причем координата границы возмущенной области изменяется со временем по закону

$$x^*(t) = 2\sqrt[4]{5a^2Qt}$$

Полученное решение представляет, в частности, интерес, как асимптотическое представление распределения давления, соответствующего сосредоточению в начальный момент некоторой массы жидкости или газа вблизи границы пласта, на которой поддерживается нулевое давление. Отметим также, что весьма интересный аналог этого решения может быть получен и в случае осевой симметрии.

В заключение авторы выражают благодарность В. Б. Адамскому за ценное обсуждение.

Поступила 20 VIII 1957 Институт нефти АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. ГИТТЛ, М.—Л., 1947.
2. Баренблатт Г. И. О приближенном решении задач нестационарной одномерной фильтрации в пористой среде. ПММ, т. XVIII, вып. 3, 1954.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ В ОДНОМ СПЕЦИАЛЬНОМ СЛУЧАЕ

В. М. Старжинский

(Москва)

В работе [1] дано[1] распространение «метода Ляпунова [2] оценки характеристической постоянной» на общий случай системы двух линейных уравнений первого порядка с периодическими кусочно-непрерывными коэффициентами. Изложение в работе велось для устойчивости невозмущенного движения динамической системы, когда уравнения первого приближения возмущенного движения даны в виде

$$\frac{d\mathrm{u}}{dt} = \mathrm{P}(t)\,\mathrm{u}, \qquad \mathrm{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{P}(t+\omega) = \mathrm{P}(t) = \| p_{ij}(t) \|_1^2 \tag{1}$$

В силу этого изложения из проведенного в [1] анализа устойчивости выпало определение областей устойчивости в пространстве параметров системы, т. е. установление критериев (см. [3] стр. 469—470) устойчивости при $\alpha + \beta = 0$, где

$$\alpha = \int_0^\omega p_{11}(t)\,dt, \qquad \beta = \int_0^\omega p_{22}(t)\,dt$$

Дело в том, что в случае $\alpha + \beta = 0$, включающем в себя и случай систем (1) канонического вида ($p_{22}(t) \equiv -p_{11}(t)$), устойчивость тривиального решения системы (1) не может иметь асимптотического характера и тем самым гарантировать устойчивость невозмущенного движения.

В настоящей заметке мы докажем[2], что критерии устойчивости невозмущенного движения, установленные в § 11 а) [1] для $\alpha + \beta < 0$, распространяются при $\alpha + \beta = 0$ на устойчивость тривиального решения системы (1).

[1] В работе [1] имеются опечатки: на стр. 133, строка 14 сверху следует записать «устойчиво» вместо «неустойчиво»; на стр. 135, строка 9 снизу следует записать «неустойчивости» вместо «устойчивости».

[2] Идея доказательства возникла в беседах с М. Я. Леоновым.

Не нарушая общности, можно считать, что $\alpha \geqslant 0$, а $\beta = -\alpha \leqslant 0$. Поскольку при $\alpha = \beta = 0$ задача в точности приводится (см. § 5 [1]) к мемуару [2] Ляпунова, то остается рассмотреть случай $\alpha > 0$, $\beta = -\alpha$. В этих предположениях и будут восстановлены некоторые положения работы [1], а также проведены дальнейшие рассуждения. Подстановками

$$x_1 = x \exp \int_0^t p_{11}(t_1)\, dt_1$$
$$x_2 = y \exp \int_0^t \left[p_{22}(t_1) + 2\frac{\alpha}{\omega} \right] dt_1 \tag{2}$$

система (1) преобразуется к виду

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt}\ \mathrm{B} = (t)\,\mathbf{z}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B}(t) = \begin{Vmatrix} 0 & R(t) \\ Q(t) & -2\frac{\alpha}{\omega} \end{Vmatrix} \tag{3}$$

где

$$R(t) = p_{12}(t) \exp \int_0^t \left[p_{22}(t_1) - p_{11}(t_1) + 2\frac{\alpha}{\omega} \right] dt_1$$
$$Q(t) = p_{21}(t) \exp \int_0^t \left[p_{11}(t_1) - p_{22}(t_1) - 2\frac{\alpha}{\omega} \right] dt_1$$

Характеристические числа решений исходной системы (1) и преобразованной системы (3) связаны равенством

$$\chi\{\mathrm{u}\} = \chi\{\mathrm{z}\} - \frac{\alpha}{\omega} \tag{4}$$

Если мы обозначим через $\mathrm{U}(t)$ и $\mathrm{Z}(t)$ фундаментальные матрицы систем (1) и (3), нормированные единичными начальными условиями $\mathrm{U}(0) = \mathrm{Z}(0) = \mathrm{E}$, то характеристичные уравнения в смысле п. 46 [4] для систем (1) и (3) запишутся в виде

$$\rho^{*2} - 2A^*\rho^* + 1 = 0 \quad (2A^* = \mathrm{sp}\,\mathrm{U}(\omega)) \tag{5}$$

$$\rho^2 - (1 + e^{-2\alpha}) A\rho + e^{-2\alpha} = 0 \quad ((1 + e^{-2\alpha}) A = \mathrm{sp}\,\mathrm{Z}(\omega)) \tag{6}$$

ибо в силу формулы Лиувилля $\det \mathrm{U}(\omega) = 1$, а $\det \mathrm{Z}(\omega) = e^{-2\alpha}$.

При $|A^*| < 1$ корни уравнения (5) комплексные, различные и по модулю равны единице, что и означает устойчивость тривиального решения системы (1). Однако при применении «метода Ляпунова [2] оценки характеристической постоянной» значительно удобнее вычислять характеристическую постоянную A системы (3), чем A^*. Обе эти постоянные связаны простой зависимостью. Действительно, из подстановок (2) следует, что

$$\mathrm{U}(\omega) = \begin{Vmatrix} \exp \int_0^\omega p_{11}(t)\, dt & 0 \\ 0 & \exp \int_0^\omega \left[p_{22}(t) + 2\frac{\alpha}{\omega} \right] dt \end{Vmatrix} \mathrm{Z}(\omega) = e^{\alpha}\, \mathrm{Z}(\omega)$$

и, учитывая (5), (6), будем иметь

$$2A^* = \mathrm{sp}\,\mathrm{U}(\omega) = e^{\alpha}\,\mathrm{sp}\,\mathrm{Z}(\omega) = e^{\alpha}(1 + e^{-2\alpha}) A, \quad \text{т. е.} \quad A^* = A\,\mathrm{ch}\,\alpha$$

Условие $|A^*| < 1$ равносильно условию $|A| < \mathrm{sch}\,\alpha$ и, следовательно, при условиях

$$\alpha + \beta = 0, \quad |A| < \mathrm{sch}\,\alpha$$

тривиальное решение системы (1) устойчиво. Анализ неравенства $|A| < \mathrm{sch}\,\alpha$ проведен в §11 [1] для $\alpha + \beta < 0$. Теперь мы видим, что полученные § 11 а) [1] (см. также [3] стр. 496) критерии устойчивости распространяются и на случай $\alpha + \beta = 0$, но уже не для устойчивости невозмущенного движения, а для устойчивости тривиального решения системы (1).

В заключение отметим, что условие знакопостоянства функций $p_{12}(t)$ и $p_{21}(t)$ в работе [1] не нарушает общности, как это показано в [3] (стр. 495).

Поступила 20 IX 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Старжинский В. М. Об устойчивости тривиального решения дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами. Инж. сборник, т. XVIII, 1954, стр. 119—138.
2. Ляпунов А. М. Sur une série dans la théorie des équations différentielles linéaires du second ordre á coefficients périodiques. Зап. Акад. Наук по физ.-матем. отд., 8 серия, т. XIII, № 2, 1902, стр. 1—70. Собр. соч., изд. АН СССР, т. II, 1956, стр. 410—472.
3. Старжинский В. М. Обзор работ об условиях устойчивости тривиального решения системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. ПММ, т. XVIII, вып. 4, 1954, стр. 469—510.
4. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ, СЖАТОЙ В ОДНОМ НАПРАВЛЕНИИ

Ю. Р. Лепик

(Тарту)

Задача об устойчивости упруго-пластических пластинок обычно решается в приближенной постановке А. А. Ильюшина [1] (стр. 296). С целью оценить погрешность полученных решений, немалый интерес представляет и искание более точных решений; это можно делать методом, указанным в статье [2]. Настоящая заметка является продолжением работы [2]; здесь решаются в точной постановке две задачи об устойчивости прямоугольных пластинок.

Рассмотрим прямоугольную пластинку с размерами сторон $2a$ и $2b$. Отнесем эту пластинку к координатной системе xyz, выбранной так, что оси x и y расположены в средней плоскости пластины и направлены соответственно вдоль сторон a и b, ось z направим по нормали к срединной плоскости; начало координат мы выбираем в центре пластинки. Допустим, что пластинка сжата в своей срединной плоскости силами, равномерно распределенными по сторонам $x = \pm a$; величину сжимающей силы на единицу длины края обозначим символом p. Ограничиваемся случаем, где пластинка по форме близка к квадратной, так что потеря устойчивости происходит в направлении каждой из сторон пластинки по одной полуволне.

Если считать материал пластинки несжимаемым и исходить — как и в работе [2] — из «теории течения», то вариационное уравнение типа Галеркина получает в рассматриваемом случае вид [1]:

$$\iint \Big\{ \frac{1}{2} D \Big[-\delta(\varkappa_1'^2 + \varkappa_1'\varkappa_2' + \varkappa_2'^2 + \varkappa_3'^2) + \frac{3}{2}\lambda\zeta^2(3 - 2\zeta)\varkappa_1'\delta\varkappa_1' \Big] +$$

$$+ \frac{1}{2Eh}\delta(T_1'^2 - T_1'T_2' + T_2'^2 + 3S'^2) - \frac{h}{2}\lambda\zeta^2\Big(\delta T_1' - \frac{1}{2}\delta T_2'\Big)\varkappa_1' \operatorname{sg}\varkappa_1' -$$

$$- p\varkappa_1'\delta w' \Big\} dx\, dy = 0 \qquad (1)$$

---

[1] Все обозначения, смысл которых не указан в настоящей заметке, взяты из работы [2].