В заключение отметим, что условие знакопостоянства функций $p_{12}(t)$ и $p_{21}(t)$ в работе [1] не нарушает общности, как это показано в [3] (стр. 495).

Поступила 20 IX 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Старжинский В. М. Об устойчивости тривиального решения дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами. Инж. сборник, т. XVIII, 1954, стр. 119—138.
2. Ляпунов А. М. Sur une série dans la théorie des équations différentielles linéaires du second ordre á coefficients périodiques. Зап. Акад. Наук по физ.-матем. отд., 8 серия, т. XIII, № 2, 1902, стр. 1—70. Собр. соч., изд. АН СССР, т. II, 1956, стр. 410—472.
3. Старжинский В. М. Обзор работ об условиях устойчивости тривиального решения системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. ПММ, т. XVIII, вып. 4, 1954, стр. 469—510.
4. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ, СЖАТОЙ В ОДНОМ НАПРАВЛЕНИИ

Ю. Р. Лепик

(Тарту)

Задача об устойчивости упруго-пластических пластинок обычно решается в приближенной постановке А. А. Ильюшина [1] (стр. 296). С целью оценить погрешность полученных решений, немалый интерес представляет и искание более точных решений; это можно делать методом, указанным в статье [2]. Настоящая заметка является продолжением работы [2]; здесь решаются в точной постановке две задачи об устойчивости прямоугольных пластинок.

Рассмотрим прямоугольную пластинку с размерами сторон $2a$ и $2b$. Отнесем эту пластинку к координатной системе xyz, выбранной так, что оси x и y расположены в средней плоскости пластины и направлены соответственно вдоль сторон a и b, ось z направим по нормали к срединной плоскости; начало координат мы выбираем в центре пластинки. Допустим, что пластинка сжата в своей срединной плоскости силами, равномерно распределенными по сторонам $x = \pm a$; величину сжимающей силы на единицу длины края обозначим символом p. Ограничиваемся случаем, где пластинка по форме близка к квадратной, так что потеря устойчивости происходит в направлении каждой из сторон пластинки по одной полуволне.

Если считать материал пластинки несжимаемым и исходить — как и в работе [2] — из «теории течения», то вариационное уравнение типа Галеркина получает в рассматриваемом случае вид [1]:

$$\iint \left\{ \frac{1}{2} D \left[-\delta(\varkappa_1'^2 + \varkappa_1'\varkappa_2' + \varkappa_2'^2 + \varkappa_3'^2) + \frac{3}{2}\lambda\zeta^2(3-2\zeta)\varkappa_1'\delta\varkappa_1' \right] + \right.$$

$$+ \frac{1}{2Eh}\delta(T_1'^2 - T_1'T_2' + T_2'^2 + 3S'^2) - \frac{h}{2}\lambda\zeta^2\left(\delta T_1' - \frac{1}{2}\delta T_2'\right)\varkappa_1'\operatorname{sg}\varkappa_1' -$$

$$\left. - p\varkappa_1'\delta w' \right\} dx\,dy = 0 \qquad (1)$$

---

[1] Все обозначения, смысл которых не указан в настоящей заметке, взяты из работы [2].

Величину относительной толщины пластического слоя ζ определяем из уравнения (1.13) работы [2], которое получает теперь форму

$$1 - 2\zeta + \lambda\zeta^2 = \frac{2\,\mathrm{sg}\,\varkappa_1'}{Eh^2\varkappa_1}\left(T_1' - \frac{1}{2}T_2'\right) \tag{2}$$

Будем считать, что края пластинки $x = \pm a$ и $y = \pm b$ могут свободно смещаться в плоскости xy и потеря устойчивости происходит при неизменных усилиях на крае. Из этих требований вытекают следующие граничные условия для скорости функции напряжений F':

$$\frac{\partial^2 F'}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F'}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{при } x = \pm a, \qquad \frac{\partial^2 F'}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F'}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{при } y = \pm b$$

Кроме того, следует удовлетворить и граничные условия для скорости прогиба w'. Считая пластинку защемленной по краям, находим, что

$$w' = \frac{\partial w'}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = \pm a, \qquad w' = \frac{\partial w'}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = \pm b$$

В случае свободно опертых краев имеем

$$w' = \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = \pm a, \qquad w' = \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = \pm b$$

Так как мы предполагали, что потеря устойчивости происходит по одной полуволне, то функции F' и w' должны быть относительно их аргументов x и y четными.

Всем этим требованиям можно удовлетворить, если искать F' в виде ряда

$$F' = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} B_{ij}\cos^2\frac{(2i+1)\pi x}{2a}\cos^2\frac{(2j+1)\pi y}{2b} \tag{3}$$

Граничные условия для w' удовлетворим, полагая: а) в случае защемленной по контуру пластинки

$$w' = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} A_{ij}\cos^2\frac{(2i+1)\pi x}{2a}\cos^2\frac{(2j+1)\pi y}{2b} \tag{4}$$

В случае свободно опертой пластинки

$$w' = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} A_{ij}\cos\frac{(2i+1)\pi x}{2a}\cos\frac{(2j+1)\pi y}{2b} \tag{5}$$

В дальнейшем для простоты в разложениях (3) — (5) будем считать различными от нуля только коэффициенты A_{00}, B_{00}. Вместо координат x и y переходим к безразмерным величинам $\xi = x/a$ и $\eta = y/b$. Оба случая (4) и (5) будем рассматривать отдельно.

1. Защемленная по контуру пластинка. Для этого случая введем обозначения

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \lambda\int_0^1\int_0^1 \zeta^2(3 - 2\zeta)\cos^2\pi\xi\cos^4\frac{\pi\eta}{2}\,d\xi\,d\eta \\ \alpha_2 &= \lambda\int_0^1\int_0^1 \zeta^2\varphi(\xi,\eta)\cos\pi\xi\cos^2\frac{\pi\eta}{2}\,\mathrm{sg}(2\xi - 1)\,d\xi\,d\eta \end{aligned} \tag{6}$$

при

$$\varphi(\xi,\eta) = 2\cos^2\frac{\pi\xi}{2}\cos\pi\eta - \frac{b^2}{a^2}\cos\pi\xi\cos^2\frac{\pi\eta}{2} \tag{7}$$

Из вариационного уравнения (1) находим, что

$$\beta = \frac{pb^2}{Eh^3} = \frac{\pi^2}{9}\left[(1 - 4\alpha_1)\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{2}{3}\right] \tag{8}$$

$$\gamma = \frac{B_{00}}{hA_{00}} = \frac{4}{3}\alpha_2\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{2}{3}\right)^{-1} \tag{9}$$

Формула (2) для определения величины ζ получает теперь вид

$$(1-2\zeta+\lambda\zeta^2)\,\mathrm{sg}\,(2\xi-1)=\gamma\frac{a^2}{b^2}\frac{\varphi(\xi,\eta)}{\cos\pi\xi\cos^2{}^1/_2\,\pi\eta} \tag{10}$$

Величины $\zeta=\zeta(\xi)$ и γ определяем, как указано в [2], методом последовательного приближения из зависимостей (9)—(10); после этого уже не трудно вычислить из формулы (8) значение параметра критической нагрузки β.

Согласно приближенной постановке А. А. Илюшина имеем

$$\zeta\equiv\zeta_0=\frac{1}{\lambda}(1-\sqrt{1-\lambda}),\qquad \alpha_1=\frac{3}{16}\lambda\zeta_0^2(3-2\zeta_0)$$

Численные вычисления были проведены в случае $a=b$. Принимая для параметра упрочнения значение $\lambda=0.5$, находим, что $\gamma=-0.0121$, $\beta=2.671$; приближенное решение $\zeta\equiv\zeta_0$ дает для параметра нагрузки величину $\beta_1=2.666$. Таким образом увидим, что точность приближенного решения при $\lambda=0.5$ очень хорошая.

2. Случай свободно опертой пластинки. Будем теперь под символами α_1 и α_2 понимать интегралы

$$\begin{aligned}\alpha_1&=\lambda\int_0^1\int_0^1\zeta^2(3-2\zeta)\cos^2\frac{\pi\xi}{2}\cos^2\frac{\pi\eta}{2}\,d\xi\,d\eta\\ \alpha_2&=\lambda\int_0^1\int_0^1\zeta^2\varphi(\xi,\eta)\cos\frac{\pi\xi}{2}\cos\frac{\pi\eta}{2}\,d\xi\,d\eta\end{aligned} \tag{11}$$

При этом функция $\varphi(\xi,\eta)$ определяется опять формулой (7).

Зависимости (8)—(10) получают в рассматриваемом случае вид

$$\beta=\frac{pb^2}{Eh^3}=\frac{\pi^2}{36}\left[\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2-3\,\frac{b^2}{a^2}\,\alpha_1\right] \tag{12}$$

$$\gamma=\frac{B_{00}}{hA_{00}}=-\frac{2}{3}\,\alpha_2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{2}{3}\right)^{-1} \tag{13}$$

$$1-2\zeta+\lambda\zeta^2=-2\gamma\frac{a^2}{b^2}\frac{\varphi(\xi,\eta)}{\cos{}^1/_2\,\pi\xi\cos{}^1/_2\,\pi\eta} \tag{14}$$

Приближенная теория А. А. Ильюшина $\zeta=\zeta_0=\mathrm{const}$ дает в случае свободно опертой пластинки для α_1 значение $\alpha_1={}^1/_4\,\lambda\zeta_0^2(3-2\zeta_0)$.

Вычисления показали, что в случае свободно опертой пластинки погрешность приближенного решения $\zeta=\mathrm{const}$ еще меньше, чем в случае защемленной по контуру пластинки.

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что в случае рассмотренных задач приближенное решение А. А. Ильюшина $\zeta=\mathrm{const}$ дает для параметра нагрузки значения, точность которых вполне достаточна для практических целей.

Поступила 5 III 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность. ОГИЗ, 1948.
2. Лепик Ю. Р. Одна возможность решения задачи об устойчивости упруго-пластических пластинок в точной постановке, Известия АН СССР, ОТН, № 8, 1957.