

О ДВИЖЕНИИ СИММЕТРИЧНОГО ГИРОСКОПА, ПОЛОСТЬ КОТОРОГО ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕНА ЖИДКОСТЬЮ

Г. С. Нариманов

(Москва)

Выводятся уравнения малых возмущений стационарного вращения симметричного гироскопа, цилиндрическая полость которого частично заполнена жидкостью. Полученные уравнения могут быть использованы для исследования устойчивости стационарного вращения и для оценки влияния на нее величин различных параметров системы.

§ 1. Постановка задачи. Полагаем, что ось симметрии гироскопа одновременно является осью полости, представляющей собой прямой круговой цилиндр. При стационарном вращении гироскоп и заключенная в полости жидкость вращаются как единое твердое тело вокруг оси симметрии, которая в этом случае располагается вертикально.

Будем полагать отличие возмущенного движения гироскопа и жидкости от стационарного вращения малым, допускающим возможность линеаризации уравнений по величинам вариаций параметров возмущенного движения.

Неподвижную систему координат $Ox^*y^*z^*$ расположим так, чтобы ось Oz^* была вертикальна, а точка O совпадала с неподвижной точкой гироскопа. Кроме этой системы, введем в рассмотрение еще две подвижные системы координат, одна из которых $Oxyz$ (ось Oz совпадает с осью симметрии) жестко связана с гироскопом, другая же Ox_0y_0z является частично связанной.

Преобразование системы координат $Ox^*y^*z^*$ в Ox_0y_0z осуществляется при помощи двух поворотов: одного поворота вокруг оси Oy^* по часовой стрелке на угол δ_2 и второго поворота вокруг оси Ox_0 против часовой стрелки на угол δ_1 . Система координат Ox_0y_0z преобразуется в систему $Oxyz$ одним поворотом по часовой стрелке вокруг оси Oz на угол δ_3 .

Пусть i_0, j_0, k и i, j, k — орты подвижных систем координат, соответственно r_0 — радиус цилиндра боковой поверхности полости, H — высота цилиндрической полости, ω — вектор угловой скорости возмущенного движения гироскопа, ω — угловая скорость стационарного вращения гироскопа, r, φ, z — цилиндрические координаты в системе $Oxyz$.

При описании движения жидкости пренебрегаем полем тяжести по сравнению с полем центробежных сил, что соответствует достаточно большому значению величины ω . Уравнение свободной поверхности полагаем в виде

$$r_1 - r = \kappa(\varphi, z, t) \quad (1.1)$$

где r_1 — радиус свободной поверхности, имеющей цилиндрическую форму [при стационарном вращении $h = r_0 - r_1$].

Полагая величину h достаточно малой по сравнению с длиной окружности и высотой цилиндрической поверхности полости, будем пренебрегать зависимостью величин параметров относительного движения жидкости от величины r . В дальнейших выкладках будем опускать индекс при обозначении r , принимая в качестве него всегда средний радиус $r = \frac{1}{2}(r_0 + r_1)$.

В качестве радиальной составляющей относительной скорости жидкости v также примем среднюю ее величину

$$v_r = -\frac{1}{2} \frac{\partial \kappa}{\partial t} \quad (1.2)$$

Обозначим через \mathbf{l} вектор смещения частиц жидкости в относительном движении

$$\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} = \mathbf{v} \quad (1.3)$$

Уравнение неразрывности в этих обозначениях может быть представлено в виде

$$\kappa = -\frac{\partial}{\partial z}(hl_z) - \frac{h}{r} \frac{\partial l_\varphi}{\partial \varphi} \quad (1.4)$$

§ 2. Выражение момента количества движения системы. Момент количества движения системы G представим в виде

$$G = G_T + G_0 \quad (2.1)$$

где G_T — момент количества движения мгновенно отвердевшей системы, G_0 — кинетический момент относительного движения жидкости.

Выражение G_T с точностью до членов первого порядка малости можно представить в виде

$$G_T = A\omega_{x_0} i_0 + A\omega_{y_0} j_0 + C\omega_z k - I_{xz}^0 \omega_z i_0 - I_{yz}^0 \omega_z j_0 \quad (2.2)$$

Здесь A, C — соответственно поперечный и продольный моменты инерции отвердевшей системы при стационарном вращении,

$$\omega_{x_0} = -\dot{\delta}_1, \quad \omega_{y_0} = \dot{\delta}_2, \quad \omega_z = \dot{\delta}_3 \quad (2.3)$$

I_{xz}^0, I_{yz}^0 — центробежные моменты отвердевшей системы в системе координат Ox_0y_0z , $\omega_{x_0}, \omega_{y_0}, \omega_z$ — компоненты скорости ω в этой системе координат:

$$I_{xz}^0 = \rho r^2 \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} xz \cos(\varphi + \delta_3) dz d\varphi \quad (2.4)$$

$$I_{yz}^0 = \rho r^2 \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} xz \sin(\varphi + \delta_3) dz d\varphi$$

где ρ — плотность жидкости, z_1 — расстояние от точки O до нижнего дна полости, $z_2 = z_1 + H$.

Выражение кинетического момента относительного движения жидкости имеет вид:

$$G_0 = \rho hr \left\{ i_0 \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} [rv_z \sin(\varphi + \delta_3) - zv_\varphi \cos(\varphi + \delta_3)] dz d\varphi - \right. \quad (2.5)$$

$$\left. - j_0 \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} [rv_z \cos(\varphi + \delta_3) + zv_\varphi \sin(\varphi + \delta_3)] dz d\varphi - k \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} v_\varphi dz d\varphi \right\}$$

Используя формулы (2.1)–(2.5), составим выражение компонент суммарной величины кинетического момента в системе координат Ox_0y_0z :

$$G_{x_0} = -A\dot{\delta}_1 - \rho r^2 \omega_z \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} xz \cos(\varphi + \delta_3) dz d\varphi + \quad (2.6)$$

$$+ \rho hr \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} [rv_z \sin(\varphi + \delta_3) - zv_\varphi \cos(\varphi + \delta_3)] dz d\varphi$$

$$G_{y_0} = A\dot{\delta}_2 - \rho r^2 \omega_z \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} xz \sin(\varphi + \delta_3) dz d\varphi - \quad (2.7)$$

$$- \rho hr \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} [(rv_z \cos(\varphi + \delta_3) + zv_\varphi \sin(\varphi + \delta_3))] dz d\varphi$$

$$G_z = C\omega_z + \rho r^2 h \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} v_\varphi dz d\varphi \quad (2.8)$$

§ 3. Уравнения относительного движения жидкости. Полагаем жидкость невязкой. Уравнение Эйлера для относительного движения жидкости примет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 2\omega \times \mathbf{v} + \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{R} + \omega \times (\omega \times \mathbf{R}) = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (3.1)$$

где \mathbf{R} — радиус-вектор относительно точки O , p — давление жидкости.

Учитывая условие (1.2), опустим уравнение, определяющее изменение компоненты v_r из (3.1), заменив его статическим уравнением давления в соответствии с основной гипотезой теории длинных волн. Остальные уравнения примут вид:

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} - \omega_z \frac{\partial \kappa}{\partial t} - (\dot{\omega}_x \cos \varphi + \omega_y \sin \varphi) z + \dot{\omega}_z r +$$

$$+ \omega_z z (\omega_y \cos \varphi - \omega_x \sin \varphi) = - \frac{1}{r \rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + r (\dot{\omega}_x \sin \varphi - \dot{\omega}_y \cos \varphi) + \omega_z r (\omega_x \cos \varphi + \omega_y \sin \varphi) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3.3)$$

Статическое уравнение давления при принятых предположениях примет вид:

$$p - p_0 = \rho \omega_z^2 r (h + \kappa) \quad (3.4)$$

Дифференцируя правую и левую части равенства (3.4) по φ и по z и заменив κ согласно (1.4), получим выражение компонент градиента давления через компоненты вектора смещения частиц жидкости:

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = - \rho \omega_z^2 h \left(r \frac{\partial^2 l_z}{\partial z \partial \varphi} + \frac{\partial^2 l_\varphi}{\partial \varphi^2} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = - \rho \omega_z^2 h \left(r \frac{\partial^2 l_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 l_\varphi}{\partial z \partial \varphi} \right) \quad (3.5)$$

Покажем, что в случае отсутствия составляющей момента внешних сил по оси Oz величина $\dot{\omega}_z$ равна нулю и, стало быть, угловая скорость вращения гироскопа относительно оси Oz будет во все время движения равна угловой скорости стационарного вращения. Для доказательства запишем уравнение момента количества движения относительно оси Oz , используя (2.8):

$$C \dot{\omega}_z + \rho r^2 h \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} \dot{v}_\varphi dz d\varphi = 0 \quad (3.6)$$

На основании (3.2) и граничных условий (3.9), приведенных ниже, легко получить равенство

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} \dot{v}_\varphi dz d\varphi = 0 \quad (3.7)$$

Отсюда следует справедливость высказанного утверждения. Далее будем полагать момент внешних сил относительно оси Oz равным нулю.

Уравнения (3.2) и (3.3) на основании (3.5) и при учете (1.3), (1.4) и (2.3) могут быть окончательно преобразованы к следующему виду:

$$\frac{\partial^2 l_\varphi}{\partial t^2} + \omega h \frac{\partial^2 l_z}{\partial t \partial z} + \omega \frac{h}{r} \frac{\partial^2 l_\varphi}{\partial t \partial \varphi} - \omega^2 \frac{h}{r} \frac{\partial^2 l_\varphi}{\partial \varphi^2} =$$

$$= \omega^2 h \frac{\partial^2 l_z}{\partial \varphi \partial z} + z \ddot{\delta}_2 \sin(\varphi + \delta_3) - z \ddot{\delta}_1 \cos(\varphi + \delta_3)$$

$$\frac{\partial^2 l_z}{\partial t^2} - \omega^2 h r \frac{\partial^2 l_z}{\partial z^2} = \omega^2 h \frac{\partial^2 l_\varphi}{\partial z \partial \varphi} + r \ddot{\delta}_1 \sin(\varphi + \delta_3) +$$

$$+ r \ddot{\delta}_2 \cos(\varphi + \delta_3) + 2\omega r \dot{\delta}_1 \cos(\varphi + \delta_3) - 2\omega r \dot{\delta}_2 \sin(\varphi + \delta_3) \quad (3.8)$$

Запишем граничные условия:

$$\left[\frac{\partial l_z}{\partial t} \right]_{z=z_1} = \left[\frac{\partial l_z}{\partial t} \right]_{z=z_2} = 0 \quad (3.9)$$

§ 4. Составление уравнений движения системы. Запишем выражение компонент момента силы тяжести по осям Ox_0 и Oy_0 :

$$M_{x_0} = -D\delta_1, \quad M_{y_0} = D\delta_2 \quad (4.1)$$

где величина D зависит от веса системы и расстояния центра ее тяжести при стационарном вращении от точки O . Введем комплексную переменную

$$\delta = \delta_2 + i\delta_1 \quad (4.2)$$

Уравнение момента количества движения относительно комплексной переменной δ на основании выражений (2.6), (2.7) и (4.1) принимает следующий вид:

$$A\ddot{\delta} - iC\omega\dot{\delta} - D\delta + \rho \frac{d}{dt} \left\{ ir^2\omega \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} \kappa z e^{i(\varphi+\omega t)} dz d\varphi - \right. \\ \left. - hr \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} (rv_z - izv_\varphi) e^{i(\varphi+\omega t)} dz d\varphi \right\} = 0 \quad (4.3)$$

Компоненты вектора смещения частиц жидкости могут быть в общем виде представлены следующим образом:

$$l_z = r \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [a_{nm}(t) \cos m\varphi + b_{nm}(t) \sin m\varphi] \sin \frac{\pi n}{H} (z-z_1) \\ l_\varphi = r \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [d_{nm}(t) \cos m\varphi + c_{nm}(t) \sin m\varphi] \cos \frac{\pi n}{H} (z-z_1) \quad (4.4)$$

Указанные выражения можно существенно упростить, исключив из рассмотрения те параметры a_{nm} , b_{nm} , d_{nm} , c_{nm} , изменение которых не зависит от движения гироскопа, и которые в свою очередь не влияют на движение последнего.

Подставив (4.4) в уравнения (4.3), (3.7) и (3.8), видим, что к таким параметрам относятся те, индексы которых удовлетворяют условиям $m \neq 1$ или n — четное число ($n \neq 0$).

Имея в виду не учитывать эти параметры, опустим индекс m и будем полагать, что индекс n принимает лишь нечетные значения или $n = 0$; формулы (4.4) в этом случае преобразуются к виду

$$l_z = r \sum_{n=1,3,\dots} [a_n(t) \cos \varphi + b_n(t) \sin \varphi] \sin \frac{\pi n}{H} (z-z_1) \\ l_\varphi = r \sum_{n=1,3,\dots} [d_n(t) \cos \varphi + c_n(t) \sin \varphi] \cos \frac{\pi n}{H} (z-z_1) + r(d \cos \varphi + c \sin \varphi) \quad (4.5)$$

Подставим выражения (4.5) в уравнения (3.7) и (3.8). Умножим левую часть каждого из этих уравнений последовательно на коэффициент при параметрах a_n , b_n , d_n , c_n из (4.5) и проинтегрируем полученные произведения по φ в интервале от 0 до 2π и по z в интервале от z_1 до z_2 .

В результате получим следующую систему уравнений:

$$\ddot{a}_n + \pi^2 n^2 \omega^2 \frac{hra_n}{H^2} = -\pi n \omega^2 \frac{h}{H} c_n + \frac{4}{\pi n} (\ddot{\delta}_1 \sin \omega t + \ddot{\delta}_2 \cos \omega t + 2\omega \dot{\delta}_1 \cos \omega t - \\ - 2\omega \dot{\delta}_2 \sin \omega t) \\ \ddot{b}_n + \pi^2 n^2 \omega^2 \frac{hr}{H^2} b_n = \pi n \omega^2 \frac{h}{H} d_n + \frac{4}{\pi n} (\ddot{\delta}_1 \cos \omega t - \ddot{\delta}_2 \sin \omega t - 2\omega \dot{\delta}_1 \sin \omega t - 2\omega \dot{\delta}_2 \cos \omega t) \\ \ddot{d}_n + \omega^2 \frac{h}{r} d_n + \omega \frac{h}{r} \dot{c}_n = \pi n \omega^2 \frac{h}{H} b_n - \pi n \omega \frac{h}{H} \dot{a}_n + \frac{4H}{\pi^2 n^2 r} (\ddot{\delta}_1 \cos \omega t - \ddot{\delta}_2 \sin \omega t) \\ \ddot{c}_n + \omega^2 \frac{h}{r} c_n - \omega \frac{h}{r} \dot{d}_n = -\pi n \omega^2 \frac{h}{H} a_n - \pi n \omega \frac{h}{H} \dot{b}_n - \frac{4H}{\pi^2 n^2 r} (\ddot{\delta}_1 \sin \omega t + \ddot{\delta}_2 \cos \omega t) \\ \ddot{d} + \omega^2 \frac{h}{r} d + \omega \frac{h}{r} \dot{c} = \frac{z_1 + z_2}{2r} (\ddot{\delta}_2 \sin \omega t - \ddot{\delta}_1 \cos \omega t) \\ \ddot{c} + \omega^2 \frac{h}{r} c - \omega \frac{h}{r} \dot{d} = \frac{z_1 + z_2}{2r} (\ddot{\delta}_1 \sin \omega t + \ddot{\delta}_2 \cos \omega t) \quad (4.6)$$

Уравнения (4.7) преобразуем, введя комплексные величины

$$\alpha_n = (a_n + ib_n)e^{i\omega t}, \quad \beta_n = (d_n + ic_n)e^{i\omega t}, \quad \beta = (d + ic)e^{i\omega t}$$

Через эти же параметры выражается переменная x , которая связана с l_z и l_φ согласно (1.4), и величины v_z и v_φ , определяемые по (1.3). Введем следующие обозначения: $m = 2\pi r h H \rho$ — масса жидкости, содержащейся в полости, $2k = 2h/r$ — коэффициент наполнения полости жидкостью, $\lambda = r/H$ — половина обратной величины удлинения полости, $C_1 = mr^2$ — момент инерции жидкой массы,

$$\mu = (z_1 + z_2) / 2r$$

Опуская промежуточные выкладки, запишем окончательно совокупную систему уравнений, описывающую возмущенное движение гироскопа и содержащейся в его полости жидкости:

$$A\ddot{\delta} - iC\omega\dot{\delta} - D\delta - \frac{C_1}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{n} \left(\ddot{\alpha}_n - 2i\omega\dot{\alpha}_n + \frac{i}{\pi n \lambda} \ddot{\beta}_n \right) + \frac{i}{2} C_1 \mu \ddot{\beta} = 0 \quad (4.7)$$

$$\ddot{\alpha}_n - 2i\omega\dot{\alpha}_n + (\pi^2 n^2 \lambda^2 k - 1) \omega^2 \alpha_n = i\pi n k \lambda \omega^2 \beta_n + \frac{4}{\pi n} (\ddot{\delta} - 2i\omega\dot{\delta})$$

$$\ddot{\beta}_n - i\omega(2+k)\dot{\beta}_n - \omega^2 \beta_n = -\pi n k \lambda \omega \dot{\alpha}_n - \frac{4i}{\pi^2 n^2 \lambda} \ddot{\delta} \quad (n=1,3,\dots)$$

$$\ddot{\beta} - i\omega(2+k)\dot{\beta} - \omega^2 \beta = i\mu \ddot{\delta}$$

Уравнения (4.7) представляют собой бесконечную систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Решение их может строиться методом редукции, путем отыскания решений конечных систем уравнений, получаемых из (4.7) при ограниченных и последовательно возрастающих числах n .

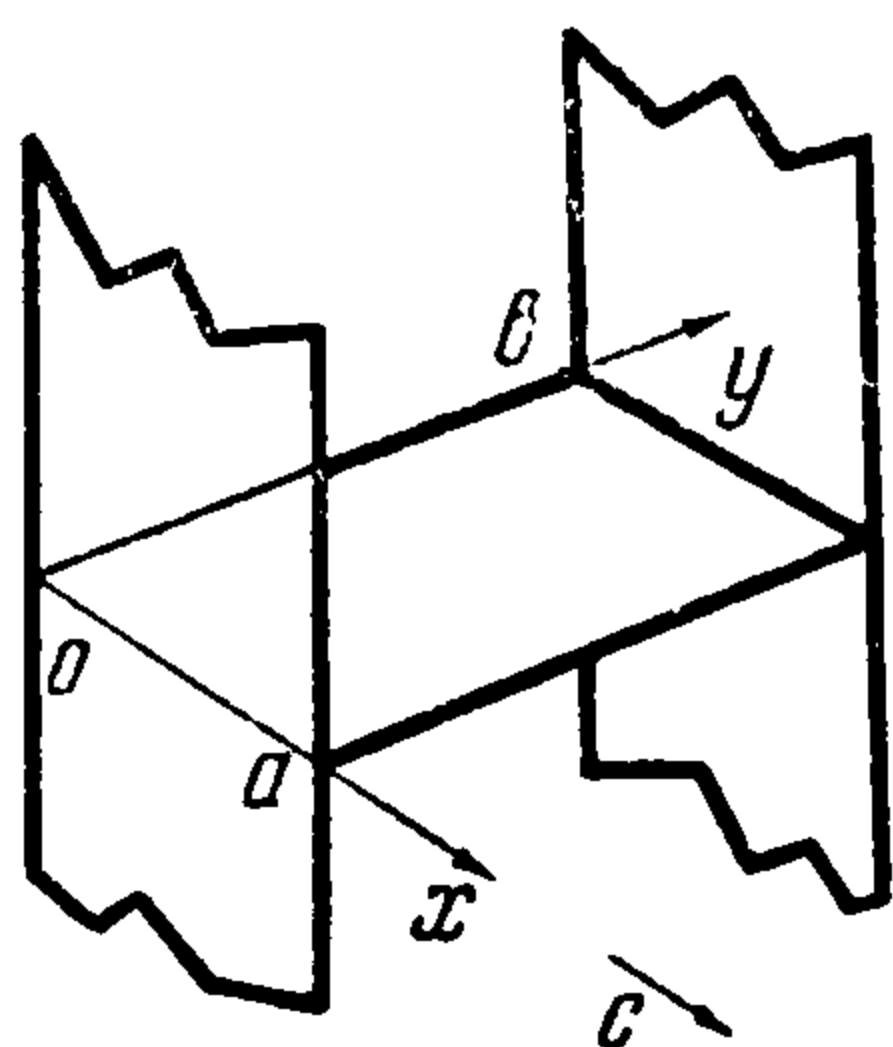
Поступила 4 II 1957

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛОПАТКИ, ДВИЖУЩЕЙСЯ В ГАЗЕ

А. А. Мовчан

(Москва)

В ливейной постановке исследуется устойчивость лопатки — тонкой прямоугольной пластинки постоянной толщины с двумя свободно опертыми и двумя свободными краями, движущейся в газе с большой сверхзвуковой скоростью в направлении от одного свободного края к другому. Избыточное давление газа учитывается приближенной формулой поршневой теории [1].



Фиг. 1

Как и в случае закрепленных по всему контуру панелей, у лопатки возможен флаттер. В отличие от панелей, дивергенция лопатки возможна при отсутствии сжимающих усилий и даже при ее растяжении, причем критическая скорость дивергенции существенно зависит от коэффициента Пуассона. Флаттер лопатки обусловлен резонансом и взаимодействием собственных движений, соответствующих различным формам изгиба хорды; задираание краев, связанное с изгибом хорды, оказывается определяющим и в явлении дивергенции. Таким

образом, основные результаты данной работы не могут быть получены применением изгибно-крутильной модели, не учитывающей изгиб хорды.

В рассматриваемой задаче точное определение критических скоростей флаттера и дивергенции требует определенного объема вычислений. Показано, что для оценки границ дофлаттерной области можно применять результаты, полученные ранее для