Собственные функции, соответствующие четырем бесконечным корням уравнения (3.6), имеют вид:

$$\varphi_4 + \varphi_5, \qquad \varphi_{10} - 2\varphi_7, \qquad \varphi_{11} + 2\varphi_8, \qquad \varphi_3 \tag{3.11}$$

Во всех этих случаях $v_z = 0$ — жидкость движется в параллельных горизонтальных плоскостях.

Первые четыре критических движения жидкости изображены схематически на фиг. 1. Зависимость критических чисел Релея от отношения коэффициентов теплопроводности жидкости и массива представлена на фиг. 2.

Замечание при корректуре. Как любезно сообщил нам В. С. Сорокин, в рассматриваемой задаче имеется группа решений, которые могут быть найдены точно. Эти решения выражаются через шаровые функции и имеют вид:

$$\mathbf{V} = c_{lm}(r)\, \mathbf{r} \times \nabla [P_l^{(m)}(\cos\vartheta) \sin m\varphi]$$

$$T = \theta_{lm}(r)\, P_l^{(m)}(\cos\vartheta) \cos m\varphi \qquad (m = 1, 2, \ldots;\ l \geqslant m)$$

Два из найденных нами решений, а именно (3.7) и (3.9), являются, очевидно, приближениями к точным решениям, соответствующим $m = 1,\ l = 1$ и $m = 2,\ l = 2$. Максимальное различие между точным приближенным значением критического числа Релея $k_1^{(0)}$ (определенного через градиент A_0, см. (3.3)), имеет место при $\alpha = 0$ и составляет 15%; при $\alpha = \infty$ различие составляет 1%. Решения (3.8) и (3.10) не соответствуют определенным значениям l и в отмеченную группу решений не входят.

Автор благодарен В. С. Сорокину и И. Г. Шапошникову за постоянный интерес к работе и важные замечания.

Поступила 9 XII 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Сорокин В. С. Вариационный метод в теории конвекции. ПММ, т. XVII, вып. 1, 1953.
2. Жуховицкий Е. М. Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости неравномерно нагретой жидкости. ПММ, т. XVIII, вып. 2, 1954.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО СЛУЧАЯ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ В БЕСКОНЕЧНОМ НАКЛОННОМ КРУГОВОМ ЦИЛИНДРЕ

Е. Х. Драхлин

(Пермь)

В задаче о стационарной тепловой конвекции в средней части длинного наклонного кругового цилиндра, содержащегося в бесконечном твердом массиве с постоянным в пространстве и во времени градиентом температуры на бесконечности, найдены точные решения для скорости и температуры в предположениях параллельности линий тока к оси цилиндра и отсутствия градиента температуры вдоль оси цилиндра.

Рассмотрим стационарную тепловую конвекцию в средней части достаточно длинного и тонкого цилиндра радиуса R. Ось z совпадает с осью цилиндра, ось y лежит в вертикальной плоскости, проходящей через ось цилиндра.

Градиент температуры массива на бесконечности $\mathbf{A}$ направлен перпендикулярно к оси цилиндра. Уравнения тепловой конвекции [1] в этом случае имеют вид:

$$\nu\triangle v_x = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial x_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \qquad \left(\bar{p} = \frac{I - I_0}{\rho}\right) \tag{1}$$

$$\nu\triangle v_y = \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} + \beta g_y T \tag{2}$$

$$\nu\triangle v_z = \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \beta g_z T \tag{3}$$

$$\chi\triangle T = v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \tag{4}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{5}$$

$$\triangle T_l = 0 \tag{6}$$

Здесь v_x, v_y, v_z означают компоненты гидродинамической скорости жидкости, g_x, g_y, g_z — компоненты ускорения силы тяжести, ν, χ, β — кинематический коэффициент вязкости, коэффициент температуропроводности и коэффициент теплового расширения жидкости при среднем значении температуры жидкости $T = T_0$ по полости, T — отклонение температуры жидкости от упомянутого выше среднего значения T_0 температуры, p — давление в жидкости, p_0 — значение p в равновесии при $T = T_0$ и ρ — плотность жидкости при $T = T_0$.

В соответствии с постановкой задачи граничные условия имеют вид:

$$(T)_{\rho=R} = (T_l)_{\rho=R}, \qquad \varkappa\left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_{\rho=R} = \varkappa_l\left(\frac{\partial T_l}{\partial \rho}\right)_{\rho=R}, \qquad (\mathbf{v})_{\rho=R} = 0 \tag{7}$$

Покажем, что система (1) — (6) с граничными условиями (7) имеет решение, обладающее свойствами

$$v_x = v_y = 0, \qquad \partial T / \partial z = 0 \tag{8}$$

С учетом (8) система (1)—(6) приведется к виду

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = -\beta g_y T, \qquad \nu\triangle v_z = \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \beta g_z T \tag{9}$$

$$\triangle T = 0, \qquad \triangle T_l = 0, \qquad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{10}$$

Из первого уравнения (9) видно, что $\bar{p}$ не зависит от x; из этого и второго уравнений (9) следует, что T есть функция одного лишь y. Таким образом, для решения, обладающего свойствами (8), имеем $T = T(y)$. В соответствии с этим для температуры ищем решение в виде

$$T = B\rho \sin \varphi, \qquad T_l = B_1 \frac{1}{\rho} \sin \varphi + A_y \rho \sin \varphi \tag{11}$$

где A_y — заданная постоянная.

Пользуясь граничными условиями (7), находим

$$T = \frac{2\varkappa_l}{\varkappa_l + \varkappa} A_y \rho \sin \varphi, \qquad T_l = R^2 \frac{\varkappa_l - \varkappa}{\varkappa_l + \varkappa} A_y \frac{1}{\rho} \sin \varphi + A_y \rho \sin \varphi \tag{12}$$

Из последней формулы видно, что температура массива на бесконечности зависит только от y.

Исключив далее $\bar{p}$ из второго и третьего уравнений (9), получим

$$\frac{\partial}{\partial y} \triangle v_z = \frac{\beta g_z}{\nu} \frac{\partial T}{\partial y} \tag{13}$$

Или, пользуясь первым уравнением (12), уравнение (13) приведем к виду

$$\frac{\partial}{\partial y}\triangle v_z = \frac{B\beta g_z}{\nu} \qquad \left(B = \frac{2\varkappa_l}{\varkappa_l + \varkappa} A_y\right) \tag{14}$$

Частное решение уравнения (14) будем искать в виде $v_{z1} = Ny^3$; подставляя это в уравнение (14), находим

$$N = \frac{B\beta g_z}{6v} = \frac{\varkappa_l \beta g_z A_y}{3\nu(\varkappa_l + \varkappa)} \tag{15}$$

Частное решение $v_{z1} = Ny^3$ в полярных координатах можно представить в виде

$$v_{z1} = \frac{3}{4} N\rho^3 \sin\varphi - \frac{1}{4} N\rho^3 \sin 3\varphi \tag{16}$$

Решением соответствующего уравнению (14) однородного уравнения, как легко проверить, будет

$$v_{z2} = M\rho \sin\varphi + \frac{1}{4} N\rho^3 \sin 3\varphi \tag{17}$$

Решение уравнения (14) будет суммой решений (16) и (17). Из граничных условий (7) при помощи (16) и (17) находим

$$\frac{3}{4} NR^3 + MR = 0 \quad \text{или} \quad M = -\frac{3}{4} NR^2 = -\frac{\varkappa_l \beta g_z A_y R^2}{4\nu(\varkappa_l + \varkappa)} \tag{18}$$

Само решение уравнения (14) получим в виде

$$v_z = \frac{\varkappa_l \beta g_z A_y}{4\nu(\varkappa_l + \varkappa)} (\rho^2 - R^2)\rho \sin\varphi \tag{19}$$

Из (19) следует, что в случае горизонтального цилиндра, когда согласно второй формуле (12) градиент температуры массива на бесконечности делается вертикальным, решение со свойствами (8) возможно только при $\nu = 0$, что соответствует покою жидкости в цилиндре.

Для вертикального цилиндра решение задачи соответствует случаю подогрева сбоку, рассмотренного Г. А. Остроумовым [2].

Поступила 24 IV 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л., Лифшиц Е. Механика сплошных сред. ОГИЗ, 1944.
2. Остроумов Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. ОГИЗ, 1952.