

**ОБ УРАВНЕНИЯХ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ
ДВИЖУЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА ПОСРЕДСТВОМ ГИРОСКОПОВ
И ИЗМЕРИТЕЛЕЙ УСКОРЕНИЙ**

А. Ю. И ш л и н с к и й

(Москва)

Задача о так называемом автономном, т. е. без использования внешних ориентиров, определении местоположения движущегося объекта имеет большое практическое значение. До последнего времени эта задача не имела шансов на практическое разрешение из-за недостаточной точности чувствительных элементов, имеющих для этой цели в распоряжении инженера, именно — ньютометров¹, или измерителей ускорений, гироскопов и интеграторов. Однако недавно созданные новые элементы^[1] уже позволяют решить упомянутую выше задачу с удовлетворительной точностью, если продолжительность движения объекта сравнительно невелика.

В настоящей статье рассматривается теория одного из возможных вариантов задачи об автономном определении местоположения движущегося объекта.

Важный вопрос об оценке точности определения местоположения из-за наличия так называемых инструментальных ошибок интеграторов, ньютометров, гироскопов и других элементов схемы выходит за рамки статьи и может стать предметом специальных исследований. Поэтому в дальнейшем будет предполагаться, что упомянутые элементы функционируют без ошибок. Соответственно электромеханическая система, решающая задачу, будет рассматриваться в предположении, что все ее параметры точно соответствуют их теоретическим значениям, а технологические погрешности (например, неточность сборки и свободные ходы в передачах) отсутствуют. Вместе с тем начальные условия малых колебаний этой системы могут быть произвольными.

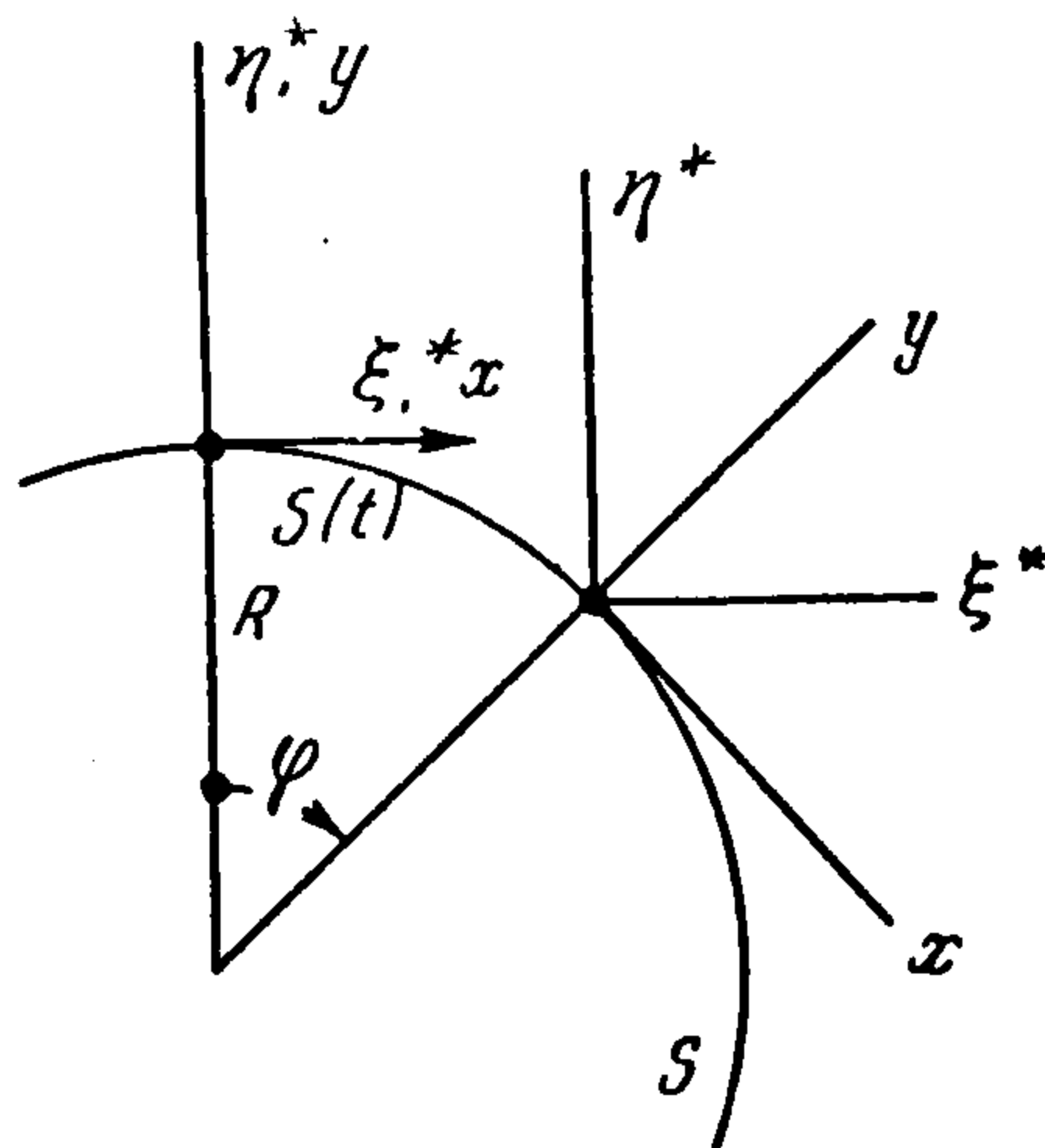
1. Изложим вначале решение известной задачи об автономном определении при перемещении объекта по дуге большого круга некоторой невращающейся сферы S , центр которой совпадает с центром Земли (фиг. 1). В простейшем случае это соответствует движению на постоянной высоте над экватором. Определение местоположения объекта относительно самой Земли здесь сводится к простому учету времени движения.

Свяжем с какой-либо определенной точкой движущегося объекта две системы координат xy и $\xi^*\eta^*$ с одним и тем же началом (фиг. 1). Упомянутую точку будем в дальнейшем называть центром объекта. Ось x

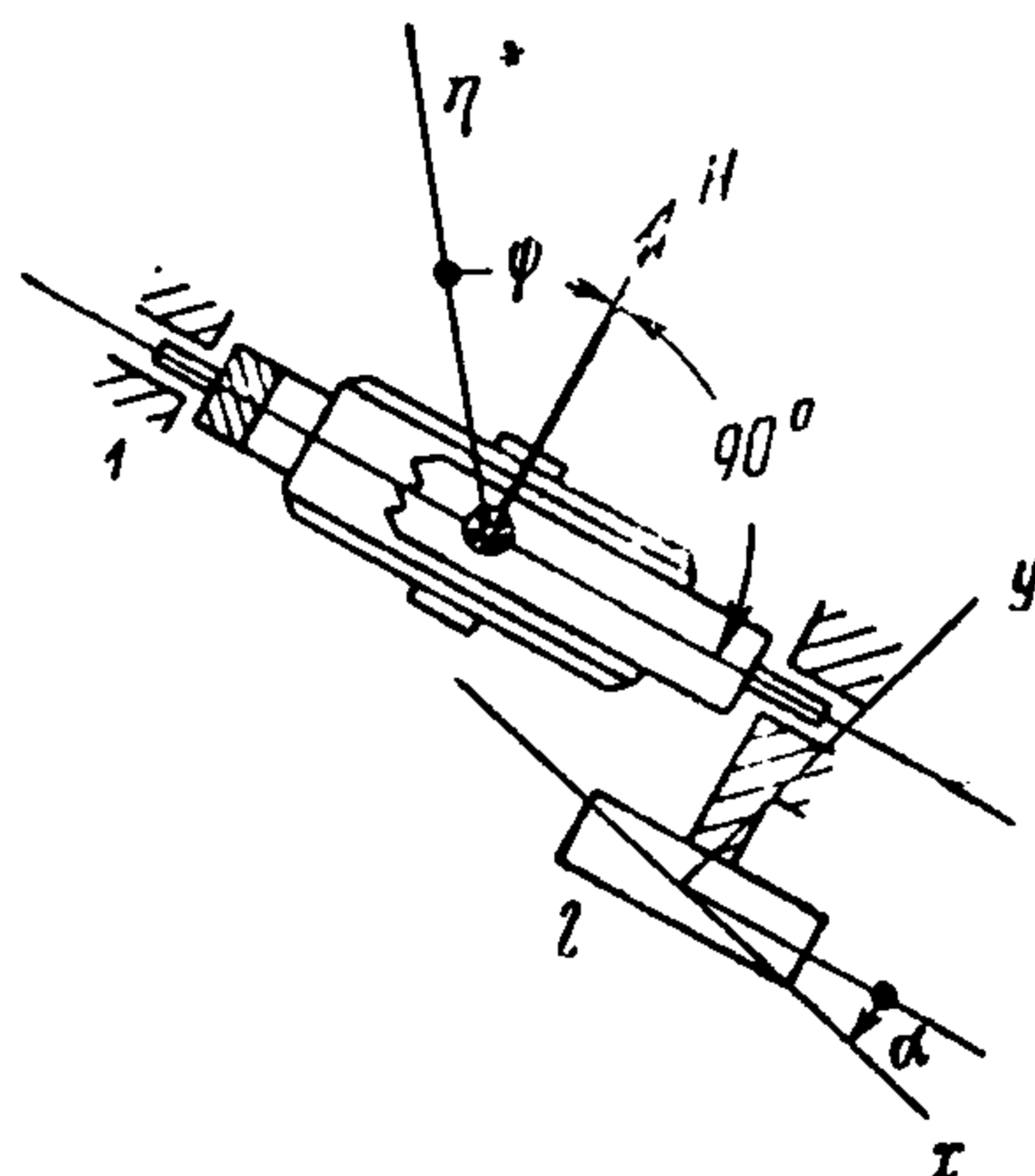
¹ Мы предлагаем приборы, известные ранее в технике под названием акселерометров, или измерителей ускорений, называть в дальнейшем ньютометрами, так как они измеряют совокупное воздействие на их чувствительный элемент и сил инерции переносного движения и сил тяготения. Именно измеряется проекция результирующей этих сил на некоторое связанное с прибором направление, именуемое в дальнейшем осью чувствительности ньютометра.

Заметим, что упомянутые силы инерции переносного движения следует определять, разумеется, по отношению к системе координат, жестко связанной с самим прибором. Влияние на показание прибора кориолисовых сил инерции обычно отсутствует.

системы координат xy направлена по вектору скорости объекта v . Соответственно, ось y является продолжением радиуса Земли, проведенного к центру движущегося объекта. Направление осей системы координат $\xi^*\eta^*$ неизменно (относительно неподвижных звезд или, что то же, относительно сферы S).



Фиг. 1



Фиг. 2

Пусть в начальное мгновение движения обе системы координат совпадают. В дальнейшем система координат xy окажется повернутой относительно поступательно перемещающейся системы $\xi^*\eta^*$ на некоторый угол φ , изменяющийся с течением времени. Этот угол связан с расстоянием $s = s(t)$, пройденным центром объекта от исходной точки, соотношением

$$\varphi = \frac{s}{R} \quad (1.1)$$

Здесь R — радиус дуги большого круга (радиус Земли), по которой перемещается центр объекта.

Расположим (фиг. 2) на объекте некоторую стабилизированную посредством гироскопов платформу I . В простейшем случае эта платформа при помощи специальных следящих систем ориентируется так, чтобы она все время была перпендикулярна вектору собственного кинетического момента некоторого гироскопа (фиг. 2). Подшипники оси внешнего кольца карданова подвеса этого гироскопа могут быть укреплены на стабилизированной платформе.

Пусть собственный кинетический момент гироскопа H лежи в плоскости $\xi^*\eta^*$, а некоторый момент $M = M(t)$ приложен к оси внешнего кольца его подвеса. Прецессия оси гироскопа происходит в этом случае в той же плоскости $\xi^*\eta^*$. Следуя за гироскопом, стабилизированная платформа будет поворачиваться с угловой скоростью

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{M(t)}{H} \quad (1.2)$$

где ψ — угол между осью собственного вращения гироскопа и осью η^* .

Расположим далее (фиг. 2) в плоскости стабилизированной платформы I ньютонометр 2 и обозначим через $a = a(t)$ его текущее показание.

Пусть ось чувствительности ньютонометра совпадает с осью x . Тогда его показание $a(t)$ (фиг. 3) выражается формулой

$$a(t) = \left(j - \frac{v^2}{g}\right) \sin \alpha + \frac{d^2s}{dt^2} \cos \alpha \quad (1.3)$$

Здесь j — отнесенная к единице массы сила тяготения, а угол

$$\alpha = \varphi - \psi \quad (1.4)$$

представляет собой отклонение стабилизированной платформы от горизонтального (точнее, перпендикулярного радиусу Земли) направления. Если функцию $a(t)$, получающуюся на выходе ньютометра, посредством специальных устройств проинтегрировать, то в результате можно образовать новую функцию

$$K \int_0^t a(t) dt + m \quad (1.5)$$

где K и m — некоторые постоянные параметры. Необходимые значения этих параметров будут установлены позже.

Функцию (1.5) можно воспроизвести в виде момента $M(t)$, действующего на гироскоп стабилизированной платформы. Тогда, подставив $M(t)$ в формулу (1.2) и интегрируя, получим

$$\psi = \frac{K}{H} \int_0^t \int_0^t a(t) dt^2 + \frac{m}{H} t + \psi_0 \quad (1.6)$$

где ψ_0 — угол наклона стабилизированной платформы в начальное мгновение времени $t = 0$ к горизонту (точнее, к оси x или к совпадающей с ней в это мгновение оси ξ^*).

Учитывая формулы (1.1) и (1.4) и соотношение (1.6), имеем равенство

$$\alpha = \frac{s}{R} - \frac{K}{H} \int_0^t \int_0^t a(t) dt^2 - \frac{m}{H} t - \psi_0 \quad (1.7)$$

которое позволяет установить дифференциальное уравнение для функции $\alpha = \alpha(t)$ и начальные условия этого уравнения. Действительно, полагая $t = 0$ в равенстве (1.7), и замечая, что $s(0) = 0$, имеем

$$\alpha(0) = -\psi_0 \quad (1.8)$$

что, разумеется, следует и непосредственно из формулы (1.4). Далее приравняем производные левой и правой частей равенства (1.7). Получим

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} - \frac{K}{H} \int_0^t a(t) dt - \frac{m}{H} \quad (1.9)$$

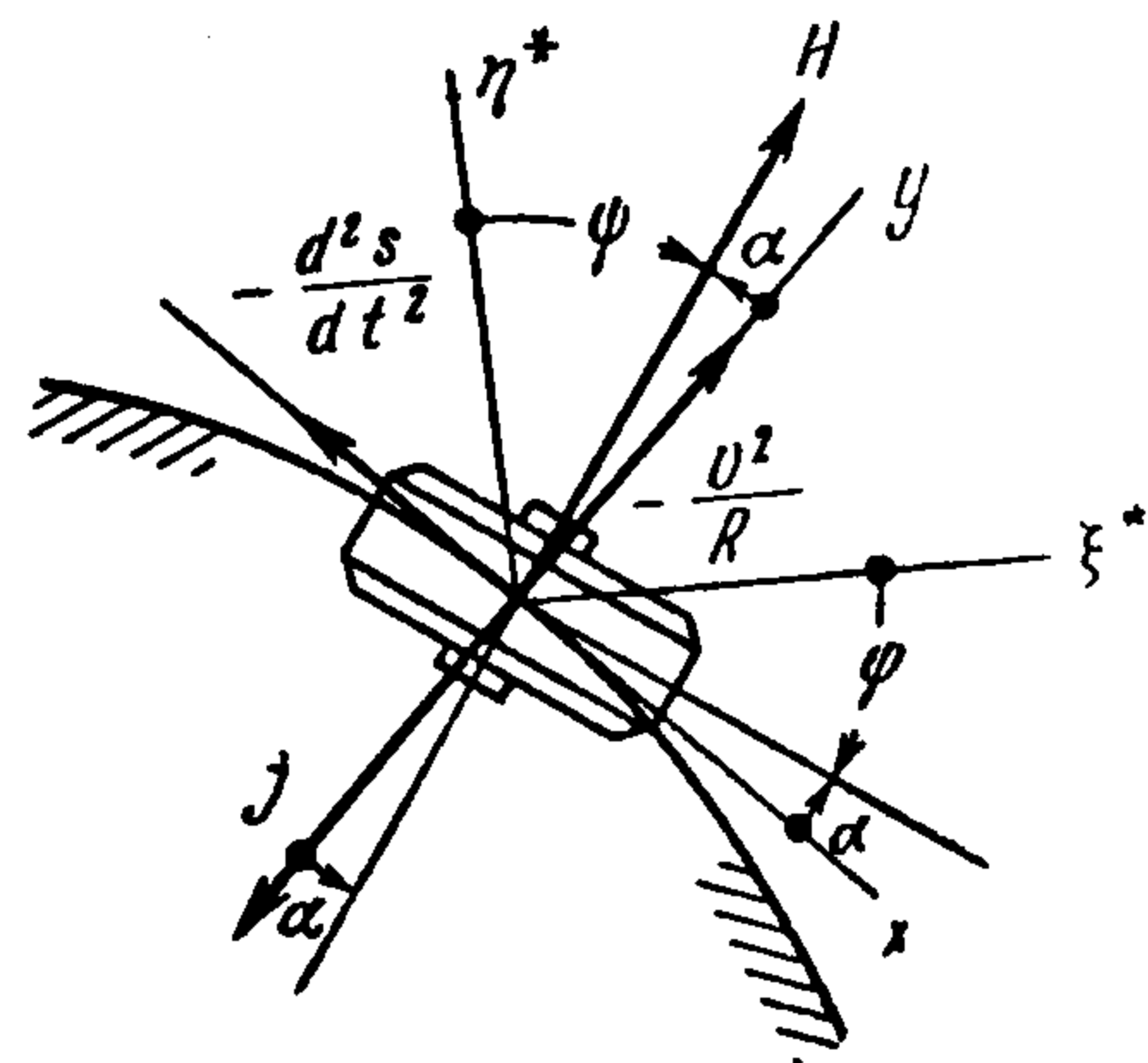
Отсюда следует, что начальное значение производной функции $\alpha(t)$ по времени выражается формулой

$$\frac{d\alpha(0)}{dt} = \frac{v(0)}{R} - \frac{m}{H} \quad \left(v(0) = \frac{ds(0)}{dt} \right) \quad (1.10)$$

Здесь $v(0)$ — начальное значение скорости центра объекта относительно невращающейся сферы S .

Наконец, если продифференцировать обе части равенства (1.7) еще раз и учесть формулу (1.3), то придем к соотношению

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{K}{H} \left(j - \frac{v^2}{R} \right) \sin \alpha = \left(\frac{1}{R} - \frac{K}{H} \cos \alpha \right) \frac{d^2s}{dt^2} \quad (1.11)$$



Фиг. 3

При заданной функции $s = s(t)$ это соотношение можно рассматривать как дифференциальное уравнение второго порядка для функции $\alpha = \alpha(t)$, т. е. для угла наклона стабилизированной площадки к горизонту. Начальные условия этого дифференциального уравнения определяются равенствами (1.8) и (1.10).

2. Дифференциальное уравнение (1.11) имеет весьма важный для решения задачи об автономном определении местоположения движущегося объекта частный интеграл

$$\alpha \equiv 0 \quad (2.1)$$

если только, как нетрудно видеть, осуществляется равенство

$$\frac{1}{R} = \frac{K}{H} \quad (2.2)$$

а начальные условия таковы, что

$$\alpha(0) = 0, \quad \frac{d\alpha(0)}{dt} = 0 \quad (2.3)$$

Равенство (2.2) определяет величину параметра K . Первое условие (2.3) вместе с равенством (1.8) приводит к требованию, чтобы начальное отклонение стабилизированной площадки от горизонта отсутствовало, т. е. имело место равенство

$$\psi_0 = 0 \quad (2.4)$$

Согласно второму условию (2.3) и формуле (1.10), имеем

$$\frac{v(0)}{R} = \frac{m}{H} \quad (2.5)$$

Это определяет величину параметра m в устройстве, образующем функцию (1.5).

Таким образом, при соблюдении условий (2.4) и (2.5), а также равенства (2.2) стабилизированная платформа будет оставаться в горизонте (точнее, будет перпендикулярной радиусу Земли) при любом законе движения центра объекта $s = s(t)$.

Однако, если $\alpha \equiv 0$, то $a(t) = d^2s/dt^2$ в соответствии с формулой (1.3) и, следовательно, функция (1.5) при учете условий (2.5) и (2.2) примет вид:

$$K \left[\int_0^t \frac{d^2s}{dt^2} dt + v(0) \right] = Kv(t) \quad (2.6)$$

Таким образом, в этом случае функция (1.5) представляет собой с точностью до постоянного множителя K текущее значение скорости объекта $v = v(t)$ относительно невращающейся сферы S . Поэтому, если теперь подать функцию (1.5) на второе интегрирующее устройство, то при тех же предположениях получим на его выходе искомое расстояние $s(t)$, пройденное центром объекта от исходного положения (также с точностью до множителя K).

3. В общем же случае при $\alpha \neq 0$ величина

$$\int_0^t \left[K \int_0^t a(t) dt + m \right] dt \quad (3.1)$$

вырабатываемая упомянутыми интегрирующими устройствами, отличается от произведения $Ks(t)$. В соответствии с равенством (1.7) и условием (2.2) имеем

$$s(t) - \frac{1}{K} \int_0^t \left\{ \int_0^t Ka(t) dt + m \right\} dt = R\alpha(t) + R\psi_0 \quad (3.2)$$

Таким образом, ошибка Δs в определении расстояния $s(t)$ посредством описанного метода составляет величину

$$\Delta s = R [\alpha(t) - \alpha(0)] \quad (3.3)$$

где $\alpha(t)$ определяется дифференциальным уравнением (1.11) при начальных условиях (1.8) и (1.10) и соблюдении равенства (2.2).

Угол $\alpha(t)$ наклона стабилизированной платформы к оси x можно считать весьма малым. Поэтому, опуская в уравнении (1.11) члены второго порядка малости относительно α , приходим, учитывая равенство (2.2), к следующему однородному линейному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{1}{R} \left(j - \frac{v^2}{R} \right) \alpha = 0 \quad (3.4)$$

С известным приближением можно принять, что

$$j - \frac{v^2}{R} = g = \text{const} \quad (3.5)$$

где g — величина ускорения силы тяжести в районе движения объекта. Решение уравнения (3.4) имеет в этом случае вид гармонической функции:

$$\alpha(t) = \alpha(0) \cos vt + \frac{1}{v} \frac{d\alpha(0)}{dt} \sin vt \quad \left(v^2 = \frac{g}{R} \right) \quad (3.6)$$

период которой

$$T = 2\pi \sqrt{R/g} \approx 84.4 \text{ мин.}$$

известен в теории гироскопов под названием периода Шулера

Таким образом, в общем случае в соответствии с формулами (3.3) и (3.6) ошибка при автономном определении местоположения объекта посредством изложенного метода имеет колебательный характер.

4. Могут быть предложены также и другие методы определения местоположения объекта, приводящие в общем к тем же результатам.

Например, пусть платформа стабилизируется по отношению к системе координат $\xi^*\eta^*$ так, чтобы она оставалась параллельной оси ξ^* . Такую стабилизацию можно осуществить посредством свободных гироскопов или слежения за звездами (астронавигация) [2]. В этом случае ньютонометр следует поворачивать относительно платформы на угол

$$\chi = \frac{1}{R} \int_0^t \int_0^t a(t) dt^2 + \frac{v(0)}{R} t \quad (4.1)$$

для чего следует производить двойное интегрирование его показаний.

При точном соблюдении некоторых равенств, аналогичных предыдущим, имеем

$$s = R\chi \quad (4.2)$$

Существуют оригинальные устройства, которые необходимое двойное интегрирование осуществляют сразу, без разбиения на две последовательные операции (интегратор типа Бойкова) [3].

5. Перейдем к рассмотрению вопроса об определении местоположения объекта, центр которого произвольно перемещается по земной сфере. Для решения задачи воспользуемся платформой, стабилизируемой гироскопами так, чтобы посредством трех моментов M_1 , M_2 и M_3 , приложенных к осям кожухов гироскопов, возникали угловые скорости

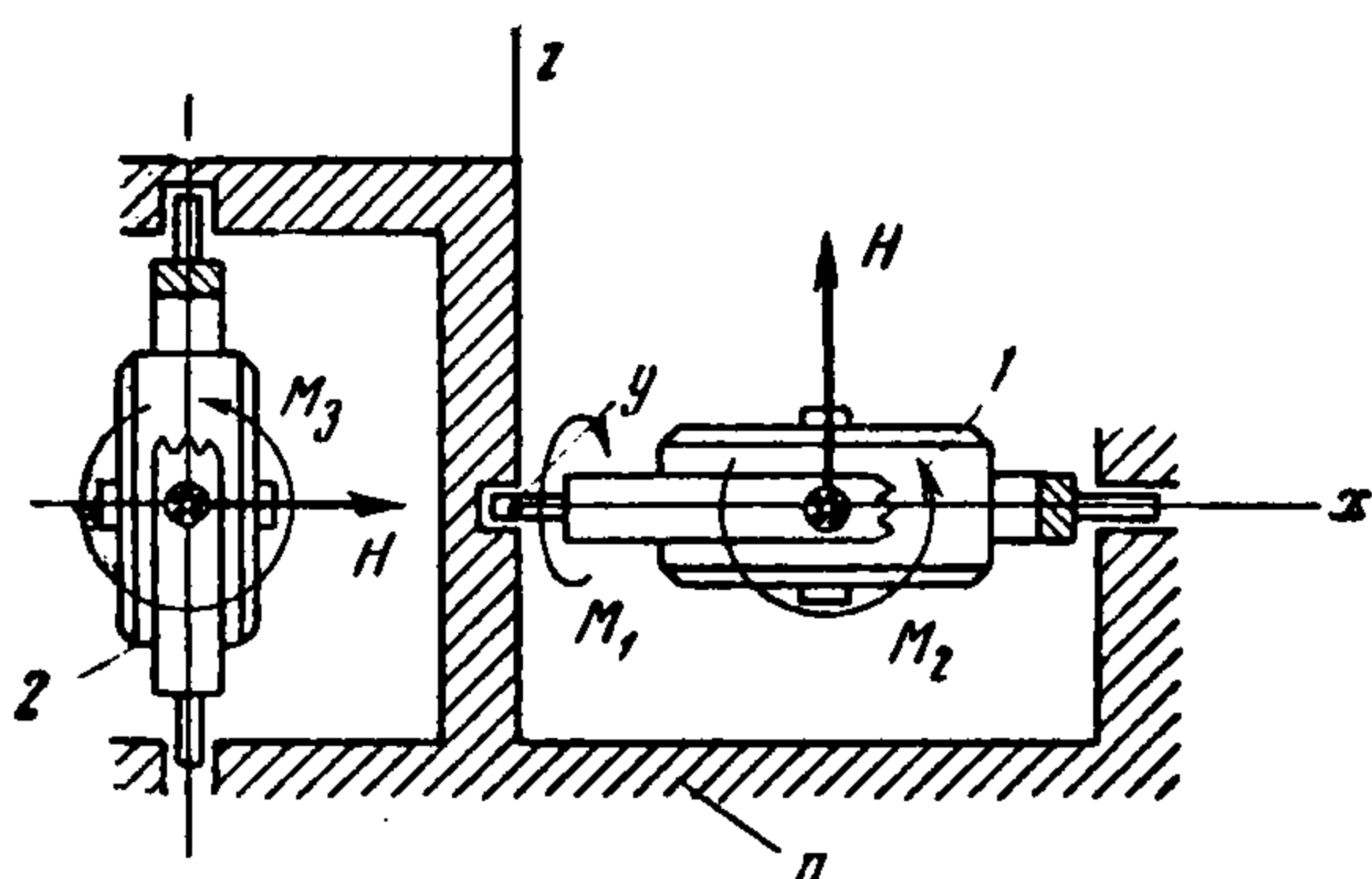
$$\omega_x = \frac{M_1}{H}, \quad \omega_y = \frac{M_2}{H}, \quad \omega_z = \frac{M_3}{H} \quad (5.1)$$

вокруг осей x и y , лежащих в плоскости платформы, и оси z , нормальной к ней.

На фиг. 4 изображена одна из возможных схем осуществления подобной стабилизации. Плоскость платформы Π , связанной с объектом пространственным кардановым подвесом (на рисунке не показан), при помощи следящих систем непрерывно приводится к совмещению с плоскостью, перпендикулярной собственной оси гироскопа 1 . Подшипники оси внешнего кольца карданова подвеса этого гироскопа расположены на стабилизированной платформе так, чтобы сама ось лежала в плоскости платформы. При идеальной работе следящих систем ось внутреннего кольца, или, что то же, ось кожуха гироскопа, также совпадает с плоскостью платформы. Пусть M_1 и M_2 — моменты, приложенные соответственно к оси внешнего кольца подвеса и к оси кожуха, которые соответственно обозначим через x и y . Моменты M_1 и M_2 вызовут прецессию гироскопа и, как следствие, вращение платформы вокруг осей x и y с угловыми скоростями ω_x и ω_y . Величины последних определяются первыми двумя формулами (5.1).

С платформой связаны подшипники оси внешнего карданова кольца гироскопа 2 (фиг. 4) с таким же собственным кинетическим моментом H , как и первый. Ось упомянутого внешнего кольца перпендикулярна плоскости платформы. К этой оси прилагается некоторый корректирующий момент таким образом, чтобы ось собственного вращения гироскопа 1 была параллельна плоскости платформы. Далее специальная следящая система непрерывно совмещает с осью собственного вращения гироскопа 2 упомянутую выше ось x , которую следует считать жестко связанной со стабилизированной платформой. Момент M_3 , приложенный к оси кожуха второго гироскопа, вызывает прецессию гироскопа и, как следствие — вращение платформы с угловой скоростью ω_z , параллельной оси z . Последняя перпендикулярна плоскости платформы и образует вместе с осями x и y прямоугольную систему координат xuz , жестко связанную с платформой. Начало этой системы будем считать расположенным в центре объекта. Величины M_3 и ω_z связаны третьей формулой (5.1).

На стабилизированной платформе в непосредственной близости к началу системы координат xuz расположены два ньютометра, оси чувствительности которых направлены по осям координат x и y . Пусть центр



Фиг. 4

движущегося объекта перемещается произвольным образом по земной сфере, а моменты M_1 и M_2 связаны с показаниями соответствующих ньютометров a_x и a_y формулами

$$M_2 = -K \int_0^t a_y dt - m_1, \quad M_1 = K \int_0^t a_x dt + m_2 \quad (5.2)$$

для чего должны быть предусмотрены специальные интегрирующие устройства.

Выясним, каковы должны быть параметры K , m_1 и m_2 , а также момент M_3 , чтобы плоскость платформы оставалась горизонтальной.

Проекция на оси x , y и z ускорения начала координат относительно невращающейся сферы S выражаются формулами [4, 5]

$$\begin{aligned} w_x &= \frac{dv_x}{dt} + \omega_y v_z - \omega_z v_y \\ w_y &= \frac{dv_y}{dt} + \omega_z v_x - \omega_x v_z \\ w_z &= \frac{dv_z}{dt} + \omega_x v_y - \omega_y v_x \end{aligned} \quad (5.3)$$

где v_x , v_y и v_z — проекции на те же оси скорости начала координат относительно сферы S . В рассматриваемом случае $v_z \equiv 0$, и сила тяготения имеет проекции на оси x и y , равные нулю. Следовательно, ньютометры измеряют непосредственно ускорения w_x и w_y и согласно формулам (5.1) и (5.2) имеют место равенства

$$\begin{aligned} \omega_x &= -\frac{K}{H} \int_0^t \left(\frac{dv_y}{dt} + \omega_z v_x \right) dt - \frac{m_1}{H} \\ \omega_y &= \frac{K}{H} \int_0^t \left(\frac{dv_x}{dt} - \omega_z v_y \right) dt + \frac{m_2}{H} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Так как при движении объекта плоскость платформы должна оставаться горизонтальной и ось z направленной по радиусу Земли, то в равенствах (5.4) следует [5] считать, что

$$v_x = \omega_y R, \quad v_y = -\omega_x R \quad (5.5)$$

Пользуясь последними формулами, исключим в равенствах (5.4) величины ω_x и ω_y . Получим

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{KR}{H} \int_0^t \left(\frac{dv_x}{dt} - \omega_z v_y \right) dt + \frac{R}{H} m_2 \\ v_y &= \frac{KR}{H} \int_0^t \left(\frac{dv_y}{dt} + \omega_z v_x \right) dt + \frac{R}{H} m_1 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Равенства (5.6) должны удовлетворяться при произвольном изменении v_x и v_y , т. е. должны быть тождествами. Однако это возможно лишь при следующих условиях:

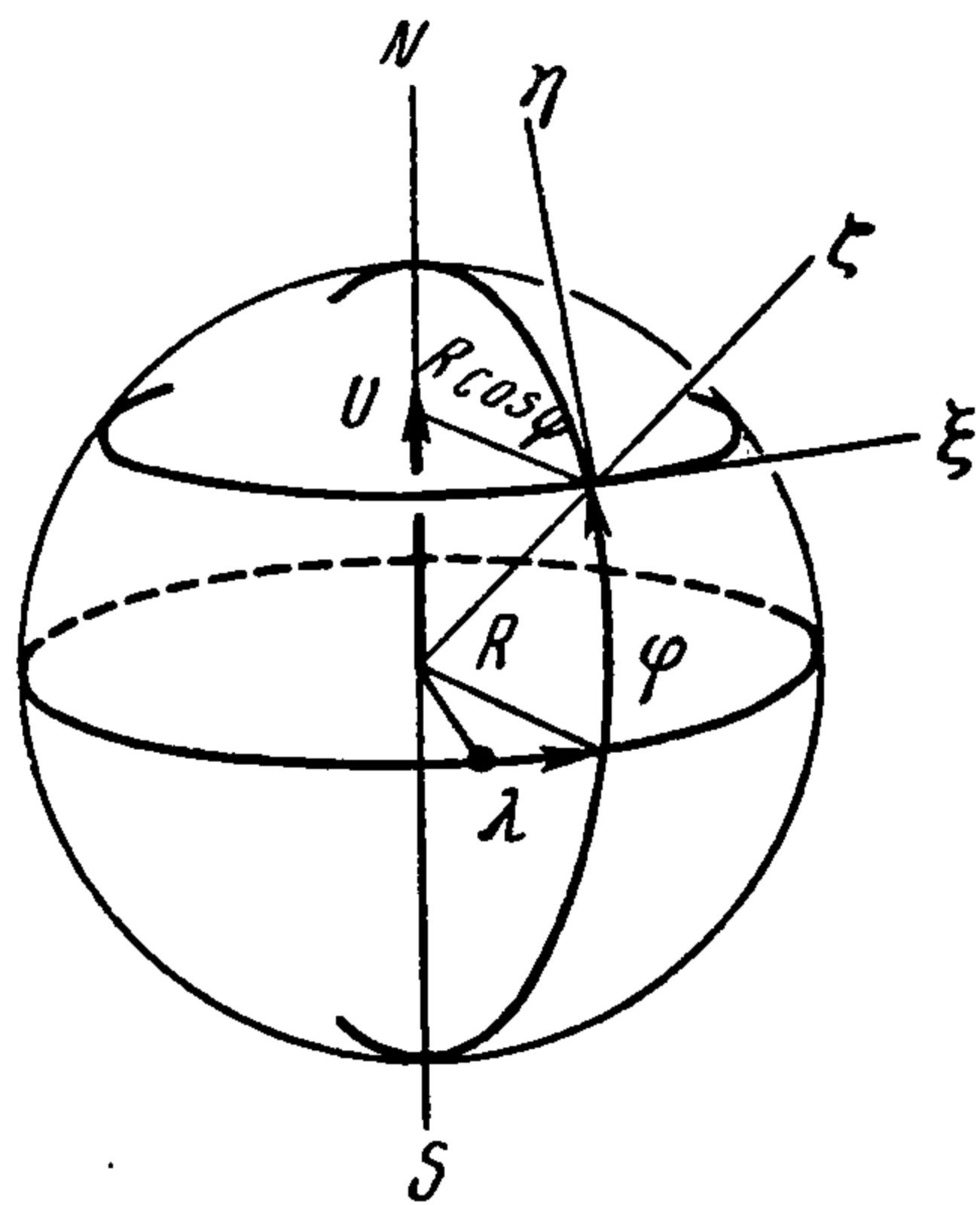
$$\frac{KR}{H} = 1, \quad \omega_z \equiv 0, \quad m_1 = K v_y(0), \quad m_2 = K v_x(0) \quad (5.7)$$

Первое из них совпадает с равенством (2.2), второе в соответствии с третьей формулой (5.1) приводит к требованию

$$M_3 = 0 \quad (5.8)$$

Наконец, последние два условия касаются согласования начальной скорости центра движущегося объекта (относительно сферы S), точнее, ее проекций на оси x и y , с параметрами m_1 и m_2 интегрирующих устройств.

6. Согласно формулам (5.1), (5.2) и (5.8) проекции угловой скорости стабилизированной платформы ω_x и ω_y в результате работы интеграторов



Фиг. 5

являются теперь известными функциями времени, $\omega_z \equiv 0$, а ось z направлена по радиусу Земли. В принципе это позволяет непрерывно определять местоположение объекта на земной сфере и его курс.

Действительно, рассмотрим (фиг. 5) так называемый географический трехгранник $\xi\eta\zeta$, вершина которого совпадает с началом системы координат x,y,z (т. е. с центром объекта), ребро ξ направлено к востоку, ребро η — к северу и, наконец, ребро ζ — по радиусу Земли кверху. Проекции на ребра ξ , η и ζ угловой скорости u этого трехгранника относительно не-

вращающейся сферы S выражаются [6] формулами

$$u_\xi = -\frac{V_N}{R}, \quad u_\eta = \frac{V_E}{R} + U \cos \varphi, \quad u_\zeta = \frac{V_E}{R} \operatorname{tg} \varphi + U \sin \varphi \quad (6.1)$$

Здесь U — угловая скорость Земли, φ — текущая широта места, V_E и V_N — соответственно восточная и северная составляющие скорости центра объекта относительно Земли. Очевидно, что

$$V_E = R \cos \varphi \frac{d\lambda}{dt}, \quad V_N = R \frac{d\varphi}{dt} \quad (6.2)$$

где λ — текущая долгота.

Ребро ζ совпадает в данном случае с осью z . Поэтому проекции ω_x , ω_y и ω_z связаны с величинами u_ξ , u_η и u_ζ соотношениями

$$\begin{aligned} \omega_x &= u_\xi \cos \chi + u_\eta \sin \chi \\ \omega_y &= -u_\xi \sin \chi + u_\eta \cos \chi, \quad \omega_z = u_\zeta + \frac{d\chi}{dt} \end{aligned} \quad (6.3)$$

где χ — угол между осями ξ и x (фиг. 6).

Учитывая формулы (6.1) и (6.2) и то обстоятельство, что $\omega_z \equiv 0$, а $\omega_x = \omega_x(t)$ и $\omega_y = \omega_y(t)$ являются известными функциями времени, приходим согласно соотношениям (6.3) к системе трех дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} -\frac{d\varphi}{dt} \cos \chi + \left(U + \frac{d\lambda}{dt} \right) \cos \varphi \sin \chi &= \omega_x(t) \\ \frac{d\varphi}{dt} \sin \chi + \left(U + \frac{d\lambda}{dt} \right) \cos \varphi \cos \chi &= \omega_y(t) \\ \left(U + \frac{d\lambda}{dt} \right) \sin \varphi + \frac{d\chi}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

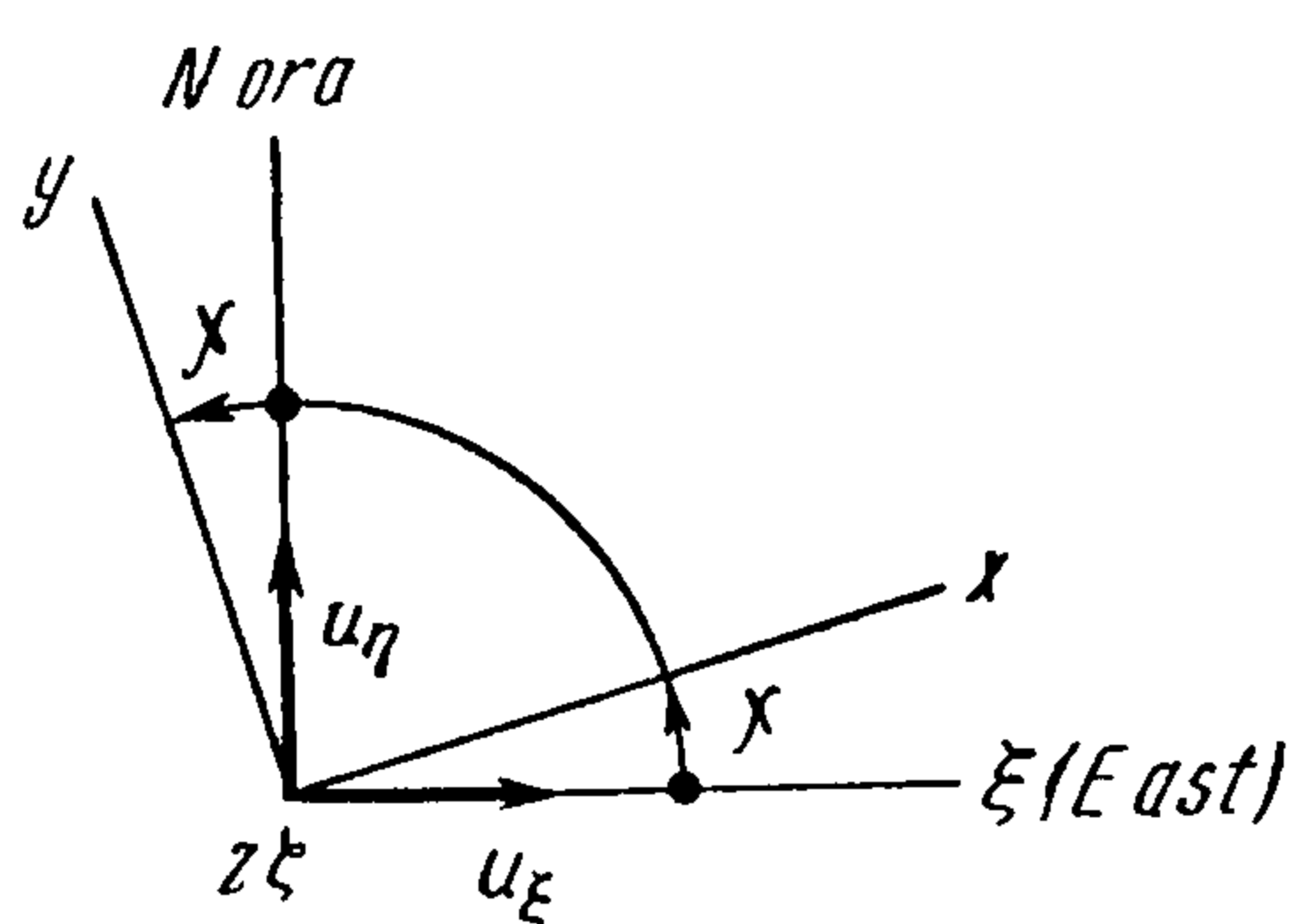
для трех искомых функций $\varphi(t)$, $\lambda(t)$ и $\chi(t)$.

При известных начальных условиях $\varphi(0)$, $\lambda(0)$ и $\chi(0)$, т. е. данных о местоположении объекта и его ориентации в начальное мгновение вре-

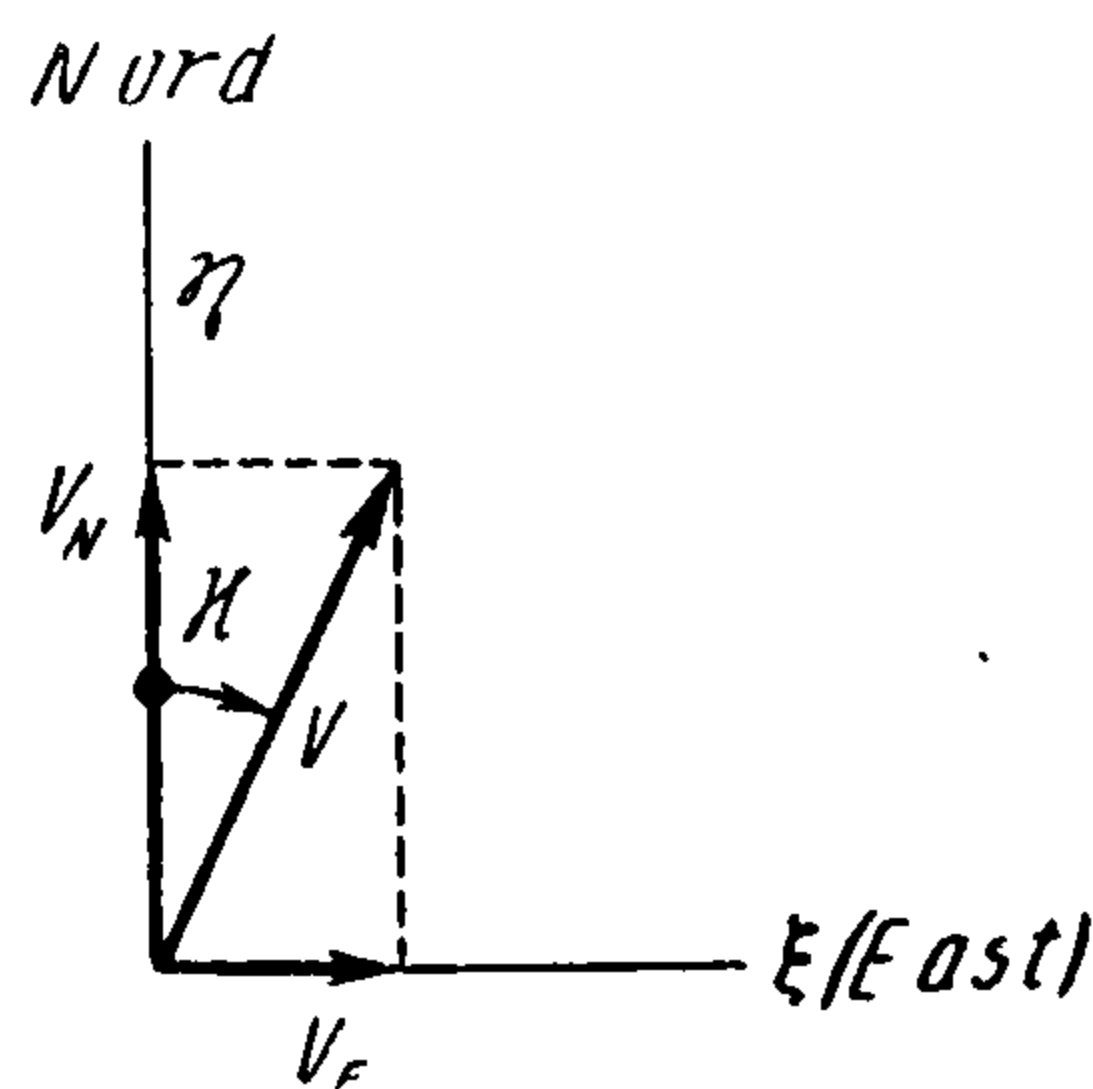
мени, уравнения (6.4) можно проинтегрировать на специальном счетно-решающем устройстве. Полезно при этом предварительно разрешить их относительно производных, т. е. представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= -\omega_x(t) \cos \chi + \omega_y(t) \sin \chi \\ \frac{d\lambda}{dt} &= -U + \frac{\omega_x(t) \sin \chi + \omega_y(t) \cos \chi}{\cos \varphi} \\ \frac{d\chi}{dt} &= -[\omega_x(t) \sin \chi + \omega_y(t) \cos \chi] \operatorname{tg} \varphi \end{aligned} \quad (6.5)$$

Определив функции $\varphi(t)$ и $\chi(t)$, можно найти, кроме того, курс объекта, т. е. угол κ , который образует вектор его скорости относительно



Фиг. 6



Фиг. 7

но земной поверхности с меридианом места (фиг. 7). В соответствии с формулами (6.2) и (6.5) курс κ определяется уравнением

$$\operatorname{tg} \kappa = \frac{U \cos \varphi - \omega_x(t) \sin \chi - \omega_y(t) \cos \chi}{\omega_x(t) \cos \chi - \omega_y(t) \sin \chi} \quad (6.6)$$

7. Перейдем теперь к исследованию малых движений стабилизированной платформы в предположении, что в начальное мгновение ее плоскость не находилась точно в горизонте и условия (5.7), касающиеся выбора значения параметров m_1 и m_2 , были выполнены с небольшой ошибкой. Вместе с тем будем считать, что первые два равенства (5.7) осуществлены совершенно точно.

Введем, трехгранник Дарбу $x^\circ y^\circ z^\circ$, ребра которого x° и y° касаются земной сферы [5,7], а следовательно, и невращающейся сферы S . Ребро x° направлено по вектору скорости v вершины трехгранника относительно сферы S . Трехгранник $x^\circ y^\circ z^\circ$ будем называть естественным трехгранником Дарбу. Его вершину расположим в центре движущегося объекта, т. е. в начале системы координат $x y z$, жестко связанной со стабилизированной платформой. Проекция угловой скорости ω° естественного трехгранника Дарбу на ребра x° , y° и z° представляются формулами

$$\omega_{x^\circ} = 0, \quad \omega_{y^\circ} = \frac{v}{R}, \quad \omega_{z^\circ} = \tilde{\omega} \quad (7.1)$$

Функция $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(t)$ при заданной скорости $v = v(t)$ определяет [7] геодезическую кривизну траектории вершины трехгранника $x^\circ y^\circ z^\circ$ на сфере S .

Проекция на ребра x° , y° и z° ускорения вершины трехгранника в его движении относительно невращающейся сферы S , в свою очередь, выра-

жаются формулами

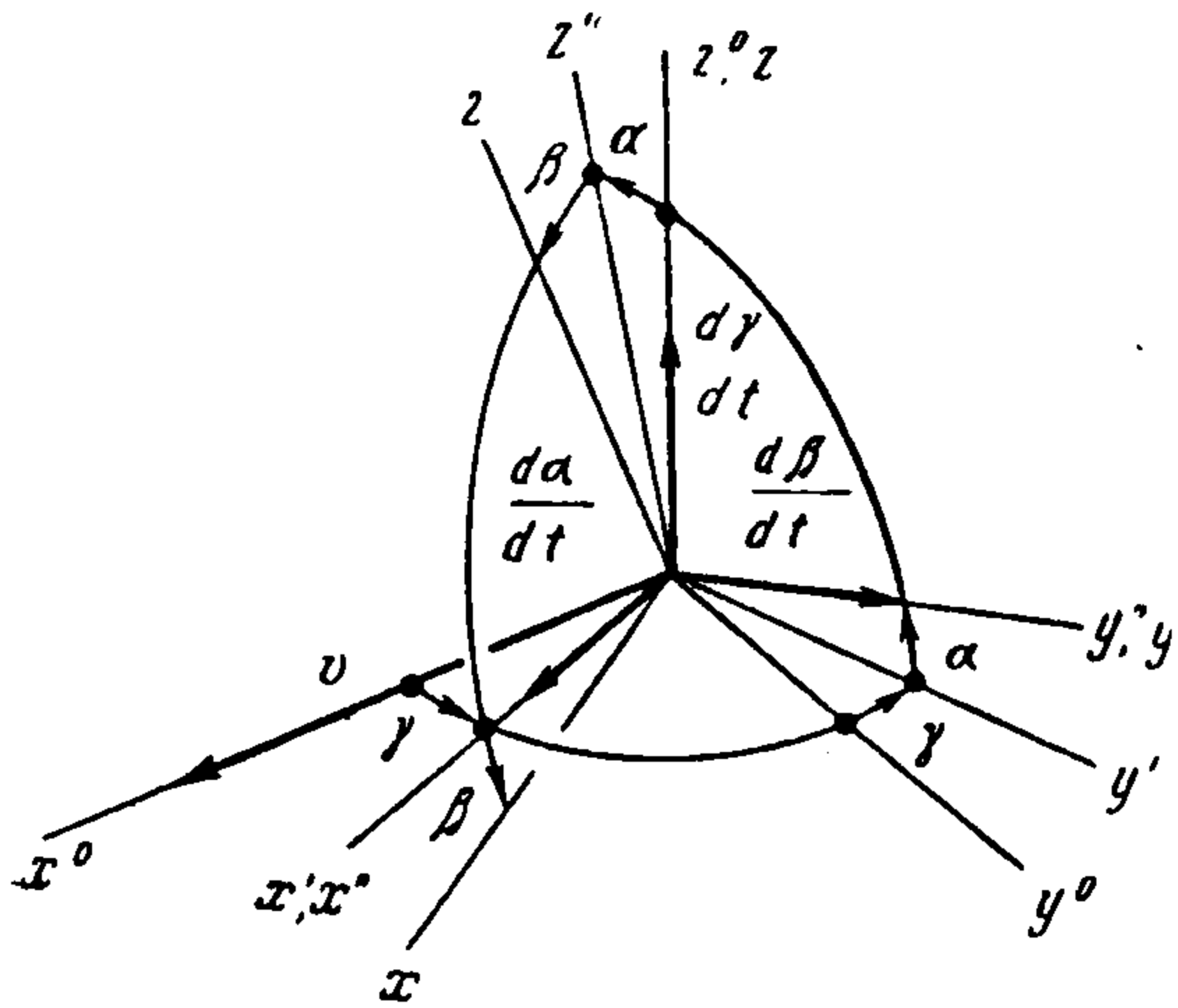
$$w_{x^{\circ}} = \frac{dv}{dt}, \quad w_{y^{\circ}} = \tilde{\omega}v, \quad w_{z^{\circ}} = -\frac{v^2}{R} \quad (7.2)$$

В дальнейшем потребуется таблица косинусов углов между осями системы координат xuz и ребрами трехгранника $x^{\circ}y^{\circ}z^{\circ}$. Она имеет вид:

	x°	y°	z°
x	$\cos \gamma \cos \beta - \sin \gamma \sin \alpha \sin \beta$	$\sin \gamma \cos \beta + \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta$	$-\cos \alpha \sin \beta$
y	$-\sin \gamma \cos \alpha$	$\cos \gamma \cos \alpha$	$\sin \alpha$
z	$\cos \gamma \sin \beta + \sin \gamma \sin \alpha \cos \beta$	$\sin \gamma \sin \beta - \cos \gamma \sin \alpha \cos \beta$	$\cos \alpha \cos \beta$

(7.3)

Здесь углы α , β и γ характеризуют ориентацию системы координат xuz относительно трехгранника $x^{\circ}y^{\circ}z^{\circ}$ (фиг. 8). Угол γ представляет собой



Фиг. 8

углом поворота относительно трехгранника вспомогательной системы координат $x'y'z'$. Ось z' этой системы совпадает с ребром z° . Поворот системы координат производится против стрелки часов (если смотреть со стороны положительной части оси z') до совмещения оси x' с плоскостью xz . Аналогично угол α определяется взаимным расположением системы координат $x'y'z'$ и другой вспомогательной системы $x''y''z''$, оси x' и x'' которых совпадают. Ось z'' последней системы координат

также совмещается с плоскостью xz , в результате чего ось y'' оказывается направленной по оси y .

При $\alpha > 0$ система координат $x''y''z''$ повернута относительно системы $x'y'z'$ против стрелки часов, если наблюдать за поворотом со стороны положительной части оси x' (или, что то же, оси x'').

Наконец, угол β представляет собой угол между осями x и x'' систем координат xuz и $x''y''z''$. Знак угла β определяется аналогично знакам углов γ и α .

Угловая скорость ω системы координат xuz относительно невращающейся сферы S является геометрической суммой угловой скорости ω° естественного трехгранника Дарбу относительно той же сферы и трех относительных угловых скоростей $d\gamma/dt$, $d\alpha/dt$ и $d\beta/dt$. Последние соответственно суть угловые скорости системы координат $x'y'z'$ относительно трехгранника $x^{\circ}y^{\circ}z^{\circ}$, системы $x''y''z''$ относительно $x'y'z'$ и, наконец, системы координат xuz , т. е. стабилизированной платформы, относительно системы $x''y''z''$.

Относительная угловая скорость $d\gamma/dt$ направлена по ребру z° , угловая скорость $d\alpha/dt$ — по оси x' и угловая скорость $d\beta/dt$ — по оси y . Ось x' совпадает с ребром x° при угле $\gamma = 0$, что позволяет согласно табл. (7.3) найти косинусы углов, которые образует направление относительной угловой скорости $d\alpha/dt$ с осями системы координат xuz (фиг. 8). Учитывая все изложенное, получаем следующие выражения для проекций ω_x , ω_y и ω_z угловой скорости стабилизированной платформы на

оси жестко связанной с ней системы координат xuz :

$$\begin{aligned}\omega_x &= \frac{v}{R} (\sin \gamma \cos \beta + \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta) + \left(\tilde{\omega} + \frac{d\gamma}{dt} \right) (-\cos \alpha \sin \beta) + \frac{d\alpha}{dt} \cos \beta \\ \omega_y &= \frac{v}{R} \cos \gamma \cos \alpha + \left(\tilde{\omega} + \frac{d\gamma}{dt} \right) \sin \alpha + \frac{d\beta}{dt} \\ \omega_z &= \frac{v}{R} (\sin \gamma \sin \beta - \cos \gamma \sin \alpha \cos \beta) + \left(\tilde{\omega} + \frac{d\gamma}{dt} \right) \cos \alpha \cos \beta + \frac{d\alpha}{dt} \sin \beta\end{aligned}\quad (7.4)$$

Пользуясь таблицей (7.3) и формулами (7.2), приходим далее к выражениям для проекций w_x , w_y и w_z ускорения начала системы координат xuz , именно

$$\begin{aligned}w_x &= \frac{dv}{dt} (\cos \gamma \cos \beta - \sin \gamma \sin \alpha \sin \beta) + \tilde{\omega}v (\sin \gamma \cos \beta + \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta) - \\ &\quad - \frac{v^2}{R} (-\cos \alpha \sin \beta) \\ w_y &= \frac{dv}{dt} (-\sin \gamma \cos \alpha) + \tilde{\omega}v \cos \gamma \cos \alpha - \frac{v^2}{R} \sin \alpha \\ w_z &= \frac{dv}{dt} (\cos \gamma \sin \beta + \sin \gamma \sin \alpha \cos \beta) + \tilde{\omega}v (\sin \gamma \sin \beta - \cos \gamma \sin \alpha \cos \beta) - \\ &\quad - \frac{v^2}{R} \cos \alpha \cos \beta\end{aligned}\quad (7.5)$$

В данном случае, в отличие от п. 6, проекции силы тяготения на оси x и y уже не равны нулю. Поэтому ньютонометры, расположенные на осях x и y , будут измерять суммы ускорений w_x и w_y соответственно с проекциями (с обратными знаками) на эти же оси ускорения силы тяготения j . Последнее направлено по ребру z^0 к центру Земли. Учитывая теперь формулы (7.5) и (7.3), получим, что показания a_x и a_y соответствующих ньютонометров должны выражаться формулами

$$\begin{aligned}a_x &= \frac{dv}{dt} (\cos \gamma \cos \beta - \sin \gamma \sin \alpha \sin \beta) + \tilde{\omega}v (\sin \gamma \cos \beta + \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta) + \\ &\quad + \left(j - \frac{v^2}{R} \right) (-\cos \alpha \sin \beta) \\ a_y &= \frac{dv}{dt} (-\sin \gamma \cos \alpha) + \tilde{\omega}v \cos \gamma \cos \alpha + \left(j - \frac{v^2}{R} \right) \sin \alpha\end{aligned}\quad (7.6)$$

Образуем теперь моменты M_1 и M_2 согласно формулам (5.2), а M_3 по-прежнему будем считать равным нулю. В соответствии с соотношениями (5.1) имеем

$$\omega_x = -\frac{K}{H} \int_0^t a_y dt - \frac{m_1}{H}, \quad \omega_y = \frac{K}{H} \int_0^t a_x dt + \frac{m_2}{H}, \quad \omega_z = 0 \quad (7.7)$$

Эти равенства, как это следует из формул (7.4) и (7.6), можно рассматривать как систему уравнений для определения функций времени $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ при заданных функциях $v(t)$ и $\tilde{\omega}(t)$.

Дифференцируя первые два уравнения (7.7) по времени, приходим к системе дифференциальных уравнений для тех же неизвестных функций:

$$\frac{d\omega_x}{dt} + \frac{K}{H} a_y = 0, \quad \frac{d\omega_y}{dt} - \frac{K}{H} a_x = 0, \quad \omega_z = 0 \quad (7.8)$$

Считая в формулах (7.4) и (7.6) углы α и β малыми и пренебрегая членами второго порядка относительно этих переменных, приведем выра-

жения для $\omega_x, \omega_y, \omega_z, a_x$ и a_y к виду

$$\begin{aligned}\omega_x &= \frac{v}{R} \sin \gamma - \left(\bar{\omega} + \frac{d\gamma}{dt} \right) \beta + \frac{d\alpha}{dt} \\ \omega_y &= \frac{v}{R} \cos \gamma + \left(\bar{\omega} + \frac{d\gamma}{dt} \right) \alpha + \frac{d\beta}{dt} \\ \omega_z &= \frac{v}{R} (\beta \sin \gamma - \alpha \cos \gamma) + \bar{\omega} + \frac{d\gamma}{dt} \\ a_x &= \frac{dv}{dt} \cos \gamma + \bar{\omega} v \sin \gamma - \left(j - \frac{v^2}{R} \right) \beta \\ a_y &= -\frac{dv}{dt} \sin \gamma + \bar{\omega} v \cos \gamma + \left(j - \frac{v^2}{R} \right) \alpha\end{aligned}\quad (7.9)$$

Так как $\omega_z \equiv 0$, то в соответствии с третьей формулой (7.9)

$$\bar{\omega} + \frac{d\gamma}{dt} = \frac{v}{R} (\alpha \cos \gamma - \beta \sin \gamma) \quad (7.10)$$

Отсюда следует, что члены

$$\left(\bar{\omega} + \frac{d\gamma}{dt} \right) \alpha, \quad \left(\bar{\omega} + \frac{d\gamma}{dt} \right) \beta \quad (7.11)$$

содержащиеся в первых двух формулах (7.9), имеют второй порядок малости относительно переменных α и β и, следовательно, могут быть опущены. Таким образом, с точностью до малых второго порядка имеем

$$\omega_x = \frac{v}{R} \sin \gamma + \frac{d\alpha}{dt}, \quad \omega_y = \frac{v}{R} \cos \gamma + \frac{d\beta}{dt} \quad (7.12)$$

Если теперь посредством соотношения (7.10) исключить функцию $\bar{\omega}(t)$ из четвертой и пятой формул (7.9), то после простых преобразований получим следующие выражения для величин a_x и a_y :

$$\begin{aligned}a_x &= \frac{d}{dt} (v \cos \gamma) + \frac{v^2}{R} (\alpha \cos \gamma - \beta \sin \gamma) \sin \gamma - \left(j - \frac{v^2}{R} \right) \beta \\ a_y &= -\frac{d}{dt} (v \sin \gamma) + \frac{v^2}{R} (\alpha \cos \gamma - \beta \sin \gamma) \cos \gamma + \left(j - \frac{v^2}{R} \right) \alpha\end{aligned}\quad (7.13)$$

Совершая, наконец, в соответствии с формулами (7.12) и (7.13) подстановку величин ω_x, ω_y, a_x и a_y в первые два уравнения (7.8) и учитывая равенство (2.2), приходим после очевидных упрощений к двум дифференциальным уравнениям второго порядка:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{j}{R} \alpha &= \frac{v^2}{R^2} (\alpha \sin \gamma + \beta \cos \gamma) \sin \gamma \\ \frac{d^2\beta}{dt^2} + \frac{j}{R} \beta &= \frac{v^2}{R^2} (\alpha \sin \gamma + \beta \cos \gamma) \cos \gamma\end{aligned}\quad (7.14)$$

Совместно с соотношением (7.10) они образуют систему дифференциальных уравнений относительно функций $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\gamma(t)$.

Учитывая малость величин α и β , угол γ в уравнениях (7.14) можно заменить интегралом

$$\tilde{\gamma} = -\int_0^t \bar{\omega} dt + \gamma_0 \quad (7.15)$$

где γ_0 — значение угла γ между осью x и ребром x^0 (т. е. вектором скорости центра объекта) в начальное мгновение времени. Возникающие при такой замене ошибки, как нетрудно убедиться из равенств (7.10) и (7.14), имеют второй порядок малости.

Таким образом, исследование малых колебаний стабилизированной платформы сводится к интегрированию двух линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, зависящими от времени¹.

8. Оставляя в стороне интегрирование дифференциальных уравнений (7.14) малых колебаний платформы при произвольном движении центра объекта по земной сфере, ограничимся случаем $\bar{\omega} = 0$ и $v = \text{const}$, чему соответствует движение с постоянной скоростью по дуге большого круга невращающейся сферы S . Движение относительно Земли будет происходить в этом случае с переменной относительной скоростью по сложной траектории. Полагая в формуле (7.15) $\bar{\omega} = 0$, приходим к выводу, что угол γ в системе дифференциальных уравнений (7.14) следует считать постоянным. В результате система (7.14) распадается на два независимых уравнения:

$$\frac{d^2}{dt^2} (\alpha \sin \gamma + \beta \cos \gamma) + \left(\frac{j}{R} - \frac{v^2}{R^2} \right) (\alpha \sin \gamma + \beta \cos \gamma) = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2} (\alpha \cos \gamma - \beta \sin \gamma) + \frac{j}{R} (\alpha \cos \gamma - \beta \sin \gamma) = 0$$
(8.1)

Первое из них соответствует угловым колебаниям платформы вокруг ребра естественного трехгранника Дарбу y° , второе — соответственно вокруг ребра x° . Ребро x° , как уже было упомянуто выше, направлено по вектору скорости v . Частоты этих колебаний близки одна к другой, если только величина скорости v не слишком велика (например, значительно меньше скорости точек экватора Земли в ее суточном вращении). Им соответствует период, равный приблизительно 84 мин. времени (т. е. период Шулера).

9. При наличии малых колебаний стабилизированной платформы, т. е. при отличных от нуля углах α и β , соотношения (5.5) будут осуществляться с некоторой погрешностью. Кроме того, и исходные для данного метода автономного определения местоположения равенства (5.6) не могут обратиться в точные тождества из-за наличия в показаниях ньютометров a_x и a_y проекций ускорения тяготения j . Следует ожидать, что происходящие из-за упомянутых обстоятельств ошибки в определении широты и долготы места движущегося объекта, а также его курса, имеют колебательный характер. Однако для точного суждения о характере изменения этих ошибок во времени требуется дополнительное исследование.

10. Выше предполагалось, что центр объекта перемещается по сфере S , в силу чего в формулах (5.3) принималось $v_z = 0$. Покажем теперь, как освободиться от этого стесняющего условия.

Пусть стабилизированная посредством гироскопов платформа перемещается так, чтобы ее плоскость оставалась перпендикулярной к радиусу Земли. В этом случае необходимо соблюдение тех же равенств (5.5), где v_x и v_y — по-прежнему проекции на оси x и y скорости v центра карданова подвеса платформы относительно сферы S , а ω_x и ω_y — соответ-

¹ Любопытно отметить полную тождественность уравнений (7.14) малых колебаний рассматриваемой стабилизированной платформы с уравнениями малых колебаний некоторого физического маятника с точкой опоры, перемещающейся по сфере S . Условия равновесия этого маятника относительно естественного трехгранника Дарбу приведены в статье [5].

венно проекции на те же оси ее угловой скорости ω . Таким образом, должно быть

$$\omega_x = -\frac{v_y}{R}, \quad \omega_y = \frac{v_x}{R} \quad (10.1)$$

В отличие от равенств (5.5) здесь $R = R(t)$ представляет собой переменную величину расстояния между центром карданова подвеса платформы и центром сферы S .

Угловые скорости ω_x и ω_y создаются посредством приложения к гироскопам платформы моментов M_1 и M_2 согласно первым двум формулам (5.1). Следовательно, моменты M_1 и M_2 должны быть образованы в соответствии с равенствами

$$M_2 = -\frac{H}{R} v_y, \quad M_1 = \frac{H}{R} v_x \quad (10.2)$$

Расположим в непосредственной близости к центру карданова подвеса два ньютометра, оси чувствительности которых направлены по осям x и y , лежащим в плоскости платформы. Их показания $a_x(t)$ и $a_y(t)$ не будут содержать проекции на оси x и y ускорения тяготения j , так как по предположению стабилизированная платформа остается в процессе своего движения перпендикулярной прямой, соединяющей центр карданова подвеса и центр сферы S . В силу этого можно положить

$$a_x(t) = w_x = \frac{dv_x}{dt} + \omega_y v_z - \omega_z v_y, \quad a_y(t) = w_y = \frac{dv_y}{dt} + \omega_z v_x - \omega_x v_z \quad (10.3)$$

Здесь, в отличие от случая в п. 6, v_z уже отлично от нуля и выражается

$$v_z = \frac{dR}{dt} \quad (10.4)$$

Если, так же как и ранее, считать $M_3 = 0$, то в соответствии с третьей формулой (5.1) вновь получим $\omega_z \equiv 0$, т. е. платформа не будет иметь составляющей своей угловой скорости ω вдоль оси z , направленной по радиусу сферы S . Учитывая это, а также формулы (10.1) и (10.4), приходим согласно равенствам (10.3) к соотношениям

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} + \frac{v_x}{R} \frac{dR}{dt}, \quad a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} + \frac{v_y}{R} \frac{dR}{dt} \quad (10.5)$$

Эти соотношения можно рассматривать как дифференциальные уравнения, которые при известных функциях $a_x(t)$ и $a_y(t)$, а также $R = R(t)$ позволяют построить функции $v_x(t)$ и $v_y(t)$, значения которых необходимы для образования моментов M_1 и M_2 , управляющих ориентацией платформы.

Решение уравнений (10.5) сводится к квадратурам

$$v_x = \frac{1}{R} \left[\int_0^t R a_x(t) dt + R(0) v_x(0) \right], \quad v_y = \frac{1}{R} \left[\int_0^t R a_y(t) dt + R(0) v_y(0) \right] \quad (10.6)$$

Таким образом, моменты M_1 и M_2 в соответствии с формулами (10.2) и (10.6) должны образоваться по показаниям ньютометров $a_x(t)$ и $a_y(t)$ следующим образом:

$$M_2 = -\frac{H}{R^2} \left[\int_0^t R(t) a_y(t) dt + R(0) v_y(0) \right] \quad (10.7),$$

$$M_1 = \frac{H}{R^2} \left[\int_0^t R(t) a_x(t) dt + R(0) v_x(0) \right]$$

Для этой цели, помимо интеграторов, должны быть предусмотрены устройства, производящие умножение и деление текущих величин.

Переменная величина $R = R(t)$ в равенствах (10.7) считается заранее известной. Однако наличие третьего ньютометра, ось чувствительности которого параллельна оси z (радиусу Земли), позволяет в принципе определить эту функцию независимо от каких-либо других вспомогательных средств. Действительно, показание этого ньютометра определяется формулой

$$a_z = w_z - j = \frac{dv_z}{dt} + \omega_x v_y - \omega_y v_x - j \quad (10.8)$$

Здесь

$$j = j_0 \frac{R_0^2}{R^2} \quad (10.9)$$

ускорение тяготения, уменьшающееся при увеличении расстояния от центра Земли, j_0 — его значение на поверхности Земли, радиус которой обозначен через R_0 .

Используя формулы (10.1), (10.4) и (10.9), для функции $R(t)$, получим

$$\frac{d^2 R}{dt^2} - \frac{v_x^2 + v_y^2}{R} - \frac{j_0 R_0^2}{R^2} = a_z(t) \quad (10.10)$$

Устройство, интегрирующее это дифференциальное уравнение, должно быть связано в одну систему с интеграторами, воспроизводящими моменты M_2 и M_1 , которые согласно формулам (10.2) отличаются от функций $v_y(t)$ и $v_x(t)$ лишь постоянным множителем. Действительно, функции $v_x(t)$ и $v_y(t)$ входят в уравнение (10.10); в свою очередь, функция $R(t)$ используется в формулах (10.6).

Вопросы устойчивости упомянутой счетно-решающей системы требуют специального рассмотрения. Не останавливаясь также на изучении малых колебаний стабилизированной платформы, заметим, что дальнейшее решение задачи о местоположении движущегося объекта приводится к интегрированию той же системы дифференциальных уравнений (6.5), где $\omega_x(t)$ и $\omega_y(t)$ считаются в силу формул (10.1), (10.2) и (10.6) известными функциями времени.

Поступила 20 V 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Harper C. S., Wrigley W. and Grohe L. R. The floating integrating gyro and its application to geometrical stabilization problems on moving bases. Preprint № 503 Institute of the Aeronautical Sciences, New York, 1955.
2. Wrigley Walter, Wrodbary Roger B. and Novorka John. Inertial guidance. Preprint № 698 Institute of the Aeronautical Sciences, New York, 1957.
3. В о j k о v Johan Marka. Einrichtung zum Messen von Wegstrecken. Deutsch. Patent № 661822, Kl. 42. Siemens Apparate und Maschinen G. m. b. H. Berlin, 2.VI., 1938.
4. С у с л о в Г. К. Теоретическая механика, ОИЗ, Гостехиздат, 1944.
5. И ш л и н с к и й А. Ю. Об относительном равновесии физического маятника с подвижной точкой опоры, ПММ, т. XX, вып. 3, 1956.
6. Б у л г а к о в Б. В. Прикладная теория гироскопов. ГИТТЛ, М., 1955.
7. И ш л и н с к и й А. Ю. К теории гирогоризонткомпаса. ПММ, т. XX, вып. 4, 1956.