ЗАМЕЧАНИЕ К НЕКОТОРЫМ РАБОТАМ ПО СИСТЕМАМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. А. Якубович

(Ленинград)

В работах Чезари, Хейла и Гамбилла [1–4] (см. также РЖМат, 1955 г., 5783, 5784, 5785) рассматриваются системы вида

$$d^2y / dt^2 + [C + \lambda P(t)]\, y = 0 \tag{0.1}$$

Здесь y — k-мерный вектор, C — диагональная матрица с вещественными различными диагональными элементами $\omega_1^2, \ldots, \omega_k^2$, $P(t)$ — матрица вещественных периодических функций с периодом $T = 2\pi / \omega$, интегрируемых по Лебегу на интервале $[0, T]$. Равенство (0.1) понимается почти всюду.

Основным результатом работ [1–4] является следующая теорема.

Теорема 1. Если числа $\omega_j > 0$ удовлетворяют неравенствам

$$\omega_j \pm \omega_h \neq m\omega \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{0.2}$$

и выполнено одно из соотношений

(а) $P(t) = P^*(t)$ $\qquad$ ($P^*(t)$ — транспонированная матрица)

или

(б) $P(-t) = P(t)$

то при достаточно малых λ все решения системы (0.1) ограничены на $(-\infty, \infty)$.

Эта теорема доказывается весьма сложно, сначала в предположениях, что

$$\int_0^T P(t)\, dt = 0$$

и что ряды Фурье для элементов матрицы $P(t)$ абсолютно сходятся; затем от этих предположений авторы освобождаются. Доказательства проводятся специальным образом построенными методами последовательных приближений; в частности, применяется вариант метода Пуанкаре удаления вековых членов в последовательных приближениях.

Все эти методы сами по себе безусловно интересны. Однако применение этих методов для доказательства теоремы 1 (а также всех остальных утверждений авторов) крайне удивительно, так как теорема 1 является, как показано ниже, почти очевидным следствием некоторых, хорошо известных теорем Ляпунова [6] (работа Ляпунова [6] известна авторам; на нее имеются ссылки).

1°. В дальнейшем будем всегда считать, что коэффициенты дифференциальных уравнений — действительные (если это не оговорено особо) функции, интегрируемые по Лебегу в каждом конечном интервале. Тогда y и y' — абсолютно непрерывные функции и уравнение понимается выполненным почти всюду.

Можно было бы считать, что коэффициенты системы кусочно-непрерывны; тогда сами уравнения будут справедливы всюду, кроме точек разрыва.

Поскольку в работах [1–4] наряду с линейной рассматривалась и нелинейная зависимость от параметра λ, мы перефразируем теорему 1 так, чтобы из нее следовали утверждения авторов и для нелинейной зависимости от параметра λ:

Теорема 1а. Рассмотрим систему

$$d^2y / dt^2 + [C + P(t)]\, y = 0 \tag{1.1}$$

в которой:

(I) C — диагональная матрица с различными диагональными элементами $\omega_1^2, \ldots, \omega_k^2$, числа $\omega_j > 0$ удовлетворяют неравенствам (0.2),

(II) $\qquad P(t + T) \equiv P(t), \qquad T = 2\pi / \omega$

(III) Выполнено одно из соотношений (а) или (б).

Тогда найдется $\varepsilon > 0$, зависящее только от $\omega_1^2, \ldots, \omega_k^2$, такое, что для любой матрицы $P(t)$, удовлетворяющей условиям II, III и условию[1]

$$\int_0^T \| P(t) \| \, dt < \varepsilon \tag{1.2}$$

Все решения системы (1.1) ограничены при $-\infty < t < \infty$.

Доказательство. Нам достаточно доказать, что характеристическое уравнение системы (1.1) имеет различные корни, по модулю равные единице. Как показано Ляпуновым ([6], §50, 51), как в случае (а), так и в случае (б) характеристическое уравнение возвратное[2].

Таким образом, наряду с корнем ρ имеется корень ρ^{-1}. В силу вещественности коэффициентов наряду с корнем ρ имеется также корень $\bar{\rho}$. Иначе говоря, в обоих случаях спектр матрицы монодромии (совокупность корней характеристического уравнения) расположен симметрично относительно единичной окружности и относительно действительной оси.

Далее известно, что при непрерывном (в интегральном смысле) изменении коэффициентов системы матрица фундаментальной системы решений, а следовательно, и корни характеристического уравнения (мультипликаторы) изменяются непрерывно.

У системы (1.1) с матрицей $P(t) \equiv 0$ мультипликаторами являются числа $e^{\pm i\omega_j T}$. Из условия (0.2) следует, что это $2k$ различных точек на единичной окружности. Окружим эти точки непересекающимися кругами. Найдется $\varepsilon > 0$ такое, что при выполнении неравенства (1.2) система (1.1) имеет мультипликатор (и только один в каждом из этих кругов. В силу симметрии спектра относительно единичной окружности каждый из этих мультипликаторов может лежать лишь на единичной окружности и наше утверждение доказано.

Замечание. В условии теоремы необязательно предполагать, что C — диагональная матрица. В случае (а) достаточно предположить, что C — вещественная симметрическая и положительно-определенная матрица, ω_j^2 — ее собственные значения. В случае (б) можно считать, что C — любая вещественная матрица с собственными значениями $\omega_1^2, \ldots, \omega_k^2$. Число ε будет определяться при этом только матрицей C.

---

1 Под нормой матрицы $P(t)$ можно понимать, например, сумму модулей всех ее элементов. Знак тождества в II означает равенство почти всюду. Вообще, в дальнейшем тождество $u \equiv v$, где относительно u и v известно лишь, что u и v интегрируемы по Лебегу в каждом конечном интервале, будет означать равенство почти всюду.

2 В случае (а) простое доказательство имеется в [7б] и [8]. Приведем его. Вводя вектор $x = y + y'$, получим, что система (1.1) является частным случаем канонической системы

$$\frac{dx}{dt} = JH(t)\,x, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \qquad H(t) = H(t)^*$$

Если $X(t)$ — матрицант этой системы, $X(0) = E$, то $d/dt\,[X^*JX] = 0$, откуда $X(t)^*\,JX(t) = J$. Из соотношения $X(T)^{*-1} = J^{-1}X(T)\,J$ следует, что характеристическое уравнение $\mathrm{Det}\,[X(T) - \rho E] = 0$ возвратное.

В случае (б) система (1.1) является частным случаем системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x \qquad \left(GA(-t) + A(t)\,G = 0,\ G = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}\right)$$

Откуда следует

$$X(-t) \equiv GX(t)\,G^{-1}, \qquad X(T)^{-1} = GX(T)\,G^{-1}$$

Из последнего соотношения вытекает снова, что характеристическое уравнение возвратное.

Отметим, что для систем последнего типа может быть развита теория, аналогичная теории [7б, 8] канонических систем.

Теорема 1а содержит в себе все результаты работ [1,2] и некоторые — работ [3,4,5].

Оставшиеся результаты работы Р. Гамбилла [3], которые он получает, ссылаясь на доказательства в [1], заключаются в следующих теоремах [1].

Теорема 2. В системе

$$\frac{d^2y}{dt^2} + Q(t)\frac{dy}{dt} + [C + P(t)]\,y = 0 \tag{1.3}$$

C — вещественная матрица с различными диагональными элементами $\omega_1^2, \ldots \omega_k^2$, $Q(t)$ и $P(t)$ — матрицы порядка k, элементы которых — периодические функции периода $T = 2\pi/\omega$, $Q(-t) \equiv -Q(t)$, $P(-t) \equiv P(t)$. Если выполнены соотношения (0.2), то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что при

$$\int_0^T \|P(t)\|\,dt < \varepsilon, \qquad \int_0^T \|Q(t)\|\,dt < \varepsilon$$

все решения системы (1.3) ограничены при $-\infty < t < \infty$.

Теорема 3. В системе (1.1) матрица $P(t)$ имеет вид $P(t) = P_0(t) + \Phi(t)$, где $P_0 = \operatorname{diag}(P_1, \ldots, P_r)$ — прямая сумма матриц $P_j = P_j(t)$ порядка k_j, $k_1 + \cdots = k$ и все элементы матрицы Φ, которые находятся на тех же местах, что и элементы матриц P_j или выше «матричной диагонали» $P_1, \ldots, P_r$, равны нулю. Предположим, что выполнены условия (I) и (II) теоремы 1а, а кроме того

(III) Каждая из матриц $P_j(t)$ удовлетворяет либо условиям (а), либо условиям (б) теоремы 1.

Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для любой матрицы $P(t) = P_0(t) + \Phi(t)$, удовлетворяющей сформулированным условиям, а также условию

$$\int_0^T \|P_0(t)\|\,dt < \varepsilon$$

все решения системы (1.1) ограничены [2] при $-\infty < t < \infty$.

Доказательство теоремы 2 не отличается от доказательства теоремы 1а, ибо Ляпуновым ([6], стр. 219—222) доказано, что характеристическое уравнение системы (1.3) возвратное.

Доказательство теоремы 3 сложнее.

Лемма. Рассмотрим систему n уравнений

$$dz/dt = A(t)\,z + e^{i\sigma t} f(t) \tag{1.4}$$

где $A(t)$, $f(t)$, вообще говоря, комплексные и периодические

$$A(t+T) \equiv A(t), \qquad f(t+T) \equiv f(t)$$

Пусть $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — мультипликаторы соответствующей однородной системы. Если

$$\rho_j \neq e^{i\sigma T} \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{1.5}$$

то система (1.4) имеет (единственное) частное решение вида

$$z^{(0)}(t) = e^{i\sigma t} u(t) \tag{1.6}$$

где $u(t)$ абсолютно непрерывная вектор-функция $u(t+T) \equiv u(t)$.

Доказательство (лемма). Как известно, существует замена

$$z = R(t)\,w \tag{1.7}$$

где $R(t)$ — абсолютно непрерывна, $\operatorname{Det} R(t) \geqslant \delta > 0$ и $R(t+T) \equiv R(t)$, приводящая однородную систему, соответствующую (1.4), к системе $dw/dt = Kw$, где K — постоянная матрица с собственными значениями $\ln \rho_1, \ldots, \ln \rho_n$.

[1] Эти теоремы приводятся здесь в несколько более общих формулировках.

[2] В отличие от аналогичной теоремы Р. Гамбилла мы не требуем малости добавка $\Phi(t)$.

Проделывая эту замену в системе (1.4), получим систему

$$\frac{dw}{dt} = Kw + e^{i\sigma t} f_1(t) \qquad (f_1(t) = R(t)^{-1} f(t), \quad f_1(t+T) \equiv f_1(t))$$

Подберем значение $w(0) = w_0$ так, чтобы

$$w(t+T) \equiv e^{i\sigma T} w(t) \tag{1.8}$$

Так как

$$w = e^{kt}\left[w_0 + \int_0^t e^{-ks} e^{i\sigma s} f_1(s)\, ds\right] \tag{1.9}$$

то w_0 определяется из условия

$$(e^{kT} - e^{i\sigma T} E)\, w_0 = \left(e^{kT}\int_0^{t+T} - e^{i\sigma T}\int_0^t\right) e^{-ks} e^{i\sigma s} f_1(s)\, ds \tag{1.10}$$

(правая часть от t не зависит, так как производная правой части равна нулю почти всюду). В силу (1.5) уравнение (1.10) разрешимо относительно w_0, при этом w_0 имеет единственное значение.

Но выполнение тождества (1.8) равносильно возможности представить $w(t)$ в виде

$$w(t) = e^{i\sigma t} v(t) \tag{1.11}$$

где $v(t+T) \equiv v(t)$. Так как вектор-функция $w(t)$ абсолютно непрерывна, то абсолютно непрерывна и $v(t)$. Из (1.11) и (1.7) следует (1.6).

Доказательство теоремы 3. По условию теоремы система (1.1) распадается на r систем:

$$\begin{aligned} &d^2y_1 / dt^2 + [C_1 + P_1(t)]\, y_1 = 0 \\ &d^2y_2 / dt^2 + [C_2 + P_2(t)]\, y_2 = -\Phi_{21}(t)\, y_1 \\ &d^2y_3 / dt^2 + [C_3 + P_3(t)]\, y_3 = -\Phi_{31}(t)\, y_1 - \Phi_{32}(t)\, y \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{1.12}$$

Полагая в (1.12) $\Phi_{jh} \equiv 0$, получим r систем, к каждой из которых применима теорема 1а. При достаточно малых (в интегральном смысле) $P_j(t)$ все решения этих систем ограничены и мультипликаторы этих систем сколь угодно близки к числам $e^{i\omega_j t}$. Выбираем $\varepsilon > 0$ так, чтобы при

$$\int_0^T \| P_0(t) \|\, dt = \sum_{j=1}^r \int_0^T \| P_j(t) \|\, dt < \varepsilon$$

мультипликаторы $\rho_j = e^{i\sigma_j T}$ этих систем лежали на единичной окружности, были различны и чтобы были выполнены неравенства

$$\sigma_j \pm \sigma_h \neq m\omega \qquad (m = 1, 2, \dots) \tag{1.13}$$

аналогичные неравенствам (0.2).

Из первого уравнения (1.12) следует, что любое решение y_1 имеет вид:

$$y_1 = \sum_{j=-k_1}^{k_1} e^{i\sigma_j t} f_{1j}(t), \qquad f_{1j}(t+T) \equiv f_{1j}(t)$$

Здесь и в дальнейшем мы считаем $\sigma_{-j} = \sigma_j$.

Ко второй системе (1.12) применима лемма, $z = y_2 + y_2'$. Условие (1.5) выполнено в силу (1.13). Поэтому эта система имеет частное решение

$$y_2^{(0)} = \sum_{j=-k_1}^{k_2} e^{i\sigma_j t} u_{2j}(t), \qquad u_{2j}(t+T) \equiv u_{2j}(t)$$

Следовательно, общее решение второй системы (1.12) имеет вид:

$$y_2 = \sum_{j=-k_2}^{k_2} e^{i\sigma_j t} f_{2j}(t) + y_2^{(0)}, \qquad f_{2j}(t+T) \equiv f_{2j}(t)$$

или, меняя обозначения:

$$y_2 = \sum_{j=-(k_1+k_2)}^{k_1+k_2} e^{i\sigma_j t} f_{2j}(t), \qquad f_{2j}(t+T) \equiv f_{2j}(t)$$

Продолжая этот процесс дальше, получим, что все y_j имеют аналогичный вид, т. е. ограничены на $(-\infty, \infty)$.

Замечание. Мы сформулировали теорему 3, стараясь быть ближе по возможности к работе [3]. Теорема справедлива и в более общих предположениях. Можно было бы считать, что левые части некоторых из уравнений (1.10) имеют вид (1.3). Можно было бы сформулировать еще более общую теорему для систем первого порядка, основываясь на результатах Ляпунова ([6], стр. 219—222).

Наконец, результаты работы [4], посвященной системам двух уравнений, можно было бы также несколько уточнить, а доказательства упростить; на этом мы не будем останавливаться. Отметим, что, например, в [11 б, в, г] считаются все эти результаты известными и решаются несравненно более трудные задачи о точной оценке тех малых добавков, о которых идет речь.

2°. Вернемся снова к теореме 1а. Условие (0.2) представляет для приложений наибольший интерес. Это условие показывает, что частоты

$$\omega = \omega_{jhm}^{\pm} = \frac{|\omega_j \pm \omega_h|}{m} \qquad (m = 1, 2, \ldots; \ j, h = 1, \ldots, k)$$

являются «опасными»: если возмущать параметры системы периодически с одной из этих частот, то даже при сколь угодно малой амплитуде возможна «раскачка» системы, — у соответствующей системы дифференциальных уравнений могут появиться не ограниченные при $t \to \infty$ решения. Однако теорема 1а не утверждает, что это явление будет обязательно происходить, если частота возмущения ω равна одному из значений $\omega_{jhm}^{\pm}$; она лишь утверждает, что если $\omega \neq \omega_{jhm}^{\pm}$, то этого явления происходить не будет. Введем следующее определение.

Определение. Частота $\omega = \omega_0$ называется критической для системы

$$d^2y \,/\, dt^2 + Cy = 0, \qquad C = \operatorname{diag}[\omega_1^2, \ldots, \omega_k^2], \qquad \omega_j \neq \omega_h$$

и возмущений (а) [возмущений (б)], если для любого $\varepsilon > 0$ найдется матрица $P(t)$ периода $T_0 = 2\pi / \omega_0$, удовлетворяющая условиям (а) [условиям (б)] и неравенству (1.2), такая, что система (1.1) имеет решения, не ограниченные при $t \to \infty$.

Таким образом, свойство частоты быть критической зависит не только от рассматриваемой системы, но и от характера возмущений.

В случае (а) вопрос о критических частотах наряду с другими рассматривался М. Г. Крейном ([7б], § 10). М. Г. Крейном показано, что критическими частотами являются числа

$$\omega_{jhm}^{+} = \frac{\omega_j + \omega_h}{m} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

а числа ω_{jhm}^{-} критическими частотами не являются[1].

[1] На это обстоятельство особо обращал внимание М. Г. Крейн в своем докладе на Третьем математическом съезде.

Отметим, что в работе [7б] критические частоты определяются несколько иначе. При этом в [7б] доказано лишь, что все частоты $\omega \neq \omega_{jhm}^{+}$ не являются критическими, и указано, что можно доказать и обратное утверждение.

Для общих канонических систем это следует из [8]. Для систем второго порядка это нуждается в специальном доказательстве, и мы можем здесь лишь повторить, что это утверждение может быть доказано.

Таким образом, в случае (а) условие (0.2) может быть заменено следующим:

$$\omega \neq \frac{\omega_j + \omega_h}{m} \qquad (m = 1, 2, \ldots;\ 1 \leqslant j \leqslant h \leqslant k) \tag{2.1}$$

Это утверждение в отличие от теоремы 1а отнюдь не является тривиальным. Оно доказано в [7б] с использованием развитой М. Г. Крейном теории мультипликаторов первого и второго рода и является следствием того факта, что мультипликаторы одного рода, встречаясь на единичной окружности, не могут сходить с нее.

Естественно возникает аналогичный вопрос для случая (б). Оказывается, в случае (б) все частоты

$$\omega = \omega_{jhm}^{\pm} = \frac{|\omega_j \pm \omega_h|}{m}$$

являются критическими и, таким образом, в случае (б) условие (0.2) не может быть заменено на менее ограничительное. Это утверждение доказывается также не слишком просто, и мы не можем здесь привести доказательство.

После того как выяснено, какие частоты являются критическими, возникает вопрос о точной оценке тех малых добавков, о которых идет речь в теореме 1а. (Заметим, что инженера никогда не удовлетворит ответ, что система устойчива при «достаточно малом» λ.) Эти вопросы для случая (а) (а также для более общих систем) рассматривались в статьях [7—11]. Для случая (б), а также в случае системы (1.3), по-видимому, менее интересных для приложений, аналогичные результаты не получены.

Непосредственно для системы (1.1) в случае (а), например из [11д], вытекает следующее [1].

Теорема 4. Предположим, что выполнены неравенства (2.1).

Определим числа $m_{jh} = 0, 1, 2, \ldots$ неравенствами

$$m_{jh}\omega < \omega_j + \omega_h < (m_{jh} + 1)\,\omega \tag{2.2}$$

Обозначим Ω — диагональную матрицу с диагональными элементами $\omega_1, \ldots, \omega_k$, $\Omega = \sqrt{C}$. Пусть $p_1(t)$ и $p_2(t)$ — наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы $\sqrt{\Omega^{-1}}\,p(t)\sqrt{\Omega^{-1}}$ или вообще какие-либо интегрируемые по Лебегу на $(0, T)$ функции, удовлетворяющие почти всюду неравенствам

$$p_1(t)\cdot(a, a) \leqslant (\sqrt{\Omega^{-1}}\,p(t)\sqrt{\Omega^{-1}}\,a, a) \leqslant p_2(t)\,(a, a)$$

для любого вектора a, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Обозначим

$$p_1^-(t) = \frac{1}{2}\,[|p_1(t)| - p_1(t)], \qquad p_2^+(t) = \frac{1}{2}\,[|p_2(t)| + p_2(t)]$$

$$q_1 = \frac{1}{T}\int_0^T p_1^-(t)\,dt, \qquad q_2 = \frac{1}{T}\int_0^T p_2^+(t)\,dt$$

Тогда, если наряду с неравенствами (2.2) выполнены неравенства

$$m_{jh}\omega < \omega_j + \omega_h - 2q_1 \leqslant \omega_j + \omega_h + 2q_2 \leqslant (m_{jh} + 1)\,\omega$$

то все решения системы (1.1) [где $P(t)$ удовлетворяет условиям (а)] ограничены при $-\infty < t < \infty$.

---

[1] Автор пользуется случаем, чтобы указать на то, что в доказательствах к работе [11д] он недавно обнаружил ошибку. В связи с этим теоремы 1.4 и критерии неустойчивости должны быть формулированы по-другому, к сожалению, значительно более сложно. Остальные результаты работы [11д] остаются верными. Работа с подробными доказательствами подготовляется к печати.

Действительно, замена $x_1 = \sqrt{\Omega} y$, $x_2 = \sqrt{\Omega^{-1}} y'$ приводит систему (1.1) к системе $dx / dt = JH(t) x$, где $x = x_1 + x_2$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \qquad H(t) = \begin{pmatrix} \Omega + \Omega^{-1/2} P \Omega^{-1/2} & 0 \\ 0 & \Omega \end{pmatrix}$$

к которой применимы результаты [11д].

В работах [7в,г,9а,б] указаны другие признаки ограниченности решений уравнения

$$y'' + P(t) y = 0, \qquad P(t) \equiv P(t)^* \equiv P(t+T)$$

Поступила 9 XI 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. C e s a r i L. Sulla stabilità delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti periodici. Atti Accad. Halia, Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) 11, 633—692, 1940.
2. H a l e J. K. On boundedness of the solutions of linear differential systems with periodic coefficients. Rivista Mat. Univ. Parma, vol. 5, No 1—3, pp. 137—167, 1954.
3. G a m b i l l R. A. Stability criteria for linear differential systems with periodic coefficients. Riv. Mat. Univ. Parma, vol. 5, No 1—3, pp. 169—181, 1954.
4. C e s a r i L. and H a l e J. K. Second order linear differential systems with periodic L-integrable coef. Riv. Mat. Univ. Parma, vol. 5, No 1—3, pp. 55—60, 1954.
5. H a a c k e W. Über die Stabilität eines Systems von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten, die von Parametern abhängen (I und II). Math. Z., 56, 65—79, 1952 und 57, 34—45, 1952.
6. Л я п у н о в А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОГИЗ, 1935.
7. К р е й н М. Г. а) Обобщение некоторых исследований А. М. Ляпунова о линейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами. ДАН СССР, т. XXIII, № 3, стр. 445—448, 1950, б) Основные положения теории λ-зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Сборник памяти А. А. Андронова, изд. АН СССР. в) О признаках устойчивой ограниченности решений периодических канонических систем. ПММ, т. XIX, стр. 641—680, 1955.
8. Г е л ь ф а н д И. М. и Л и д с к и й В. Б. О структуре областей устойчивости канонических линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. УМН, 10, № 1, стр. 3—40, 1955.
9. Л и д с к и й В. Б. и Н е й г а у з М. Г. а) Об ограниченности решений линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. ДАН СССР, т. XXVII, № 2, стр. 189—192 1951, б) К критериям устойчивости системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами ПММ, вып 19, № 5, стр. 625—627, 1955.
10. С т а р ж и н с к и й В. М. а) Об устойчивости тривиального решения дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами. Инж. сборник, т. XVIII, стр. 119—138, 1954, б) К вопросу об ограниченности решений системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Труды III всес. матем. съезда, т. III, 1957.
11. Я к у б о в и ч В. А. а) Об ограниченности решений уравнения $y'' + p(t)y = 0$, $p(t + \omega) = p(t)$. ДАН СССР, т. LXXIV, № 5, стр. 901—903, 1950. б) Критерии устойчивости для системы двух уравнений канонического вида с периодическими коэффициентами. ДАН СССР, т. LXXVIII, № 2, стр. 221—224, 1951. в) Оценка характеристических показателей и критерии устойчивости для линейного дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами. ДАН СССР, т. LXXXVII, № 3, стр. 345—348, 1952. г) Оценки характеристических показателей системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. ПММ, т. XVIII, вып. 5, 1954. д) О системах дифференциальных уравнений канонического вида с периодическими коэффициентами, ДАН, т. 103, № 6, стр. 981—984, 1955.