

Уравнения (4.7) преобразуем, введя комплексные величины

$$\alpha_n = (a_n + ib_n)e^{i\omega t}, \quad \beta_n = (d_n + ic_n)e^{i\omega t}, \quad \beta = (d + ic)e^{i\omega t}$$

Через эти же параметры выражается переменная x , которая связана с l_z и l_φ согласно (1.4), и величины v_z и v_φ , определяемые по (1.3). Введем следующие обозначения: $m = 2\pi r h H \rho$ — масса жидкости, содержащейся в полости, $2k = 2h/r$ — коэффициент наполнения полости жидкостью, $\lambda = r/H$ — половина обратной величины удлинения полости, $C_1 = mr^2$ — момент инерции жидкой массы,

$$\mu = (z_1 + z_2) / 2r$$

Опуская промежуточные выкладки, запишем окончательно совокупную систему уравнений, описывающую возмущенное движение гироскопа и содержащейся в его полости жидкости:

$$A\ddot{\delta} - iC\omega\dot{\delta} - D\delta - \frac{C_1}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{n} \left(\ddot{\alpha}_n - 2i\omega\dot{\alpha}_n + \frac{i}{\pi n \lambda} \ddot{\beta}_n \right) + \frac{i}{2} C_1 \mu \ddot{\beta} = 0 \quad (4.7)$$

$$\ddot{\alpha}_n - 2i\omega\dot{\alpha}_n + (\pi^2 n^2 \lambda^2 k - 1) \omega^2 \alpha_n = i\pi n k \lambda \omega^2 \beta_n + \frac{4}{\pi n} (\ddot{\delta} - 2i\omega\dot{\delta})$$

$$\ddot{\beta}_n - i\omega(2+k)\dot{\beta}_n - \omega^2 \beta_n = -\pi n k \lambda \omega \dot{\alpha}_n - \frac{4i}{\pi^2 n^2 \lambda} \ddot{\delta} \quad (n=1,3,\dots)$$

$$\ddot{\beta} - i\omega(2+k)\dot{\beta} - \omega^2 \beta = i\mu \ddot{\delta}$$

Уравнения (4.7) представляют собой бесконечную систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Решение их может строиться методом редукции, путем отыскания решений конечных систем уравнений, получаемых из (4.7) при ограниченных и последовательно возрастающих числах n .

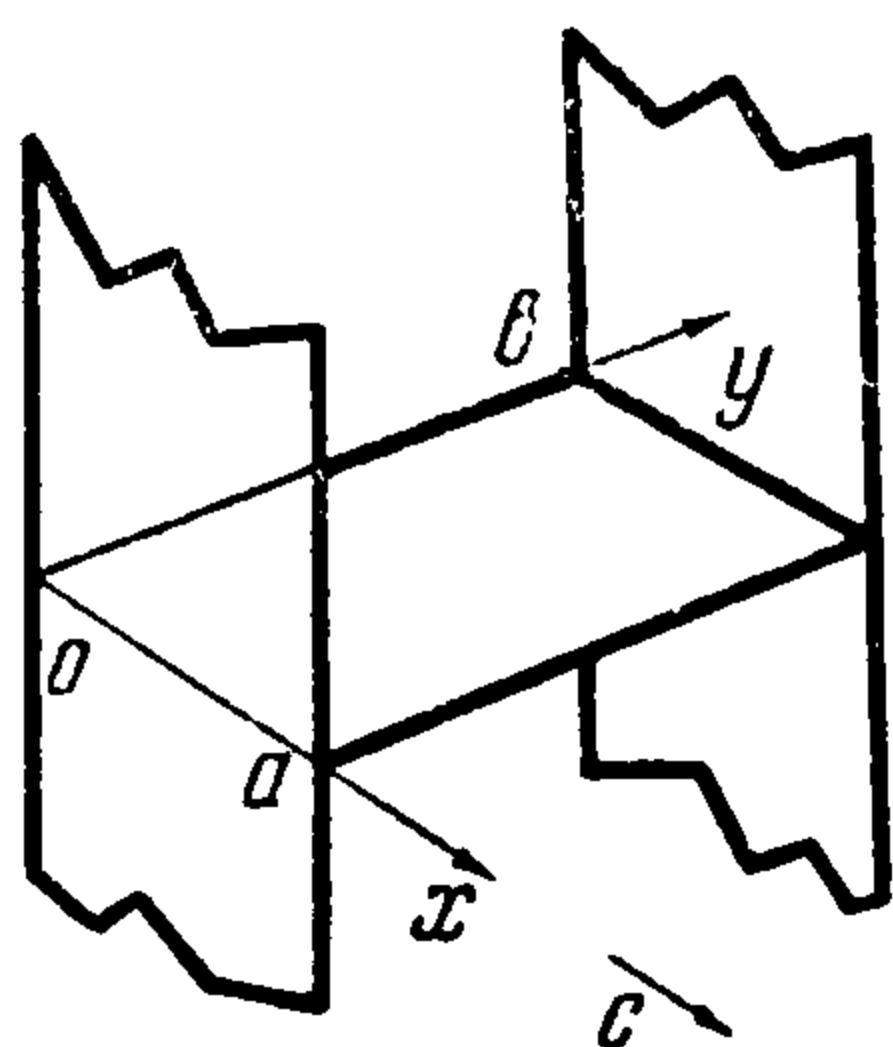
Поступила 4 II 1957

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛОПАТКИ, ДВИЖУЩЕЙСЯ В ГАЗЕ

А. А. Мовчан

(Москва)

В ливейной постановке исследуется устойчивость лопатки — тонкой прямоугольной пластинки постоянной толщины с двумя свободно опертыми и двумя свободными краями, движущейся в газе с большой сверхзвуковой скоростью в направлении от одного свободного края к другому. Избыточное давление газа учитывается приближенной формулой поршневой теории [1].



Фиг. 1

Как и в случае закрепленных по всему контуру панелей, у лопатки возможен флаттер. В отличие от панелей, дивергенция лопатки возможна при отсутствии сжимающих усилий и даже при ее растяжении, причем критическая скорость дивергенции существенно зависит от коэффициента Пуассона. Флаттер лопатки обусловлен резонансом и взаимодействием собственных движений, соответствующих различным формам изгиба хорды; задираание краев, связанное с изгибом хорды, оказывается определяющим и в явлении дивергенции. Таким

образом, основные результаты данной работы не могут быть получены применением изгибно-крутильной модели, не учитывающей изгиб хорды.

В рассматриваемой задаче точное определение критических скоростей флаттера и дивергенции требует определенного объема вычислений. Показано, что для оценки границ дофлаттерной области можно применять результаты, полученные ранее для

закрепленных по всему контуру панелей [2]. Для лопаток, хорда которых больше размаха, найдена удобная для применения формула, дающая с достаточной точностью критическую скорость дивергенции.

1. Сохраняя постановку задачи, систему координат, а также обозначения, принятые в работе [2], полагаем, что лопатка, опертая вдоль краев $y = 0$, $y = b$ и свободная вдоль краев $x = 0$, $x = a$, перпендикулярных направлению невозмущенного движения, обтекается газом с двух сторон. Уравнения возмущенного движения для прогиба $w(x, y, t)$ приводятся к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{a^2}{b^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{a^4}{b^4} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{a^4 N_2}{b^2 D} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{2a^3 p_0 \kappa c}{c_0 D} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{a^4}{D} \left[\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2p_0 \kappa}{c_0} \frac{\partial w}{\partial t} \right] = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{a^2}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{x=0,1} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{a^2}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \Big|_{x=0,1} = 0 \\ w \Big|_{y=0,1} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0,1} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

После подстановки в (1.1) выражения для комплексных собственных движений

$$w(x, y, t) = X(x) \sin n\pi y e^{\omega t} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (1.2)$$

и введения обозначений

$$\begin{aligned} A = \frac{2a^3 p_0 \kappa c}{c_0 D}, \quad \lambda = -\frac{a^4}{D} \left(\mu \omega^2 + \frac{2p_0 \kappa}{c_0} \omega \right), \quad k = \frac{n^2 a^2}{b^2} \\ n_2 = \frac{a^2 N_2}{\pi^2 D}, \quad \lambda^\circ = \lambda - n_2 k \pi^4 \end{aligned} \quad (1.3)$$

получаем для $X(x)$ краевую задачу

$$\begin{aligned} X^{IV} - 2k\pi^2 X'' + k^2 \pi^4 X - AX' = (\lambda - n_2 k \pi^4) X = \lambda^\circ X \\ X'' - \nu k \pi^2 X \Big|_{x=0,1} = 0, \quad X''' - (2 - \nu) k \pi^2 X' \Big|_{x=0,1} = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Из двух собственных движений какого-нибудь собственного значения λ краевой задачи (1.4) одно $w'(x, y, t)$ всегда затухает, а второе $w(x, y, t)$ неограниченно отклоняется лишь в том случае, если λ находится на комплексной плоскости за пределами параболы устойчивости

$$\operatorname{Re} \lambda = \frac{D \mu c_0^2}{a^4 p_0^2 \kappa^2} (\operatorname{Im} \lambda)^2 \quad (1.5)$$

2. Зависимость собственных значений λ° от параметров краевой задачи (1.4) можно исследовать при помощи системы уравнений

$$\varphi_1 \varphi_2 (\operatorname{ch} 2\alpha - \operatorname{ch} \sqrt{\beta^2 - 2\alpha^2 + 2k\pi^2} \cos \beta) + \varphi_3 \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\beta^2 - 2\alpha^2 + 2k\pi^2} \sin \beta}{\sqrt{\beta^2 - 2\alpha^2 + 2k\pi^2} \beta} = 0 \quad (2.1)$$

$$A = 4\alpha (\beta^2 - \alpha^2 + k\pi^2) \quad (2.2)$$

$$\lambda^\circ = k^2 \pi^4 + (\alpha^2 + \beta^2) (\beta^2 - 3\alpha^2 + 2k\pi^2) \quad (2.3)$$

метод получения которой заимствован из работы¹. Здесь

$$\varphi_1(\nu, k, \alpha, \beta) = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{11} \\ a_{21} & b_{21} \end{vmatrix}, \quad \varphi_2(\nu, k, \alpha, \beta) = \frac{1}{a_{33}} \begin{vmatrix} a_{12} & b_{12} \\ a_{22} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \varphi_3(\nu, k, \alpha, \beta) = \\ = \frac{1}{a_{33}} \left[(\beta^2 - 2\alpha^2 + 2k\pi^2) \left(\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix}^2 + \beta^2 \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}^2 \right) - \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^2 + \beta^2 \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^2 \right) \right] \end{aligned}$$

$$a_{11} = \alpha^2 - \beta^2 - \nu k \pi^2,$$

$$a_{12} = \beta^2 - \alpha^2 + (2 - \nu) k \pi^2,$$

$$a_{21} = \alpha [\alpha^2 - 3\beta^2 - (2 - \nu) k \pi^2],$$

$$a_{22} = -\alpha [3\beta^2 - 5\alpha^2 + (4 + \nu) k \pi^2],$$

$$a_{33} = (\beta^2 - 3\alpha^2 + k\pi^2)^2 + 4\alpha^2 \beta^2$$

$$b_{11} = -b_{12} = 2\alpha$$

$$b_{21} = 3\alpha^2 - \beta^2 - (2 - \nu) k \pi^2$$

$$b_{22} = \alpha^2 + \beta^2 + \nu k \pi^2$$

¹ Мовчан А. А. «Некоторые вопросы колебаний пластинки, движущейся в газобразной среде», Диссертация, МГУ, 1954 г.

Система уравнений (2.1), (2.2), (2.3) имеет много общего с соответствующей системой для закрепленной по всему контуру панели, вследствие чего многие свойства ветвей $\lambda^\circ = \lambda^\circ(\nu, k, A)$ собственных значений краевой задачи (1.4) аналогичны свойствам ветвей в задаче об устойчивости панели. К ним, в частности, относятся свойства непрерывности и неуничтожимости.

При $A = 0$ существует счетное множество вещественных собственных значений

$$\lambda_m^\circ(\nu, k, 0) = (\beta_m^2 + k\pi^2)^2 \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (2.4)$$

где $\beta_m = \beta_m(\nu, k)$ — корни уравнения (2.1) при $\alpha = 0$, причем, как и для заземленной по краям $x = \text{const}$ панели:

$$\lambda_m^\circ(\nu, k, 0) \rightarrow \pi^4 [(m - 1.5)^2 + k]^2 \quad \text{при } m \rightarrow \infty$$

Все $\lambda_m^\circ(\nu, k, A)$ с достаточно большими m, k вещественны и с ростом m, k стремятся к собственным значениям (2.4), имеющимся при $A = 0$. При любых фиксированных ν, k существует на вещественной плоскости A λ° счетное множество изолированных овалов конечной протяженности, состоящих из вещественных кусков ветвей $\lambda^\circ = \lambda_m^\circ(\nu, k, A)$. Отсюда легко выводится существование комплексных собственных значений и возможность флаттера лопатки. На каждом из овалов находится точка

$$\lambda_m^\circ(k) = \pi^4 [(m^2 + k)^2 + \frac{1}{3}(5m^2 + k)^2], \quad A_m(k) = \frac{8}{3\sqrt{3}} \pi^3 (5m^2 + k) \sqrt{2m^2 + k} \quad (2.5)$$

соответствующая решению $\alpha = \sqrt{(2m^2 + k) : 3}$, $\beta = 2m\pi$ уравнения (2.1). Чтобы не повторять результатов работы [2], мы не будем рассматривать физические следствия из перечисленных свойств собственных значений и обратимся к особенностям, которыми лопатка отличается от панели.

3. Кривые, определяемые на вещественной плоскости α, β уравнением $\varphi_1(\nu, k, \alpha, \beta) = 0$, имеют асимптоты

$$\beta = \alpha \sqrt{3} \mp \pi \sqrt{\nu k : 3}$$

в окрестностях которых уравнение (2.1) разрешаем относительно φ_1 :

$$\varphi_1 \equiv \beta^4 - 2(3\alpha^2 - k\pi^2)\beta^2 + [9\alpha^4 - 2(3 + 2\nu)k\pi^2\alpha^2 + (2 - \nu)\nu k^2\pi^4] = \varepsilon(\nu, k, \alpha, \beta)$$

а затем представляем в виде

$$\beta^2 = 3\alpha^2 - k\pi^2 \mp \pi \sqrt{k \sqrt{4\nu\alpha^2 + (1 - \nu)^2 k\pi^2 + \varepsilon}} \quad (3.1)$$

Легко показать, что вещественная функция $\varepsilon = \varepsilon(\nu, k, \alpha, \beta)$ в упомянутых окрестностях с ростом α стремится к нулю так же быстро, как функция $e^{-\alpha}$. Подставляя (3.1) в (2.2), (2.3), получаем формулы

$$A = 4\alpha [2\alpha^2 \mp \pi \sqrt{k \sqrt{4\nu\alpha^2 + (1 - \nu)^2 k\pi^2 + \varepsilon}}] \quad (3.2)$$

$$\lambda^\circ = 4\alpha^2 [(1 + \nu)k\pi^2 \mp \pi \sqrt{k \sqrt{4\nu\alpha^2 + (1 - \nu)^2 k\pi^2 + \varepsilon}}] + (1 - \nu)^2 k^2\pi^4 + \varepsilon k\pi^2$$

дающие при $\varepsilon = 0$ параметрическое (параметр α) представление тех кривых на вещественной плоскости A, λ° , к которым с ростом A асимптотически приближаются две вещественные ветви собственных значений краевой задачи (1.4). Обозначим их $\lambda^\circ = \lambda_1^\circ(\nu, k, A)$ и $\lambda^\circ = \lambda_2^\circ(\nu, k, A)$ так, чтобы первой ветви соответствовал перед радикалами формул (3.2) знак минус. Эти две уходящие в бесконечность ветви, различные при $k \neq 0$, совпадают между собой при $k = 0$, образуя при этом одну двукратную ветвь $\lambda_1^\circ(A) = \lambda_2^\circ(A) \equiv 0$.

Из (3.2) видно, что если коэффициент Пуассона ν положителен, первое собственное значение λ_1° с ростом A неограниченно убывает:

$$\lambda_1^\circ(\nu, k, A) \rightarrow -\infty \quad \text{при } \nu > 0, A \rightarrow \infty \quad (3.3)$$

Следовательно, если $\nu > 0$, при достаточно большом значении приведенной скорости невозмущенного движения A первое собственное значение

$$\lambda_1(\nu, k, A) = \lambda_1^\circ(\nu, k, A) + \pi^4 k n_2$$

отрицательно и находится за пределами параболы устойчивости (1.5); одно из его собственных движений имеет характер дивергентного «задирания» свободных краев лопатки, свидетельствуя о неустойчивости невозмущенного движения.

Исследуя уравнение (2.1), можно показать, что при $\nu = 0$ вдоль первой ветви $\lambda_1^\circ(0, k, A)$ выполняется соотношение $\varepsilon = 0$ и из (3.2) получается конечное выражение

$$\lambda_1^\circ(0, k, A) \equiv k^2\pi^4 \quad (3.4)$$

Таким образом, при $\nu = 0$ независимо от величины скорости A первое собственное значение λ дается формулой

$$\lambda_1(0, k, A) = \pi^4 k (k + n_2)$$

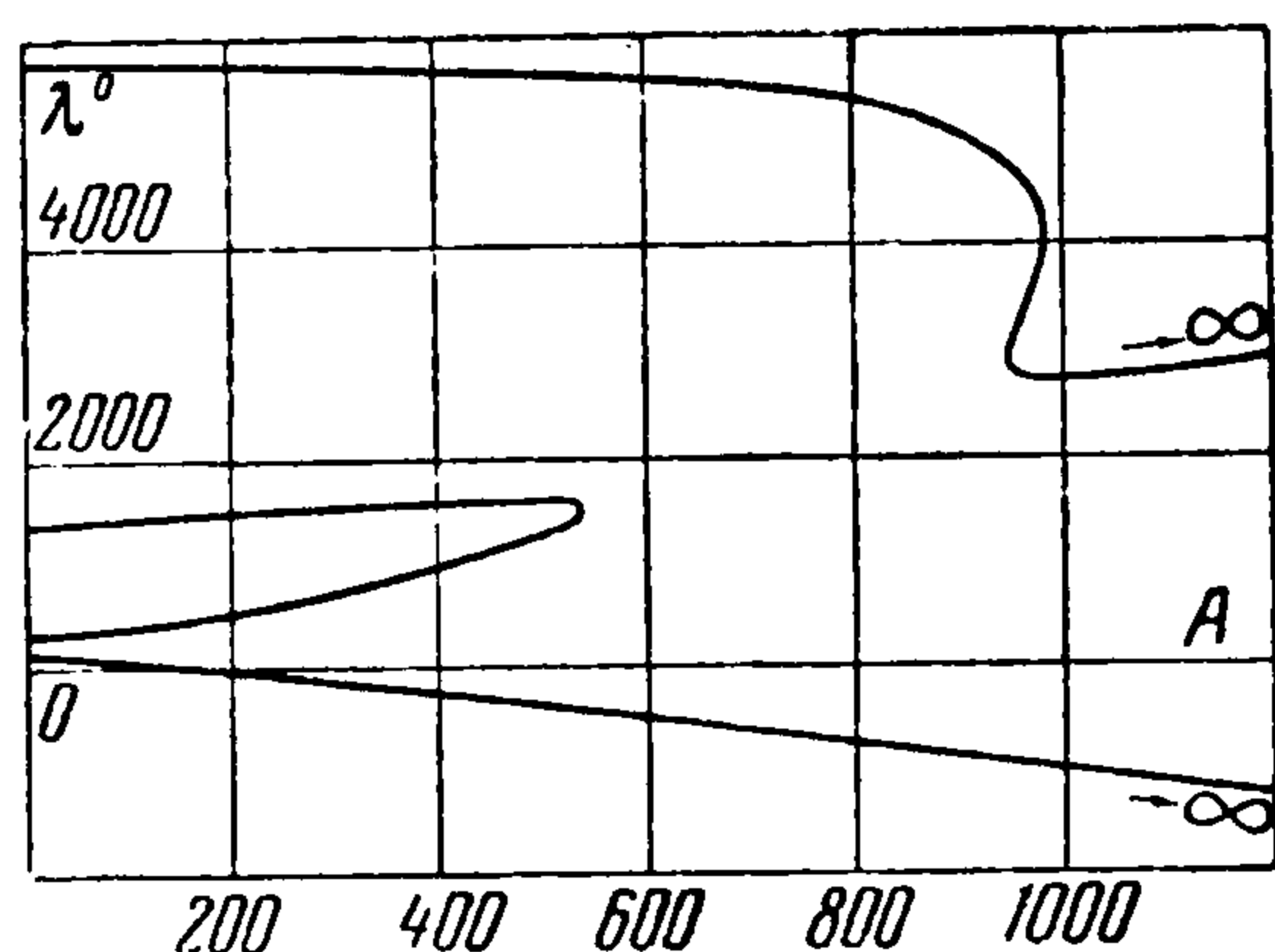
При $n_2 > -k$ оно положительно, находится внутри параболы устойчивости и его собственные движения затухают; при $n_2 < -k$ оно отрицательно, находится вне параболы устойчивости, и одно из его собственных движений имеет характер дивергентного выпучивания с прогибом w , не зависящим от координаты x . Критическое усилие выпучивания находится из условия $n_2 = -k$:

$$N_2 = -n^2 \pi^2 D : b^2$$

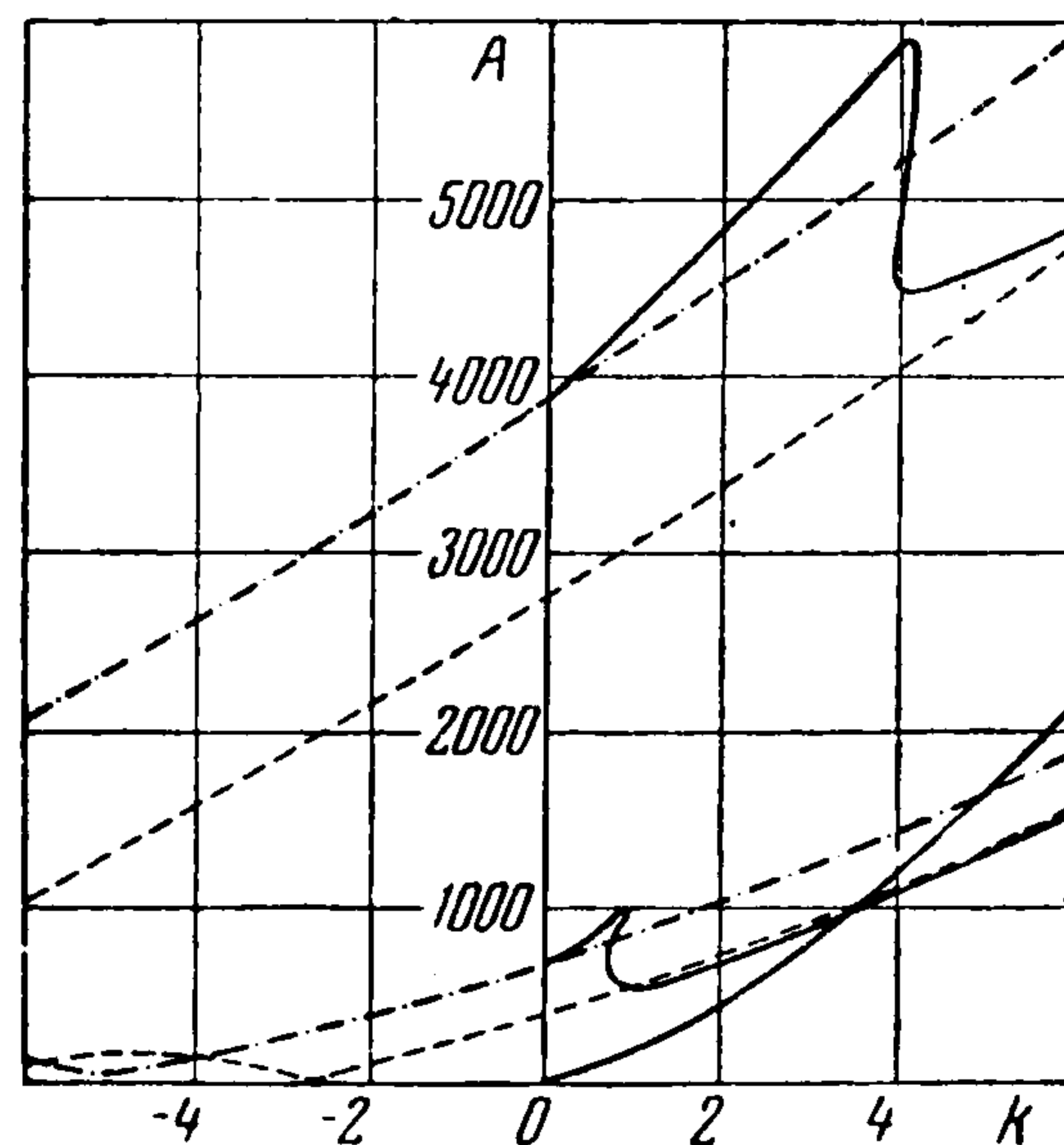
Сравнение соотношений (3.3) и (3.4) и полученных из них следствий указывает на существенную зависимость устойчивости движения лопатки от коэффициента Пуассона ν . При $\nu > 0$ сжатие материала в одном направлении сопровождается расширением в перпендикулярном направлении. Вследствие этого положительный синусоидальный по координате y прогиб лопатки сопровождается положительным задирианием ее свободных краев, и одного этого эффекта, даже в случае растягиваемой лопатки, уже достаточно, чтобы при соответствующей скорости вызвать потерю устойчивости движения.

4. Формулы (2.1), (2.2), (2.3) позволяют для фиксированных ν, k, A находить с любой степенью точности методом последовательных приближений любое собственное значение $\lambda_m^o(\nu, k, A)$. Для случая $\nu = 0.3$ и $k = 1$ результаты таких расчетов показаны на фиг. 2, где по оси абсцисс откладывается скорость A , а по оси ординат — вещественные точки первых четырех ветвей собственных значений λ^o . Вещественные точки остальных ветвей образуют овалы, расположенные выше изображенных кривых.

На чертеже видны точки кратных собственных значений с абсциссами $A = 535, 945, 985$. В промежутках $0 \leq A \leq 535, 945 \leq A \leq 985$ все собственные значения $\lambda_m^o(0.3, 1, A)$ вещественны, и флаттер их собственных движений невозможен. Когда A приближается к значению 535, собственные движения второго и третьего собственных значений сближаются по форме и частоте, совпадают при $A = 535$ (резонанс собствен-



Фиг. 2



Фиг. 3

ных движений) и при дальнейшем увеличении скорости в промежутке $535 < A < 945$ перестают существовать в виде затухающих стоячих волн, превращаясь в бегущие волны с затухающей или, возможно, неограниченно растущей амплитудой (флаттер). При $A = 985$ совпадают третье и четвертое собственные значения, наступает резонанс их собственных движений и при $A > 985$ превращение этих движений в бегущие волны и т. д.

В пространстве параметров ν, k, A каждую точку, для которой какие-либо два собственных движения находятся в резонансе между собой, назовем резонансной, а многообразие всех таких точек — резонансной поверхностью. В рассматриваемой задаче область отсутствия резонанса собственных движений является частью дофлаттерной области, поэтому знание резонансной поверхности важно для суждения об устойчивости. Сечение резонансной поверхности плоскостью $\nu = \text{const}$ дает бесконечно

много резонансных кривых, две из которых для случая $\nu = 0.3$ изображены на фиг. 3 сплошными линиями, выходящими из точек $A = 636.5$ и $A = 3834$ оси ординат. Область отсутствия резонанса собственных движений, а следовательно, бегущих волн и флаттера заключена в первом квадранте между осью абсцисс и первой (нижней) резонансной кривой. Для сравнения приведены также резонансные кривые в задаче о флаттере панелей, опертых по всему контуру (пунктирная кривая) и опертых по краям $y = 0$, $y = b$ и заземленных по краям $x = 0$, $x = a$ (штрих-пунктирная кривая)¹.

Форма первой резонансной кривой фиг. 3 показывает, что при фиксированной хорде a увеличение размаха лопатки b в промежутке $0 < b \leq a$ вызывает монотонное уменьшение наименьшей резонансной скорости. Минимальное ее значение $A = 535$ вычислено при $k = n^2 a^2 / b^2 = 1$. Отсюда вытекает, что у всех лопаток с фиксированной хордой a и размахом $b = a$, $b = 2a$, $b = 3a$, ... наименьшая скорость невозмущенного движения, при которой наступает резонанс двух собственных движений, одинакова и минимальна по сравнению с лопатками других размахов; возникающие при превышении минимальной скорости бегущие волны делят лопатку узловыми линиями $y = \text{const}$ на квадраты. Если хорда a не укладывается целое число раз в размахе b , но $b \gg a$, наименьшая резонансная скорость лишь не намного может превосходить значение $A = 535$, так как с ростом отношения b/a величина $k = n^2 a^2 / b^2$ будет стремиться к единице, если в качестве n выбирать целую часть отношения b/a ; возникающие при превышении наименьшей резонансной скорости бегущие волны делят лопатку узловыми линиями $y = \text{const}$ примерно на квадраты. Подобным же образом можно истолковать относительный минимум второй резонансной кривой при $k = 4$. Резонансные кривые панелей при $k \geq 0$ не обладают такими особенностями, однако для некоторых отрицательных k резонансная скорость снижается до нуля ($k = -2.5, -6.5, -8.5, -12.5, \dots$ для пунктирных кривых, $k = -5, -10, -13, \dots$ для штрих-пунктирных кривых).

Как видно из фиг. 3, на участке $0 \leq k < 1$ резонансные кривые не сильно отличаются от штрих-пунктирных кривых, а при $k > 1$ они близки к пунктирным кривым (исключение составляет переходный участок вблизи $k = 1$). Это обстоятельство позволяет при оценке резонансных скоростей лопатки пользоваться некоторыми результатами, полученными при исследовании флаттера панелей, например формулой

$$A = \frac{8\pi^3}{3\sqrt{3}} (5 + k) \sqrt{2 + k} \quad (4.1)$$

дающей первую резонансную скорость с недостатком [см. точное решение (2.5)]. Отсюда, вспоминая обозначения (1.3), находим, что всякая комбинация параметров, удовлетворяющая неравенству

$$c \leq \frac{4\pi^3}{3\sqrt{3}} \frac{c_0 D}{\rho_0 \kappa a^3} \left(5 + \frac{n^2 a^2}{b^2} \right) \sqrt{2 + \frac{n^2 a^2}{b^2}} \quad (4.2)$$

определяет дофлаттерную конфигурацию, при которой резонанс, бегущие волны и флаттер собственных движений с n полуволнами по размаху лопатки еще отсутствуют. Для участка $k < 0.8$ оценки (4.1), (4.2) можно уточнить, добавляя в правую часть (4.1) постоянное слагаемое 293 и внося соответствующие изменения в формулу (4.2).

Характерной особенностью лопатки по сравнению с закрепленными по всему контуру панелями является наличие при каждом k двух уходящих в бесконечность вещественных ветвей собственных значений (фиг. 2). Из результатов п. 3 следует, что для $\nu > 0$ первая ветвь при достаточно больших A с ростом A монотонно убывает. Численные расчеты, проведенные для ряда значений k из промежутка $0 < k \leq 16$, показывают, что для $\nu > 0$ свойство монотонного убывания наименьшего собственного

¹ В задаче о панельном флаттере резонансные кривые не зависят от величины ν ; отрицательные значения k соответствуют определению $k = n^2 a^2 / b^2 - 0.5n_1$, где n_1 — безразмерное усилие, действующее в плоскости панели в направлении оси x . Приближенные аналитические выражения пунктирных кривых даны в диссертации автора (см. сноску, стр.3) и в работе [2]; в работе [3] дан график, соответствующий участку $-2.5 \leq k \leq 2.5$ первой пунктирной кривой.

значения справедливо, начиная от значения $A = 0$. Отсюда следует, что для $\nu > 0$ наименьшее критическое усилие дивергенции

$$n_2 = -\lambda_1^0(\nu, k, A) / \pi^4 k \quad (4.3)$$

с ростом A монотонно возрастает (в алгебраическом смысле), так что в отличие от случаев, закрепленных по всему контуру панелей, дивергенция лопатки при $A \neq 0$ наступает при меньших сжимающих усилиях, чем критическое усилие Эйлера при $A = 0$, и если A достаточно велико — не только при сжимающих, но даже при растягивающих усилиях.

Приближенное значение критической скорости дивергенции можно найти, подставляя в (4.3) вместо $\lambda_1^0(\nu, k, A)$ приближенное выражение, получающееся из (3.2) при $\varepsilon = 0$. Тогда, обозначая $z = \alpha^2 / k\pi^2$, приходим к кубическому уравнению

$$64\nu z^3 - 64\nu z^2 - 8(1 + \nu)[(1 - \nu)^2 + n_2/k]z - [(1 - \nu)^2 + n_2/k]^2 = 0$$

зная положительный корень которого $z = z(\nu, n_2/k)$, можно найти критическую скорость дивергенции по формуле

$$A = 4\pi^3 k \sqrt{k f(\nu, n_2/k)} \quad (4.4)$$

где обозначено

$$f(\nu, n_2/k) \equiv \sqrt{z(4z^2 - 4z - n_2/k)}$$

Очевидно, при стремлении ν к нулю или при неограниченном возрастании n_2/k корень z , а вместе с ним $f(\nu, n_2/k)$ и значение (4.4) возрастают неограниченно. Существенная зависимость критической скорости дивергенции (4.4) от ν и n_2/k видна также из следующей таблицы значений функции $f(\nu, n_2/k)$:

n_2/k	$\nu = 0$	$\nu = 0,01$	$\nu = 0,05$	$\nu = 0,10$	$\nu = 0,15$	$\nu = 0,20$
0	∞	14.240	4.630	2.820	2.084	1.660
1	∞	24.125	7.691	4.686	3.638	2.785
2	∞	32.678	10.414	6.361	4.955	3.806
n_2/k	$\nu = 0,25$	$\nu = 0,30$	$\nu = 0,35$	$\nu = 0,40$	$\nu = 0,45$	$\nu = 0,50$
0	1.374	1.162	0.996	0.860	0.745	0.645
1	2.324	1.987	1.724	1.511	1.333	1.180
2	3.189	2.741	2.394	2.113	1.880	1.680

Расчеты показывают, что формула (4.4) дает результаты, близкие к точным, по крайней мере в области $n_2 \geq 0$, $k \geq 1$. Например, при $\nu = 0,3$, $n_2 = 0$ точные и найденные по формуле (4.4) значения критической скорости дивергенции для $k = 1, 4, 9, 16$ равны соответственно $A = 142,6, 1153, 3892, 9224$ и $A = 144,1, 1153, 3891, 9224$. Таким образом, скорость невозмущенного движения c , превышение которой приводит к возможности дивергентных собственных движений с n полуволнами вдоль размаха лопатки, может быть, по крайней мере при $na/b \geq 1$, $N_2 \geq 0$, с удовлетворительной точностью оценена формулой

$$c = \frac{\pi^3}{6} \frac{c_0}{p_0 \kappa} \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{n^3 h^3}{b^3} f\left(\nu, \frac{N_2 b^2}{n^2 \pi^2 D}\right) \quad (4.5)$$

На фиг. 3 график критической скорости дивергенции изображен для случая $\nu = 0,3$, $n_2 = 0$ сплошной линией, выходящей из начала координат. Взаимное расположение этой и резонансной кривых фиг. 3 показывает, что при $\nu = 0,3$ и $n_2 = 0$ дивергенция лопатки не малого размаха (примерно $b > 0,5a$) будет встречаться при меньших скоростях, чем флаттер. Например, для квадратной лопатки в области $0 \leq A \leq 535$, $945 \leq A \leq 985$ флаттер невозможен, в то время как дивергенция возможна уже при $A > 143$. Такое соотношение между флаттером и дивергенцией можно изменить, выпол-

нив лопатку из материала с другим коэффициентом Пуассона ν или приложив усилия n_2 в ее плоскости.

5. Для лопатки бесконечного размаха ($b = \infty$) рассмотрим собственные движения, не зависящие от y (плоская задача):

$$w(x, t) = X(x) e^{\omega t} \quad (5.1)$$

Уравнение (2.1) принимает вид:

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 (\beta^2 - 3\alpha^2)^2 F(\alpha, \beta) = 0 \quad (5.2)$$

где $F(\alpha, \beta)$ совпадает с левой частью соответствующего уравнения заземленной по краям $x = \text{const}$ панели бесконечного размаха [2]. Все собственные значения и собственные движения заземленной панели являются соответственно собственными значениями и собственными движениями рассматриваемой лопатки. Кроме того, лопатка, как это видно из (5.2), (2.3), имеет еще «лишнее» двукратное нулевое собственное значение

$$\lambda_1^0(A) \equiv \lambda_2^0(A) \equiv 0$$

которому отвечают не две, как это могло бы быть, а только одна собственная функция $X(x) = \text{const}$. Соответствующие собственные движения (5.1) будут

$$\begin{aligned} w_1'(x, t) &= c_1 e^{\omega t}, & \omega &= -2\rho_0 x / c_0 \mu \\ w_1(x, t) &= c_2, & c_1, c_2 &= \text{const}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Пусть A — любое значение приведенной скорости, при котором ни одно собственное значение λ не выходит за пределы параболы устойчивости (1.5). Тогда, рассматривая все собственные движения лопатки, имеющиеся при этом A , включая собственные движения (5.3), можно было бы сделать вывод об устойчивости невозмущенного движения, если ограничиться только такими возмущениями, которые могут быть представлены как результат суперпозиции собственных движений. Однако такой вывод об устойчивости не имел бы практической ценности, ибо, как легко проверить непосредственной подстановкой в уравнения (1.1), кроме собственных движений (т. е. движений, представимых в виде (5.1)), лопатка при любом A имеет еще два присоединенных движения¹:

$$\begin{aligned} w_2'(x, t) &= c_3 (x - tc/a) e^{\omega t}, & \omega &= -2\rho_0 x / c_0 \mu \\ w_2(x, t) &= c_4 (x + tc/a), & c_3, c_4 &= \text{const} \end{aligned}$$

последнее из которых свидетельствует о неустойчивости при любой скорости невозмущенного движения $c \neq 0$.

Приведенный пример показывает, что для суждения об устойчивости, в случае кратного собственного значения, находящегося на параболе устойчивости, необходимо рассматривать не только собственные, но также соответствующие ему присоединенные движения.

Поступила 17 VIII 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. И л ь ю ш и н А. А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей. ПММ, т. XX, вып. 6, 1956.
2. М о в ч а н А. А. Об устойчивости панели, движущейся в газе. ПММ, т. XXI, вып. 2, 1957.
3. H e d g e p e t h J. M. Flutter of Rectangular Simply Supported Panels at High Supersonic Speeds. Preprint. Inst. Aeronaut Sci., 1957.

¹ Понятия собственные и присоединенные движения вполне соответствуют понятиям собственные и присоединенные функции, применяемым в функциональном анализе.