

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТОЙ ЖИДКОСТИ
В ШАРОВОЙ ПОЛОСТИ

Е. М. Жуковичкий

(Пермь)

Рассматривается задача об устойчивости неравномерно нагретой жидкости, заполняющей шаровую полость в твердом массиве, подогреваемом снизу. Задача решается приближенно методом Б. Г. Галеркина.

§ 1. Основные уравнения. Известно, что если в покоящейся и подогреваемой снизу жидкости вертикальный градиент температуры превосходит первый критический, то механическое равновесие оказывается неустойчивым (подробное исследование вопроса об устойчивости см. в работе [1]). Приняв за единицу длины радиус шара R , а за единицы температуры, скорости и давления соответственно AR , χ/R , $\rho\nu\chi/R^2$, получим безразмерные уравнения для возмущений:

$$-\nabla p + \Delta \mathbf{v} - kT\gamma = 0 \quad \left(k = PG = \frac{g\beta AR^4}{\nu\chi} \right) \quad (1.1)$$

$$\Delta T = \mathbf{v}\nabla T_0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \Delta T_m = 0 \quad (1.2)$$

Здесь k — произведение чисел Прандтля P и Грассхофа G (число Релея), \mathbf{v} — скорость жидкости, ν , χ , β — коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности и теплового расширения соответственно, γ — единичный вектор, направленный вдоль ускорения силы тяжести g , T — температура жидкости, T_m — температура массива, ρ — плотность жидкости, A — градиент температуры, p — давление, T_0 — температура в жидкости в состоянии механического равновесия.

Уравнения (1.1) и (1.2) нужно решать при следующих условиях: на границе полости

$$\mathbf{v} = 0, \quad T = T_m, \quad x \frac{\partial T}{\partial n} = x_m \frac{\partial T_m}{\partial n}$$

в массиве на бесконечности $T_m \rightarrow 0$.

Система (1.1) — (1.2) определяет критические значения числа Релея (и, следовательно, критические градиенты температуры) и соответствующие им критические движения жидкости.

В работе [2] показано, что для решения системы (1.1) — (1.2) может быть применен метод Б. Г. Галеркина. Для этого нужно представить скорость в виде отрезка ряда

$$\mathbf{v} = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_n\varphi_n \quad (1.3)$$

Каждая функция φ_i должна удовлетворять граничному условию для скорости и уравнению непрерывности. Подставив (1.3) в первое из уравнений (1.2), решаем его вместе с уравнением для температуры в массиве T_m при соответствующих граничных условиях. Затем подставляем \mathbf{v} и T в (1.1), умножаем скалярно на каждую функцию φ_i и интегрируем по объему жидкости, что приводит к системе уравнений метода Галеркина

$$\int \varphi_i \Delta \mathbf{v} dV - k \int \varphi_i \gamma T dV = 0 \quad (1.4)$$

§ 2. Выбор системы функций φ_i . Будем строить систему функций φ_i , обращающихся в нуль на стенках шара и удовлетворяющих уравнению непрерывности, при помощи полиномов в декартовых координатах. Пусть

$$\begin{aligned} v_x &= (1-r^2) \sum_{m,n,p} a_{mnp} x^m y^n z^p \\ v_y &= (1-r^2) \sum_{m,n,p} b_{mnp} x^m y^n z^p \\ v_z &= (1-r^2) \sum_{m,n,p} c_{mnp} x^m y^n z^p \end{aligned} \quad (2.1)$$

Подставим (2.1) в уравнение непрерывности и соберем коэффициенты при одинаковых степенях x, y, z (при этом, разумеется, нужно везде, где необходимо, изменять значки суммирования). Мы получим уравнения, связывающие коэффициенты a, b, c :

$$\begin{aligned} &(1+m)[a_{m-1,n,p} - a_{m+1,n,p} + a_{m+1,n-2,p} + a_{m+1,n,p-2}] + \\ &+ (1+n)[b_{m,n-1,p} - b_{m,n+1,p} + b_{m-2,n+1,p} + b_{m,n+1,p-2}] + \\ &+ (1+p)[c_{m,n,p-1} - c_{m,n,p+1} + c_{m-2,n,p+1} + c_{m,n-2,p+1}] = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ограничимся вначале рассмотрением полиномов четвертой степени ($m+n+p \leq 2$). В этом случае проекции скорости (2.1) будут содержать 30 коэффициентов. Придавая разные значения индексам m, n, p в (2.2), получим систему уравнений, связывающих введенные коэффициенты. При этом коэффициенты с отрицательными индексами, и с индексами сумма которых $m+n+p > 2$, должны считаться равными нулю. Из полученной системы следует, что

$$a_{100} = b_{010} = c_{001} = 0$$

остающиеся 27 коэффициентов оказываются связанными 16 простыми соотношениями. Имеется, таким образом, 11 независимых коэффициентов. Приняв какие-нибудь 11 величин за независимые, выражаем остальные через них и подставляем в (2.1). При этом (2.1) распадается на 11 линейно независимых функций, каждая из которых удовлетворяет граничному условию для скорости и уравнению непрерывности.

В результате получаем¹

$$\mathbf{v} = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots + c_{11} \varphi_{11} \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \begin{cases} 0 \\ -(1-r^2)z \\ (1-r^2)y \end{cases} & \varphi_5 &= \begin{cases} (1-r^2)yz \\ 0 \\ -(1-r^2)xy \end{cases} & \varphi_8 &= \begin{cases} (1-r^2)xy \\ (1-r^2)(z^2-x^2) \\ -(1-r^2)yz \end{cases} \\ \varphi_2 &= \begin{cases} (1-r^2)z \\ 0 \\ -(1-r^2)x \end{cases} & \varphi_6 &= \begin{cases} -(1-r^2)xz \\ (1-r^2)yz \\ (1-r^2)(x^2-y^2) \end{cases} & \varphi_9 &= \begin{cases} 2(1-r^2)xz \\ 2(1-r^2)yz \\ (1-r^2)[1-3(x^2+y^2)-z^2] \end{cases} \\ \varphi_3 &= \begin{cases} -(1-r^2)y \\ (1-r^2)x \\ 0 \end{cases} & \varphi_7 &= \begin{cases} (1-r^2)(y^2-z^2) \\ -(1-r^2)xy \\ (1-r^2)xz \end{cases} & \varphi_{10} &= \begin{cases} (1-r^2)[1-3(y^2+z^2)-x^2] \\ 2(1-r^2)xy \\ 2(1-r^2)xz \end{cases} \\ \varphi_4 &= \begin{cases} 0 \\ -(1-r^2)xz \\ (1-r^2)xy \end{cases} & & & \varphi_{11} &= \begin{cases} 2(1-r^2)xy \\ (1-r^2)[1-3(x^2+z^2)-y^2] \\ 2(1-r^2)yz \end{cases} \end{aligned}$$

Следует заметить, что если принять за независимые коэффициенты другие 11 величин, получим иную систему. Она, однако, будет эквивалентна системе (2.3), так как все функции этой новой системы окажутся линейными комбинациями функций (2.3). Каждая функция φ_i изображает определенное движение несжимаемой жидкости в шаровой полости. Критические движения жидкости будут складываться из этих движений.

¹ Может показаться, что в системе (2.3) не хватает функции $-(1-r^2)yz$, $(1-r^2)xz$, 0. Она, однако, может быть получена как $-(\varphi_4 + \varphi_5)$.

§ 3. Решение. 1. Перейдем к решению уравнения теплопроводности. Для нахождения равновесной температуры в жидкости T_0 , входящей в первое из уравнений (1.2), необходимо решить уравнения $\Delta T_0 = 0$ и $\Delta T_{0M} = 0$ при следующих граничных условиях: на стенках шара температура и тепловой поток непрерывны; в массиве на бесконечности градиент температуры направлен вертикально вниз и равен A . Исходя из общего выражения для гармонической функции в сферических координатах r, ϑ, φ ,

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \left[\left(a_{lm} r^l + \frac{b_{lm}}{r^{l+1}} \right) \cos m\varphi + \left(c_{lm} r^l + \frac{d_{lm}}{r^{l+1}} \right) \sin m\varphi \right] P_l^{(m)}(\cos \vartheta) \quad (3.1)$$

(здесь $P_l^{(m)}(\cos \vartheta)$ — присоединенные полиномы Лежандра), получим

$$T_0 = -\frac{3}{2+\alpha} z \quad \left(\alpha = \frac{x}{x_M}, \quad z = r \cos \vartheta = r P_1^{(0)} \right) \quad (3.2)$$

(оси x, y расположены в горизонтальной плоскости, ось z направлена вертикально вверх). Из (3.2) следует, что постоянный в покоящейся жидкости вертикальный градиент температуры A_0 связан с заданным в массиве на бесконечности градиентом A

$$A_0 = \frac{3}{2+\alpha} A \quad (3.3)$$

2. После подстановки (2.3) и (3.2) в первое из уравнений (1.2) получим уравнение для возмущения температуры в жидкости T . Для возмущения температуры в массиве T_M будем иметь из (3.1), учитывая, что на бесконечности $T_M \rightarrow 0$:

$$T_M = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} r^{-l-1} (a'_{lm} \cos m\varphi + b'_{lm} \sin m\varphi) P_l^{(m)}(\cos \vartheta) \quad (3.4)$$

Написав общее решение уравнения для T и определив входящие в него постоянные интегрирования из граничных условий, получим

$$\begin{aligned} T = & \frac{3}{2+\alpha} \left\{ c_9 \left[\left(\frac{1}{18} - \frac{1}{6} r^2 + \frac{1}{6} r^4 - \frac{1}{18} r^6 \right) + \left(ar^2 - \frac{2}{21} r^4 + \frac{1}{27} r^6 \right) P_2^{(0)} \right] + \right. \\ & + \left[c_1 \left(br - \frac{1}{10} r^3 + \frac{1}{28} r^5 \right) P_1^{(1)} + (2c_{11} - c_8) \left(\frac{1}{4} ar^2 - \frac{1}{42} r^4 + \frac{1}{108} r^6 \right) P_2^{(1)} \right] \sin \varphi + \\ & + \left[c_2 \left(-br + \frac{1}{10} r^3 - \frac{1}{28} r^5 \right) P_1^{(1)} + (2c_{10} + c_7) \left(\frac{1}{4} ar^2 - \frac{1}{42} r^4 + \frac{1}{108} r^6 \right) P_2^{(1)} \right] \cos \varphi + \\ & + (c_4 - c_5) \left[\frac{1}{8} ar^2 - \frac{1}{84} r^4 + \frac{1}{216} r^6 \right] P_2^{(2)} \sin 2\varphi + \\ & \left. + c_6 \left[\frac{1}{4} ar^2 - \frac{1}{42} r^4 + \frac{1}{108} r^6 \right] P_2^{(2)} \cos 2\varphi \right\} \end{aligned}$$

где

$$a = \frac{11+10\alpha}{63(3+2\alpha)}, \quad b = \frac{18+17\alpha}{140(2+\alpha)} \quad (3.5)$$

Выражение для T_M здесь не приводится.

3. Приближенное выражение для скорости (2.3) и соответствующее значение температуры (3.5) позволяют составить систему (1.4). Условие разрешимости этой однородной системы — равенство нулю определителя одиннадцатого порядка:

$$| a_{ik} | = 0 \quad (3.6)$$

где

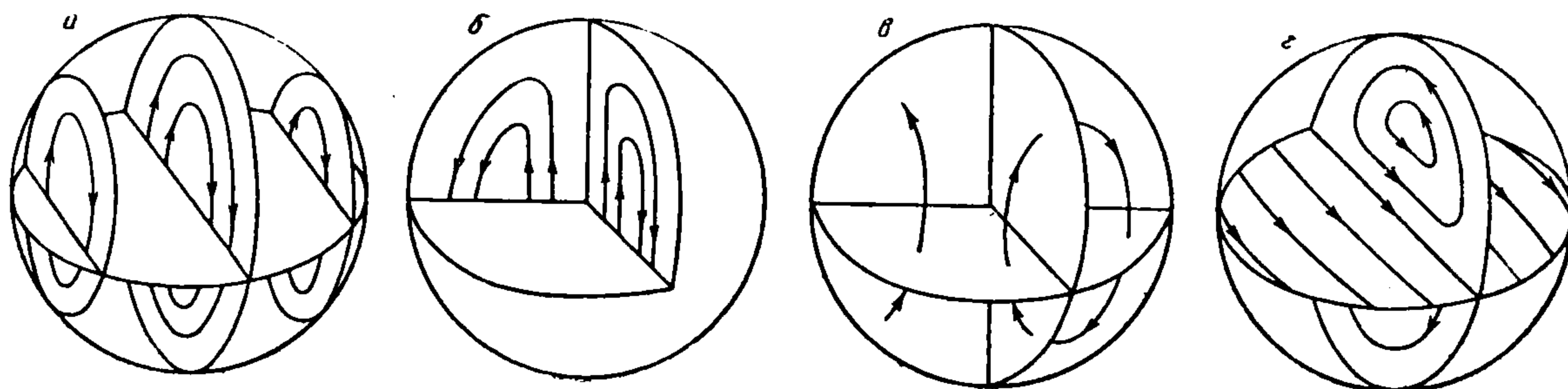
$$\begin{aligned} a_{11} = a_{22} = & 1 - \frac{37+68\alpha}{5775(2+\alpha)^2} k, & a_{99} = & 1 - \frac{2(425+331\alpha)}{105 \cdot 105 (3+2\alpha)(2+\alpha)} k \\ a_{33} = & \frac{1}{k}, & a_{44} = a_{55} = & 1 - ck, & a_{45} = a_{54} = & -\frac{1}{2} + ck \\ a_{66} = & 1 - \frac{4}{3} ck, & a_{77} = a_{88} = & 3 - ck, & a_{7,10} = a_{10,7} = & -2ck \\ a_{8,11} = & a_{11,8} = 2ck, & a_{10,10} = & a_{11,11} = 20 - 4ck \end{aligned}$$

Здесь

$$c = \frac{47+79\alpha}{14014(3+2\alpha)(2+\alpha)}$$

Остальные элементы определителя равны нулю.

Уравнение (3.6) имеет семь конечных вещественных корней k (три двукратных и один простой, т. е. всего четыре различных корня). Кроме того, имеются четыре бесконечных корня.



Фиг. 1

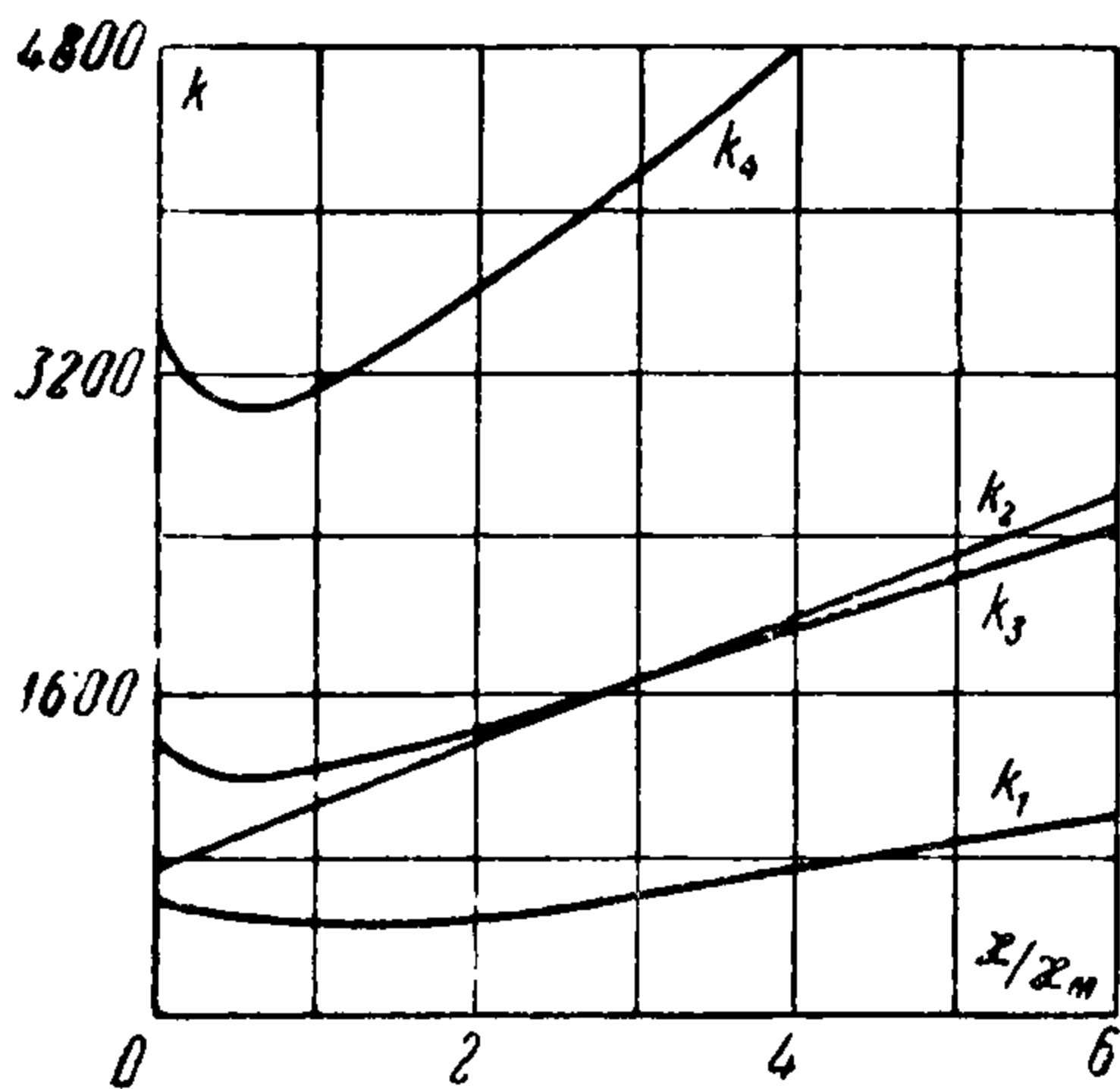
Первое собственное значение k_1 (корни занумерованы в порядке их возрастания при $\alpha=0$) и соответствующие собственные функции будут

$$k_1 = \frac{5775(2+\alpha)^2}{37+68\alpha}, \quad \begin{aligned} v_1 &= \text{const } \varphi_1 \\ v_1' &= \text{const } \varphi_2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Функции v_1 и v_1' изображают движение жидкости по плоским круговым траекториям, лежащим в параллельных вертикальных плоскостях (фиг. 1, а). В первом случае жидкость движется параллельно координатной плоскости yz , во втором случае параллельно плоскости xz .

Движение жидкости по окружностям, расположенным в параллельных вертикальных плоскостях произвольной ориентации, может быть описано линейной комбинацией функций v_1 и v_1' .

Все такие движения соответствуют одному и тому же числу Рейля; ориентация в пространстве вертикальной плоскости, параллельно которой движутся при возникновении конвекции частицы жидкости, определяется случайными причинами.



Фиг. 2

Второе собственное значение v_2 и соответствующая собственная функция будут

$$k_2 = \frac{105105(3+2\alpha)(2+\alpha)}{2(425+331\alpha)}, \quad v_2 = \text{const } \varphi_3 \quad (3.8)$$

Функция v_2 изображает движение жидкости, симметричное относительно оси z , — жидкость поднимается вертикальным потоком вдоль оси z и опускается по стенкам шаровой полости или наоборот (фиг. 1, б).

Третье собственное значение k_3 и соответствующая собственная функция будут

$$k_3 = \frac{21021(3+2\alpha)(2+\alpha)^2}{2(47+79\alpha)}, \quad \begin{aligned} v_3 &= \text{const } (\varphi_4 - \varphi_5) \\ v_3' &= \text{const } \varphi_6 \end{aligned} \quad (3.9)$$

В этом случае жидкость в двух противолежащих вертикальных четвертях шара поднимается и изливается в смежные четверти; функция v_3' изображает такое же движение, повернутое относительно оси z на 45° (фиг. 1, в).

Четвертое собственное значение и собственная функция

$$k_4 = \frac{105105(3+2\alpha)(2+\alpha)}{4(47+79\alpha)}, \quad \begin{aligned} v_4 &= \text{const } (10\varphi_7 + 3\varphi_{10}) \\ v_4' &= \text{const } (-10\varphi_8 + 3\varphi_{11}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

В случае функции v_4 поток жидкости течет в горизонтальной плоскости xy вдоль оси x и растекается по верхней и нижней полусферам. Вторая функция v_4' изображает такое же движение, повернутое относительно оси z на 90° (фиг. 1, г).

Собственные функции, соответствующие четырем бесконечным корням уравнения (3.6), имеют вид:

$$\varphi_4 + \varphi_5, \quad \varphi_{10} - 2\varphi_7, \quad \varphi_{11} + 2\varphi_8, \quad \varphi_3 \quad (3.11)$$

Во всех этих случаях $v_z = 0$ — жидкость движется в параллельных горизонтальных плоскостях.

Первые четыре критических движения жидкости изображены схематически на фиг. 1. Зависимость критических чисел Релея от отношения коэффициентов теплопроводности жидкости и массива представлена на фиг. 2.

Замечание при корректуре. Как любезно сообщил нам В. С. Сорокин, в рассматриваемой задаче имеется группа решений, которые могут быть найдены точно. Эти решения выражаются через шаровые функции и имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= c_{lm}(r) \mathbf{r} \times \nabla [P_l^{(m)}(\cos \vartheta) \sin m\varphi] \\ T &= \theta_{lm}(r) P_l^{(m)}(\cos \vartheta) \cos m\varphi \quad (m = 1, 2, \dots; l \geq m) \end{aligned}$$

Два из найденных нами решений, а именно (3.7) и (3.9), являются, очевидно, приближениями к точным решениям, соответствующим $m = 1, l = 1$ и $m = 2, l = 2$. Максимальное различие между точным приближенным значением критического числа Релея $k_1^{(0)}$ (определенного через градиент A_0 , см. (3.3)), имеет место при $\alpha = 0$ и составляет 15%; при $\alpha = \infty$ различие составляет 1%. Решения (3.8) и (3.10) не соответствуют определенным значениям l и в отмеченную группу решений не входят.

Автор благодарен В. С. Сорокину и И. Г. Шапошникову за постоянный интерес к работе и важные замечания.

Поступила 9 XII 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Сорокин В. С. Вариационный метод в теории конвекции. ПММ, т. XVII, вып. 1, 1953.
2. Жуховицкий Е. М. Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости неравномерно нагретой жидкости. ПММ, т. XVIII, вып. 2, 1954.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО СЛУЧАЯ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОЙ КОНВЕКЦИИ В БЕСКОНЕЧНОМ НАКЛОННОМ КРУГОВОМ ЦИЛИНДРЕ

Е. Х. Драглин

(Пермь)

В задаче о стационарной тепловой конвекции в средней части длинного наклонного кругового цилиндра, содержащегося в бесконечном твердом массиве с постоянным в пространстве и во времени градиентом температуры на бесконечности, найдены точные решения для скорости и температуры в предположениях параллельности линий тока к оси цилиндра и отсутствия градиента температуры вдоль оси цилиндра.

Рассмотрим стационарную тепловую конвекцию в средней части достаточно длинного и тонкого цилиндра радиуса R . Ось z совпадает с осью цилиндра, ось y лежит в вертикальной плоскости, проходящей через ось цилиндра.

Градиент температуры массива на бесконечности A направлен перпендикулярно к оси цилиндра. Уравнения тепловой конвекции^[1] в этом случае имеют