ЗАМЕЧАНИЕ К ОДНОМУ МЕТОДУ ОТЫСКАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Ю. С. Богданов

(Ленинград)

Один из способов [1] отыскания периодических решений дифференциальных систем состоит в следующем. Наряду с данной системой рассматривается последовательность ее возмущений. В качестве возмущений выбираются системы, имеющие по периодическому решению, которое можно определить алгебраическим путем (для этого достаточно, чтобы периоды систем и соответствующего решения были несоизмеримыми [2,3] или чтобы возмущенная система была непериодической [1]). Последовательность правых частей (все системы предполагаем записанными в нормальной форме) должна сходиться к правой части исходной системы. Если при этом последовательность соответственных периодических решений сходится к некоторой периодической вектор-функции, то последняя и будет периодическим решением данной системы.

Последовательности возмущенных систем описанного типа в ряде конкретных случаев указаны [1]. Задача настоящей заметки состоит в доказательстве того, что если исходная система имеет периодическое решение, то требуемая последовательность возмущенных систем всегда существует.

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = f(x, t), \qquad f(x, t) \equiv f(x, t + \Omega) \quad (x \in G \subset E^n,\ t \in (-\infty, \infty)) \tag{1}$$

Допустим, что уравнение (1) имеет периодическое решение: $x = \varphi(t)$, $\varphi(t) \equiv \equiv \varphi(t + \omega)$, причем случай $\omega = \Omega$ не исключается. Вектор-функция $x = \varphi(t)$ является решением любой системы

$$\dot{x} = f(x, t) + F(x, t), \qquad F(\varphi(t),\ t) \equiv 0 \qquad (x \in G,\ t \in (-\infty, \infty))$$

(верно и обратное [4]: система, имеющая $x = \varphi(t)$ решением, представима в виде (2)).

Из множества всех функций $F(x, t)$ (см. [1]) выберем подпоследовательность $\{F_\varepsilon(x, t)\}$ такую, что: 1) $\lim F_\varepsilon(x, t) = 0$ при $\varepsilon \to 0$ (сходимость можно считать, скажем, равномерной для всех $x \in G$ и $t \in [t_1, t_2] \subset (-\infty, \infty)$) и 2) ни одно из $F_\varepsilon(x, t)$ не обладает по t периодом, соизмеримым с ω. Одной из таких подпоследовательностей, например, является $\{F_\varepsilon(x, t) \equiv \varepsilon t(x - \varphi(t))\}$.

Очевидно, что последовательность систем

$$\dot{x} = f(x, t) + F_\varepsilon(x, t) \qquad (x \in G, t \in (-\infty, \infty))$$

удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к возмущенным системам описанного выше типа.

Поступила 10 V 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Еругин Н. П. О периодических решениях дифференциальных уравнений, ПММ, т. XX, вып. 6, стр. 659—670, 1952.
2. Massera Jose L. Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones differenciales. Boletin de la Facultad de Ingenierid, vol. 1., f. 1., 1950.
3. Курцвейл Ярослав, Вейвода Отто. О периодических и почти периодических решениях системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Чехослов. мат. журн. т. 5, вып. 3, стр. 362—370, 1955.
4. Еругин Н. П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую. ПММ, т. XVI, вып. 6, стр. 659—670, 1952.