотрены также некоторые частные случаи.

1. Пусть $Ox_1y_1z_1$ — неподвижная прямоугольная система осей координат с началом в неподвижной точке O тела и вертикально вверх направленной осью Oz_1, $Oxyz$ — подвижная система координат, оси которой совпадают с главными осями инерции твердого тела для точки O.

Предположим, что идеальная несжимаемая однородная тяжелая жидкость полностью заполняет эллипсоидальную полость тела, уравнение поверхности которой в системе координат $Oxyz$ имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1 \tag{1.1}$$

где z_0 — координата по оси Oz центра полости.

Движение жидкости, наполняющей полость (1.1), можно описать, следуя Хафу и Слудскому [3,2], формулами

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\omega_2 z-\omega_3 y,\quad v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\omega_3 x-\omega_1 z,\quad v_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\omega_1 y-\omega_2 x \tag{1.2}$$

где v_x, v_y, v_z обозначают соответственно проекции на подвижные оси x, y, z вектора $\mathbf{v}$ скорости жидкости по отношению к неподвижной системе осей координат $Ox_1 y_1 z$; $\varphi(x, y, z, t)$ — гармоническая функция координат, ω_1, ω_2, ω_3 — функции одного только времени t.

Легко видеть, что гармоническая функция

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{b^2-c^2}{b^2+c^2}(p-\omega_1)yz + \frac{c^2-a^2}{c^2+a^2}(q-\omega_2)xz + \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}(r-\omega_3)xy +$$
$$+\frac{2a^2 z_0}{a^2+c^2}(q-\omega_2)x - \frac{2b^2 z_0}{b^2+c^2}(p-\omega_1)y \qquad (1.3)$$

удовлетворяет соответствующему граничному условию на поверхности (1.1), вытекающему из условия для скоростей частиц идеальной жидкости. Через p, q, r обозначены проекции на оси x, y, z вектора $\boldsymbol{\omega}$ мгновенной угловой скорости тела.

Проекции скоростей u, v, w относительного движения жидкости получим, вычитая из абсолютных скоростей (1.2) жидкости соответствующие скорости переносного движения:

$$\begin{aligned} u &= 2a^2\left(\frac{r-\omega_3}{a^2+b^2}y - \frac{q-\omega_2}{c^2+a^2}(z-z_0)\right)\\ v &= 2b^2\left(\frac{p-\omega_1}{b^2+c^2}(z-z_0) - \frac{r-\omega_3}{a^2+b^2}x\right) \qquad (1.4)\\ w &= 2c^2\left(\frac{q-\omega_2}{c^2+a^2}x - \frac{p-\omega_1}{b^2+c^2}y\right) \end{aligned}$$

Для определения функций времени $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$ воспользуемся уравнением Гельмгольца вихревого движения, которое в подвижных осях имеет вид:

$$\frac{d\Omega}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\Omega = (\Omega\nabla)\,\mathbf{v} \qquad (1.5)$$

где вектор $\Omega = \operatorname{rot}\mathbf{v}$ в рассматриваемом случае имеет следующие проекции на оси x, y, z:

$$\Omega_x = 2\omega_1, \qquad \Omega_y = 2\omega_2, \qquad \Omega_z = 2\omega_3 \qquad (1.6)$$

Из уравнения (1.5) получаем уравнения для искомых функций $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} &= 2a^2\left(\frac{r\omega_2}{a^2+b^2} - \frac{q\omega_3}{c^2+a^2}\right) - 2\omega_2\omega_3\frac{a^2(c^2-b^2)}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}\\ \frac{d\omega_2}{dt} &= 2b^2\left(\frac{p\omega_3}{b^2+c^2} - \frac{r\omega_1}{a^2+b^2}\right) - 2\omega_3\omega_1\frac{b^2(a^2-c^2)}{(b^2+c^2)(a^2+b^2)} \qquad (1.7)\\ \frac{d\omega_3}{dt} &= 2c^2\left(\frac{q\omega_1}{c^2+a^2} - \frac{p\omega_2}{b^2+c^2}\right) - 2\omega_1\omega_2\frac{c^2(b^2-a^2)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)} \end{aligned}$$

Отметим, что рассматриваемое движение жидкости в эллипсоидальной полости возможно описать формулами, внешне отличными от равенств (1.2).

Н. Е. Жуковский [1] полагал движение жидкости состоящим из потенциального движения с потенциалом скоростей φ (имеющим вид (1.3), если в этом выражении положить $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$, $z_0 = 0$) и эллиптического вращения; проекции скоростей жидкости от последнего имеют вид:

$$u' = a^2(q'z - r'y), \qquad v' = b^2(r'x - p'z), \qquad w' = c^2(p'y - q'x) \qquad (1.8)$$

где p', q', r' — функции только времени t.

Легко видеть, что такое движение жидкости можно по-прежнему описать формулами (1.2), если положить в них

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2)\,p', \qquad \omega_2 = \frac{1}{2}(c^2 + a^2)\,q', \qquad \omega_3 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)\,r'$$

Пуанкаре представил то же самое движение жидкости в несколько иной форме. Он предположил, что проекции относительной скорости частиц жидкости являются линейными функциями их координат. Такое движение жидкости Пуанкаре назвал простым и указал, что если вначале движение жидкости простое, то оно все время будет таковым при условии полного заполнения жидкостью эллипсоидального сосуда. Если каждой частице (x, y, z) жидкости, заполняющей эллипсоидальную полость (1.1), поставить в соответствие некоторую воображаемую частицу с координатами

$$x' = \frac{1}{a}x, \qquad y' = \frac{1}{b}y, \qquad z' = \frac{1}{c}(z - z_0)$$

и относительными скоростями

$$u' = \frac{u}{a}, \qquad v' = \frac{v}{b}, \qquad w' = \frac{w}{c}$$

то совокупность таких воображаемых частиц заполнит сферу S:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

Если движение жидкости является простым, то воображаемые частицы будут двигаться как точки твердого тела, т. е. движение жидкости представится вращением сферы S как одного твердого тела. Обозначая проекции на подвижные оси мгновенной угловой скорости сферы S через p_1, q_1, r_1, нетрудно видеть, что проекции на те же оси абсолютной скорости жидкости определяются формулами

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{a}{c}q_1(z - z_0) - \frac{a}{b}r_1 y + qz - ry \\ v_y &= \frac{b}{a}r_1 x - \frac{b}{c}p_1(z - z_0) + rx - pz \\ v_z &= \frac{c}{b}p_1 y - \frac{c}{a}q_1 x + py - qx \end{aligned} \qquad (1.9)$$

При этом проекции на подвижные оси вектора вихря $\Omega = \operatorname{rot} \mathbf{v}$ будут равны:

$$\Omega_x = 2p + \frac{b^2 + c^2}{bc}p_1, \qquad \Omega_y = 2q + \frac{a^2 + c^2}{ac}q_1, \qquad \Omega_z = 2r + \frac{a^2 + b^2}{ab}r_1$$

Сравнивая эти равенства с (1.6), получаем

$$\omega_1 = p + \frac{b^2 + c^2}{2bc}p_1, \qquad \omega_2 = q + \frac{a^2 + c^2}{2ac}q_1, \qquad \omega_3 = r + \frac{a^2 + b^2}{2ab}r_1 \qquad (1.10)$$

Если подставить в формулы (1.2) вместо функции $\varphi(x, y, z, t)$ ее выражение (1.3) и заменить ω_1, ω_2, ω_3 правыми частями равенств (1.10), то получим формулы (1.9). Можно было бы, наоборот, исходя из последних, получить с учетом (1.10) и (1.3) равенства (1.2).

Интересно отметить [4], что если удерживать твердое тело неподвижным $(p = q = r = 0)$, уравнения (1.7) движения жидкости можно преобразовать при помощи равенств (1.10) к виду

$$a^2(b^2+c^2)\frac{dp_1}{dt}=[b^2(c^2+a^2)-c^2(a^2+b^2)]\,q_1r_1$$
$$b^2(c^2+a^2)\frac{dq_1}{dt}=[c^2(a^2+b^2)-a^2(b^2+c^2)]\,r_1p_1 \qquad (1.11)$$
$$c^2(a^2+b^2)\frac{dr_1}{dt}=[a^2(b^2+c^2)-b^2(c^2+a^2)]\,p_1q_1$$

Уравнения (1.11) имеют вид уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки в случае Эйлера — Пуансо, причем главные моменты инерции тела пропорциональны величинам $a^2(b^2+c^2)$, $b^2(c^2+a^2)$, $c^2(a^2+b^2)$.

Следовательно, по аналогии с перманентными вращениями твердого тела можно утверждать, что невозмущенное движение $p_1=q_1=0$, $r_1=r_1$ жидкости в полости (1.1) покоящегося тела будет устойчивым по отношению к переменным p_1, q_1, r_1 в случае, если $a^2>c^2$, $b^2>c^2$ или $a^2<c^2$, $b^2<c^2$, и неустойчивым, если $a^2>c^2>b^2$ или $a^2<c^2<b^2$.

2. Для определения движения тяжелого твердого тела, имеющего полость, наполненную жидкостью, можно воспользоваться общей теоремой механики о моменте количеств движения системы

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{G}=\mathbf{L} \qquad (2.1)$$

где вектор $\mathbf{G}$ момента количеств движения системы относительно неподвижной точки O равен геометрической сумме векторов $\mathbf{G}_1$ и $\mathbf{G}_2$ моментов количеств движения твердого тела и жидкости, а $\mathbf{L}$ — момент относительно точки O сил тяжести, действующих на систему.

Предположим, что центр тяжести тела расположен на оси Oz и его координаты суть $x_{10}=y_{10}=0$, $z_{10}\neq0$. Если обозначить через m_1 — массу тела, через m_2 — массу жидкости, то масса и координаты центра тяжести системы будут равны соответственно $M=m_1+m_2$, $x^\circ=y^\circ=0$, $z^\circ=(mz_{10}+m_2z_0)M^{-1}$. При этом проекции на подвижные оси момента силы тяжести относительно точки O определяются равенствами

$$L_x=R\gamma_2,\qquad L_y=-R\gamma_1,\qquad L_z=0\qquad (R=Mgz^0) \qquad (2.2)$$

Здесь γ_1, γ_2, γ_3 обозначают направляющие косинусы неподвижной оси Oz_1 относительно подвижных осей x, y, z, удовлетворяющие уравнениям Пуассона

$$\frac{d\gamma_1}{dt}=r\gamma_2-q\gamma_3,\qquad \frac{d\gamma_2}{dt}=p\gamma_3-r\gamma_1,\qquad \frac{d\gamma_3}{dt}=q\gamma_1-p\gamma_2 \qquad (2.3)$$

Вычисляя проекции на подвижные оси вектора G_2 момента количеств движения жидкости, получаем

$$G_{2x}=A_1'p+A_2\omega_1,\qquad G_{2y}=B_1'q+B_2\omega_2,\qquad G_{2z}=C_1'r+C_2\omega_3 \qquad (2.4)$$

где моменты инерции A_1', B_1', C_1' относительно подвижных осей x, y, z эквивалентного, в смысле Н. Е. Жуковского [1], твердого тела и разности A_2, B_2, C_2 между соответствующими моментами инерции жидкости и эквивалентного твердого тела относительно тех же осей определяются по формулам

$$A_1' = \frac{m_2}{5}\frac{(b^2-c^2)^2}{b^2+c^2} + m_2 z_0^2, \qquad B_1' = \frac{m_2}{5}\frac{(c^2-a^2)^2}{c^2+a^2} + m_2 z_0^2, \qquad C_1' = \frac{m_2}{5}\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2}$$

$$A_2 = \frac{4}{5}\frac{m_2 b^2 c^2}{b^2+c^2}, \qquad B_2 = \frac{4}{5}\frac{m_2 a^2 c^2}{c^2+a^2}, \qquad C_2 = \frac{4}{5}\frac{m_2 a^2 b^2}{a^2+b^2} \tag{2.5}$$

$$m_2 = \frac{4}{3}\pi\rho abc$$

Уравнения движения системы получим, проектируя векторное уравнение (2.1) на подвижные оси координат:

$$A\frac{dp}{dt} + A_2\frac{d\omega_1}{dt} + (C-B)qr + C_2 q\omega_3 - B_2 r\omega_2 = R\gamma_2$$

$$B\frac{dq}{dt} + B_2\frac{d\omega_2}{dt} + (A-C)rp + A_2 r\omega_1 - C_2 p\omega_3 = -R\gamma_1 \tag{2.6}$$

$$C\frac{dr}{dt} + C_2\frac{d\omega_3}{dt} + (B-A)pq + B_2 p\omega_2 - A_2 q\omega_1 = 0$$

где $A = A_1 + A_1'$, $B = B_1 + B_1'$, $C = C_1 + C_1'$ обозначают суммы моментов инерции твердого тела и эквивалентного твердого тела относительно подвижных осей x, y, z соответственно.

Теперь мы имеем полную систему девяти уравнений (2.6), (1.7) и (2.3) движения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой, имеющего эллипсоидальную полость (1.1), наполненную идеальной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение.

Эти уравнения возможно получить также из уравнений Пуанкаре в групповых переменных [4].

Система уравнений движения твердого тела и жидкости в его полости допускает ряд первых интегралов.

Умножим уравнения (2.6) на p, q, r соответственно и сложим их, в результате чего с учетом уравнений (2.3) получим

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + R\gamma_3\right] + A_2 p\frac{d\omega_1}{dt} + B_2 q\frac{d\omega_2}{dt} + C_2 r\frac{d\omega_3}{dt} = 0$$

Если в левой части этого равенства прибавить и вычесть сумму

$$A_2\omega_1\frac{d\omega_1}{dt} + B_2\omega_2\frac{d\omega_2}{dt} + C_2\omega_3\frac{d\omega_3}{dt}$$

и с учетом уравнений (1.7) принять во внимание, что

$$A_2(p-\omega_1)\frac{d\omega_1}{dt} + B_2(q-\omega_2)\frac{d\omega_2}{dt} + C_2(r-\omega_3)\frac{d\omega_3}{dt} = 0$$

то получим интеграл энергии:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + A_2\omega_1^2 + B_2\omega_2^2 + C_2\omega_3^2 + 2R\gamma_3 = h \tag{2.7}$$

Умножим далее уравнения (2.6) на $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ соответственно, сложим их и, учитывая уравнения (2.3), получим интеграл площадей:

$$Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 + A_2\omega_1\gamma_1 + B_2\omega_2\gamma_2 + C_2\omega_3\gamma_3 = k \tag{2.8}$$

Очевидно, интегралы (2.7) и (2.8) можно было бы установить непосредственно из общих теорем механики.

Уравнения (2.3) допускают геометрический интеграл

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \tag{2.9}$$

Если умножить уравнения (1.7) на $b^2c^2\omega_1$, $c^2a^2\omega_2$, $a^2b^2\omega_3$ соответственно и сложить их, то получим интеграл

$$b^2c^2\omega_1{}^2 + a^2c^2\omega_2{}^2 + a^2b^2\omega_3{}^2 = \text{const} \tag{2.10}$$

выражающий теорему Гельмгольца о постоянстве интенсивности вихря.

Указанные первые интегралы имеют место в общем случае, при любых значениях моментов инерции A, B, C и полуосей a, b, c полости.

Представляют интерес также некоторые частные случаи.

В случае тела и полости, имеющих ось симметрии Oz, когда $a = b$, $A = B$, уравнения (2.6) и (1.7) допускают, как легко видеть, еще один первый интеграл

$$r = \text{const} \tag{2.11}$$

В случае шаровой полости, когда $a = b = c$, движение жидкости в полости не оказывает влияний на движение тела; система движется как одно твердое тело, главные моменты инерции которого для неподвижной точки O равны:

$$A = A_1 + m_2z_0{}^2, \qquad B = B_1 + m_2z_0{}^2, \qquad C = C_1$$

Система будет двигаться по инерции в случае, когда ее центр тяжести совмещен с неподвижной точкой O, т. е. когда $z^\circ = 0$; при этом или центр тяжести тела и центр полости (1.1) совпадают с неподвижной точкой, или координаты их удовлетворяют соотношению

$$m_1z_{10} + m_2z_0 = 0$$

В этом случае движение системы описывается системой шести уравнений (1.7) и (2.6) с правыми частями последних, равными нулю.

Эти уравнения допускают, очевидно, интеграл

$$(Ap + A_2\omega_1)^2 + (Bq + B_2\omega_2)^2 + (Cr + C_2\omega_3)^2 = \text{const} \tag{2.12}$$

В случае, когда $A = B$, $a = b$, $z_{10} = z_0 = 0$, $r = 0$, Н. Е. Жуковский [1] полностью проинтегрировал уравнения движения системы по инерции и дал геометрическую картину ее движения.

3. Уравнения (1.7), (2.3), (2.6) движения тяжелого твердого тела с полостью, наполненной жидкостью, допускают частное решение

$$p = q = 0, \quad r = \omega, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \Omega, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1 \tag{3.1}$$

описывающее равномерное вращение твердого тела вокруг расположенной вертикально оси Oz и относительное эллиптическое вращение жидкости вокруг той же оси с компонентами

$$p' = q' = 0, \qquad r' = \frac{2(\Omega - \omega)}{a^2 + b^2}$$

Примем это движение за невозмущенное и исследуем его устойчивость по отношению к переменным p, q, r, ω_1 ω_2, ω_3, γ_1, γ_2, γ_3.

Отметим, что в частном решении (3.1) уравнений движения системы величины ω и Ω могут иметь произвольные значения. Практический интерес представляют значения Ω на интервале $0 < \varepsilon \leqslant \Omega \leqslant \omega$, где ε — бесконечно малая величина, ибо, как показывает опыт, при равномерном вращении тела вокруг неподвижной оси, проходящей через центр полости, жидкость, если она не была предварительно завихрена, вначале совершает безвихревое движение (в частности, покоится), а затем все более и более вовлекается силами трения в движение тела, пока не будет двигаться с ним как одно твердое тело. В дальнейшем мы ограничимся именно этим случаем, когда $\varepsilon \leqslant \Omega \leqslant \omega$.

Уравнения возмущенного движения получим из уравнений (1.7), (2.3), (2.6), полагая в возмущенном движении

$$r = \omega + \xi, \qquad \omega_3 = \Omega + \eta, \qquad \gamma_3 = 1 + \zeta$$

и сохраняя прежние обозначения для остальных переменных.

Очевидно, уравнения возмущенного движения в общем случае будут обладать следующими первыми интегралами:

$$\begin{aligned} V_1 &= Ap^2 + Bq^2 + C(\xi^2 + 2\omega\xi) + A_2\omega_1^2 + \\ &\qquad + B_2\omega_2^2 + C_2(\eta^2 + 2\Omega\eta) + 2R\zeta = \text{const} \\ V_2 &= Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + C(\xi + \omega\zeta + \xi\zeta) + \\ &\qquad + A_2\omega_1\gamma_1 + B_2\omega_2\gamma_2 + C_2(\eta + \Omega\zeta + \eta\zeta) = \text{const} \\ V_3 &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \zeta^2 + 2\zeta = 0 \\ V_4 &= b^2c^2\omega_1^2 + a^2c^2\omega_2^2 + a^2b^2(\eta^2 + 2\Omega\eta) = \text{const} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Для построения функций Ляпунова воспользуемся методом Н. Г. Четаева линейной связки первых интегралов (3.2). Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} V &= V_1 - 2\omega V_2 + \lambda V_4 + \mu V_3 + \tfrac{1}{4}\varkappa V_3^2 = \\ &= Ap^2 - 2A\omega p\gamma_1 + (A_2 + \lambda b^2c^2)\omega_1^2 - 2A_2\omega\omega_1\gamma_1 + \mu\gamma_1^2 + \\ &+ Bq^2 - 2B\omega q\gamma_2 + (B_2 + \lambda a^2c^2)\omega_2^2 - 2B_2\omega\omega_2\gamma_2 + \mu\gamma_2^2 + \\ &+ C\xi^2 - 2C\omega\xi\zeta + (C_2 + \lambda a^2b^2)\eta^2 - 2C_2\omega\eta\zeta + (\varkappa + \mu)\zeta^2 + \cdots \end{aligned} \tag{3.3}$$

где для сокращения введены обозначения

$$\lambda = C_2\frac{\omega - \Omega}{\Omega a^2b^2}, \qquad \mu = (C\omega + C_2\Omega)\omega - R \tag{3.4}$$

для постоянных коэффициентов; коэффициент $\varkappa$ остается пока произвольным.

Функция (3.3) представляет собой сумму трех квадратичных форм, зависящих каждая от трех переменных, и невыписанных членов третьего и четвертого порядков относительно $\gamma_1, \gamma_2, \zeta$. Условия положительной знакоопределенности этих форм получим, воспользовавшись неравенствами Сильвестра; последние при $\varkappa > R$ и $\omega \geqslant \Omega$ приводятся с учетом обозначений (3.4) к виду

$$\begin{aligned} &\left[A_2 + C_2\frac{c^2}{a^2}\left(\frac{\omega}{\Omega} - 1\right)\right][(C - A)\omega^2 + C_2\omega\Omega - R] - A_2^2\omega^2 > 0 \\ &\left[B_2 + C_2\frac{c^2}{b^2}\left(\frac{\omega}{\Omega} - 1\right)\right][(C - B)\omega^2 + C_2\omega\Omega - R] - B_2^2\omega^2 > 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Согласно теореме Ляпунова об устойчивости, неравенства (3.5) являются достаточными условиями устойчивости невозмущенного движения (3.1) по отношению к переменным $p, q, r, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Посмотрим, какой вид примут эти условия при $\Omega = \varepsilon$, когда движение жидкости в полости (1.1) весьма близко к потенциальному, и при $\Omega = \omega$, когда жидкость и тело вращаются как одно твердое тело.

В первом случае, если считать ε бесконечно малой величиной, они будут, очевидно, выполнены, если

$$(C-A)\omega^2 - R > \delta(\varepsilon) > 0, \qquad (C-B)\omega^2 - R > \delta(\varepsilon) > 0 \tag{3.6}$$

где $\delta(\varepsilon)$ — малая величина. Условия (3.6) практически совпадают с достаточными условиями устойчивости вращения твердого тела с полостью наполненной жидкостью, совершающей безвихревое движение [6]. Они имеют такой же вид, как и достаточные условия устойчивости вращения одного твердого тела с моментами инерции A, B, C.

Во втором случае, при $\Omega = \omega$, условия (3.5) принимают вид [5]:

$$(C + C_2 - A - A_2)\omega^2 - R > 0, \qquad (C + C_2 - B - B_2)\omega^2 - R > 0 \tag{3.7}$$

Эти условия совпадают с достаточными условиями устойчивости вращения одного твердого тела с моментами инерции $A + A_2$, $B + B_2$, $C + C_2$, равными суммам моментов инерции тела и жидкости в его полости.

Неравенства (3.5) при $R = 0$ приводят к достаточным условиям устойчивости невозмущенного движения по инерции. Например, при $\Omega = \omega$ они примут вид (3.7), если в последних положить $R = 0$.

Перейдем теперь к исследованию устойчивости движения (3.1) для случая, когда ось Oz является осью симметрии как полости (1.1), так и осью динамической симметрии тела, т. е. когда

$$a = b, \qquad A = B \tag{3.8}$$

При этих условиях уравнения возмущенного движения системы имеют, помимо первых интегралов (3.2), в которых надо учесть равенства (3.8), также интеграл

$$V_5 = \xi = \text{const}$$

Легко видеть, что условия (3.5) устойчивости невозмущенного движения приводятся в этом случае к одному неравенству [7]

$$[(C_1 - A)\omega^2 + C_2\Omega\omega - R]\left(\frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} + \frac{\omega}{\Omega}\right) - \frac{4a^2c^2}{(a^2 + c^2)^2} C_2\omega^2 > 0$$

Можно указать и иные достаточные условия устойчивости. С этой целью рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} V = V_1 + 2\lambda V_2 - (R + C\omega\lambda + C_2\Omega\lambda)V_3 + \mu V_4 - \\ - 2C(\omega + \lambda)V_5 + \frac{C(C-A)}{A} V_5^2 = A(p^2 + q^2) + 2A\lambda(p\gamma_1 + q\gamma_2) - \\ - (R + C\omega\lambda)(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + \frac{C^2}{A}\xi^2 + 2C\lambda\xi\zeta - \\ - (R + C\omega\lambda)\zeta^2 + (A_2 + \mu a^2c^2)(\omega_1^2 + \omega_2^2) + 2A_2\lambda(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) - \\ - C_2\Omega\lambda(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + (C_2 + \mu a^4)\eta^2 + 2C_2\lambda\eta\zeta - C_2\Omega\lambda\zeta^2 \end{aligned} \tag{3.9}$$

где λ — некоторая постоянная, а $\mu = -C_2(\lambda + \Omega)/a^4\Omega$.

Функцию (3.9) для простоты можно рассматривать как сумму шести квадратичных форм от двух переменных каждая. Сумма первых трех квадратичных форм в выражении (3.9) аналогична функции Ляпунова для одного твердого тела [8] с моментами инерции $A = B$, C; она будет определенно-положительной при выполнении условия Майевского

$$C^2\omega^2 - 4AR > 0 \tag{3.10}$$

При этом постоянный коэффициент λ может иметь любое значение в интервале

$$\lambda_1 < \lambda < \lambda_2 < 0 \tag{3.11}$$

где λ_1 и λ_2 — корни уравнения $A\lambda^2 + C\omega\lambda + R = 0$.

Четвертая и пятая квадратичные формы в правой части равенства (3.9) будут определенно-положительными при выполнении следующего условия для отрицательного λ:

$$\lambda < \frac{a^2 + c^2}{a^2 - c^2}\Omega \tag{3.12}$$

Наконец, последняя из квадратичных форм в равенстве (3.9) является, как легко видеть, постоянно-положительной при $\lambda < 0$.

Таким образом, при выполнении условий (3.10) и (3.12), если в последнем из них стеснить выбор постоянной λ неравенствами (3.11), функция (3.9) будет определенно-положительной функцией всех переменных, что и доказывает при этих условиях устойчивость невозмущенного движения (3.1) по отношению к величинам $p, q, r, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Очевидно, в случае очень малой величины $\Omega = \varepsilon$ условие (3.12) будет выполнено, вследствие чего при движении жидкости, весьма близком к потенциальному, достаточным условием устойчивости невозмущенного движения (3.1) является условие Майевского (3.10).

В случае, когда Ω конечна, условие (3.12) заведомо выполняется для полости (3.1), если $a > c$.

Если же $a = b < c$, то достаточными условиями устойчивости невозмущенного движения (3.1) будут неравенства (3.10) и

$$\frac{1}{2A}\left(-C\omega - \sqrt{C^2\omega^2 - 4AR}\right) < \frac{a^2 + c^2}{a^2 - c^2}\,\Omega$$

вытекающее из условий (3.11) и (3.12).

Поступила 23 VI 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собрание сочинений, т. III, ОНТИ, 1936.
2. Слудский Ф. А. Dé la rotation de la terre supposée fluide à son intèrieur. Bulletin de la Société des naturalistes de Moscou, v. IX, p. p. 285—318, 1895.
3. Hough. The Oscillations of a Rotating Ellipsoidal Schell containing Fluid. Phil. Transactions (A), vol. 186, 1, 1895.
4. Poincaré H. Sur la précéssion des corps déformables. Bulletin astronomique, t. XXVII, 1910.
5. Соболев С. Л. О движении волчка с полостью, наполненной жидкостью. Рукопись, Фонды Математического института им. Стеклова АН СССР, 1945.
6. Четаев Н. Г. Об устойчивости вращательных движений твердого тела, полость которого наполнена идеальной жидкостью. ПММ, т. XXI, вып. 2, 1957.
7. Румянцев В. В. Об устойчивости вращения твердого тела, имеющего эллипсоидальную полость, наполненную жидкостью. Труды Института механики АН СССР, вып. 2, 1956.
8. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехтеориздат, 1955.