ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ЗАДАЧЕ Л. А. ГАЛИНА

Д. Д. Ивлев

(Москва)

Напомним основные результаты и обозначения работы [1]. Толстая пластина с круговым отверстием радиуса R растягивается на бесконечности взаимно перпендикулярными усилиями A и B (плоская деформация). На контуре отверстия задано давление p. Доказывается, что границей пластической области является эллипс с полуосями $a(1+\delta)$ $a(1-\delta)$, где

$$a = R\exp\left[\frac{1}{2k}\left(\frac{B+A}{2}+p-k\right)\right], \qquad \delta = \frac{B-A}{2k}$$

(k — постоянная, стоящая в первой части условия пластичности). Очевидно, что величина a равна радиусу круга, ограничивающего пластическую зону при $A = B$.

Поскольку в рассматриваемом случае имеет место стесненная пластическая деформация, то следует воспользоваться соотношениями теории Прандтля-Рейса

$$\frac{2de_{xx}{}^p}{\sigma_x-\sigma_y} = \frac{2de_{yy}{}^p}{\sigma_y-\sigma_x} = \frac{de_{xy}{}^p}{2\tau_{xy}} \tag{1}$$

Пренебрегая сжимаемостью материала в пластической зоне (в противном случае задача становится статически неопределимой), будем иметь

$$e_{xx}{}^p = e_{xx} - \frac{\sigma_x-\sigma_y}{4G}, \qquad e_{yy}{}^p = e_{yy} - \frac{\sigma_y-\sigma_x}{4G}, \qquad e_{xy}{}^p = e_{xy} - \frac{\tau_{xy}}{G} \tag{2}$$

Так как в данном случае $\tau_{\rho\theta}$ в пластической области равно нулю, то для определения перемещений в ней получим систему уравнений

$$e_\rho + e_\theta = 0, \qquad e_{\rho\theta} = C \qquad (C = \mathrm{const}) \tag{3}$$

Если коэффициент Пуассона при переходе из пластической области в упругую меняется непрерывно, то компоненты напряжений и деформаций при переходе через границу пластической зоны непрерывны [2]. Случай, когда коэффициент Пуассона терпит разрыв, интерпретируется при помощи предельного состояния слоя малой толщины, примыкающего к границе пластической области, в которой коэффициент Пуассона принимает непрерывно промежуточные значения. Поскольку удлинение элемента, лежащего на границе пластической зоны, при подходе к нему из упругой и пластической областей должно быть одинаковым, то, следовательно, при разрывном коэффициенте Пуассона имеет место разрыв нормальных компонент напряжений на площадках, перпендикулярных к пластической зоне. Но это противоречило бы условиям, принятым в работе [1], поэтому результаты ее справедливы лишь в том случае, когда несжимаемость материала имеет место в пластине всюду.

Так как на границе пластической зоны $\tau_{\rho\theta} = 0$, то, следовательно, постоянная C в (3) равна нулю и система уравнений (3) в перемещениях примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{u}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \qquad \left(\rho = \frac{r}{a}\right) \tag{4}$$

Полагая

$$U = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho(u+v), \qquad V = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho(v-u), \qquad \xi = \ln\rho + \theta, \qquad \eta = \ln\rho - \theta$$

преобразуем систему (4) к виду

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial V}{\partial \eta} = \frac{1}{2}(U+V) \tag{5}$$

Для интегрирования системы уравнений (5) необходимо задать граничные условия на контуре пластической зоны. Удобно перейти к безразмерным переменным

$$\rho^* = \frac{r}{2a\sqrt{\delta}}, \qquad u^* = \frac{2Gu}{ka\sqrt{\delta}}, \qquad v^* = \frac{2Gv}{ka\sqrt{\delta}}$$

Уравнение эллипса, ограничивающего пластическую зону, запишем в виде

$$\rho^* = \left(\frac{1-\delta^2}{2\sqrt{\delta}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-2\delta\cos 2\theta+\delta^2}}$$

Следуя [1], получим, что перемещения на границе пластической зоны могут быть вычислены по формулам

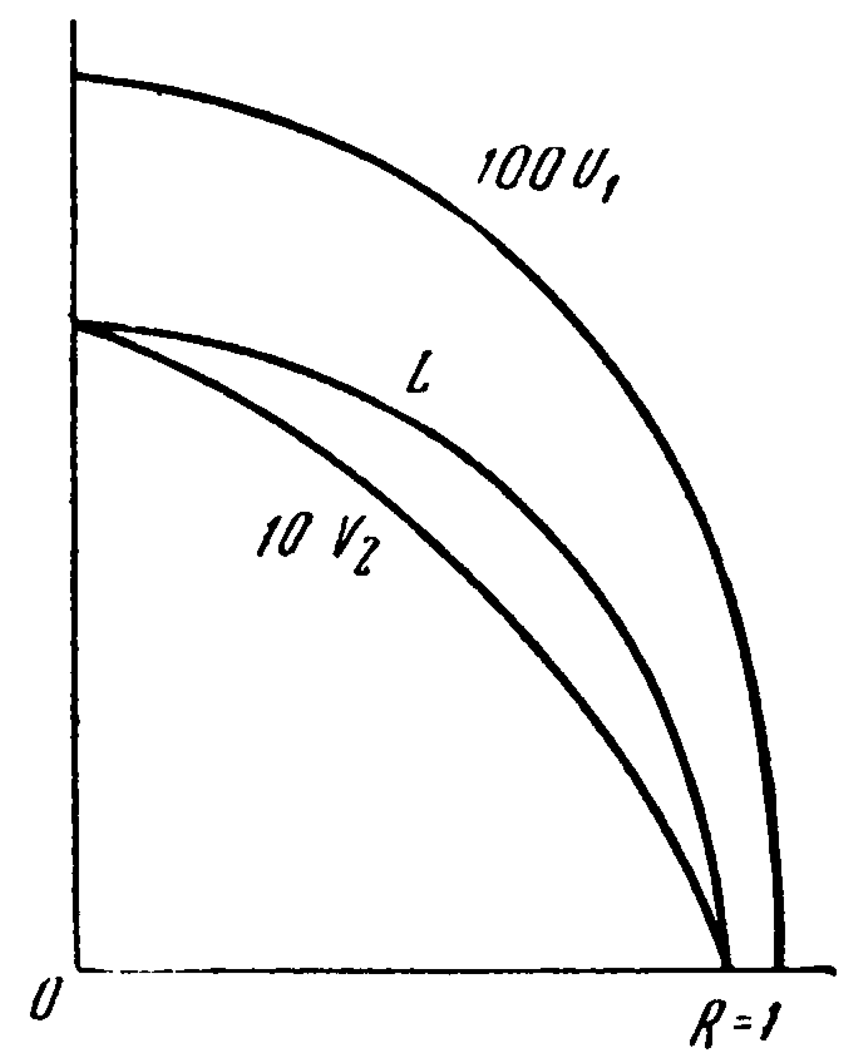
$$U^* = M\cos\theta - N\sin\theta, \qquad V^* = M\sin\theta + N\cos\theta \qquad (6)$$

где

$$M=\rho^*(R\cos\varphi-1), \quad N=\rho^*\left[R\sin\varphi-2\operatorname{arc\,tg}\frac{R\sin\varphi}{1+R\cos\varphi}\right]$$

$$R = \frac{1}{\rho^*}\sqrt[4]{\rho^{*4}-2\rho^{*2}\cos 2\theta+1}$$

$$\left.\begin{matrix}\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1\mp\frac{\rho^{*2}-\cos 2\theta}{\sqrt{\rho^{*4}-2\rho^{*2}\cos 2\theta+1}}\right)}$$



Фиг. 1

Уравнения (6) легко могут быть решены численно. Метод малого параметра [3] позволяет получить для перемещений приближенные аналитические выражения. Приписывая компонентам, относящимся к упругой области, индекс e, к пластической — индекс p, можно получить

$$\frac{4Gu^e}{ka} = \frac{2}{\rho} - 2\delta\left(\rho+\frac{2}{\rho}-\frac{1}{\rho^3}\right)\cos 2\theta + \delta^2\left[\frac{2}{\rho}+4\left(-\frac{1}{\rho^3}+\frac{1}{\rho^5}\right)\cos 4\theta\right] +$$
$$+\delta^3\left[\frac{2}{\rho^3}\cos 2\theta - 2\left(\frac{4}{\rho^5}-\frac{5}{\rho^7}\right)\cos 6\theta\right]+\ldots \qquad (7)$$

$$\frac{4Gv^e}{ka} = 2\delta\left(\rho+\frac{1}{\rho^3}\right)\sin 2\theta + 2\delta^2\left(-\frac{1}{\rho^3}+\frac{2}{\rho^5}\right)\sin 4\theta + \qquad (9)$$
$$+\delta^3\left[\frac{2}{\rho^3}\sin 2\theta + 2\left(-\frac{8}{3\rho^5}+\frac{5}{\rho^7}\right)\sin 6\theta\right]+\ldots$$

$$\frac{4Gu^p}{ka} = \frac{2}{\rho} - 4\delta\left[\cos(\sqrt{3}\ln\rho)+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}\ln\rho)\right]\cos 2\theta +$$
$$+\frac{2\delta^2}{\rho} - 2\delta^3\left\{\left[\cos(\sqrt{3}\ln\rho)-\frac{3}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}\ln\rho)\right]\cos 2\theta + \right.$$
$$\left.+\left[\cos(\sqrt{35}\ln\rho)-\frac{3}{\sqrt{35}}\sin(\sqrt{35}\ln\rho)\right]\cos 6\theta\right\}$$

$$\frac{4Gv^p}{ka} = 2\delta\left[2\cos(\sqrt{3}\ln\rho)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}\right)\sin(\sqrt{3}\ln\rho)\right]\sin 2\theta +$$
$$+2\delta^2\left[\cos(\sqrt{15}\ln\rho)+\frac{1}{\sqrt{15}}\sin(\sqrt{15}\ln\rho)\right]\sin 4\theta -$$
$$-\delta^3\left\{\left[2\cos(\sqrt{3}\ln\rho)+\left(\frac{3}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\right)\sin(\sqrt{3}\ln\rho)\right]\sin 2\theta + \right.$$
$$\left.+\left[\frac{2}{3}\cos(\sqrt{35}\ln\rho)+\left(\frac{1}{\sqrt{35}}+\frac{\sqrt{35}}{3}\right)\sin(\sqrt{35}\ln\rho)\right]\sin 6\theta\right\}+\ldots \qquad (10)$$

Следует отметить, что решение Л. А. Галина справедливо лишь в том случае, когда любая точка в пластической области может быть соединена с контуром отверстия двумя линиями скольжения, лежащими целиком внутри пластической области, т. е. когда отношение полуосей граничного эллипса не превосходит $\sqrt{2}$ ($\delta \leqslant 0.171$). В противном случае задача становится статически неопределимой [4].

Полученные приближения дают хорошую сходимость. На фиг. 1 приведен график распределения перемещений на контуре отверстия L при $\rho = 0.5$, $\delta = 0.171$:

$$u_1 = \frac{4Gu^p}{ak} - u^{0p}, \quad v_1 = \frac{4Gv^p}{ak}$$

Таким образом, в этом случае при двуосном растяжении контур отверстия увеличивается в размерах, приобретая некоторую вытянутость в направлении большей из действующих сил.

В общем случае отверстие может приобрести вытянутость и в направлении меньшей из действующих сил, причем равенство нулю первого приближения u' (9) будет иметь место при

$$\ln \rho = -\frac{\pi(3n+1)}{3\sqrt{3}} \qquad (n = 0,1,2,\ldots)$$

Поступила 25 VII 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Плоская упруго-пластическая задача. ПММ, т. X, вып. 3, 1946.
2. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Гостехтеоретиздат, 1956.
3. Ивлев Д. Д. Приближенное решение упруго-пластических задач теории идеальной пластичности методом малого параметра, ДАН СССР, т. CXIII, вып. 2, 1957.
4. Хилл Р. Математическая теория пластичности. Гостехтеоретиздат, 1956.

О РЕШЕНИИ ТИПА ДИПОЛЯ В ЗАДАЧАХ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА ПРИ ПОЛИТРОПИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ

Г. И. Баренблатт, Я. Б. Зельдович

(Москва)

При нестационарной фильтрации газа плоскими волнами в условиях политропического режима давление газа p удовлетворяет уравнению [1]

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x^2} \tag{1}$$

где x — координата, отсчитываемая по нормали к плоскостям равного давления, ($0 \leqslant x < \infty$, $x = 0$ соответствует границе пласта), t — время, a^2 — константа, определяемая свойствами среды и фильтрующегося газа, n — показатель политропы.

Как показано в работе [2], если начальное распределение давления достаточно быстро убывает на бесконечности, так что

$$\int_0^\infty xp(x, 0)\,dx < \infty,$$

то соответствующее решение уравнения (1) удовлетворяет интегральному соотношению, выражающему закон сохранения диполей:

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty xp(x, t)\,dx = a^2 p^{n+1}(0, t) \tag{2}$$

Таким образом, если решение дополнительно удовлетворяет условию

$$p(0, t) = 0 \tag{3}$$