Прикладная математика и механика, Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ПОЛИНОМЫ ДЛЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

А. П. Филин

(Ленинград)

В настоящей статье предлагаются две формы изображения интерполяционных полиномов для функций нескольких переменных, позволяющие обеспечить вычисления раз навсегда найденными коэффициентами, сведенными в таблицы. Имеется в виду, что по каждой из переменных отрезок интерполяции разбит на равные участки. Для отыскания отмеченных выше коэффициентов приходится пользоваться коэффициентами, вычисленными применительно к интерполяционному полиному для функции одной переменной. В связи с этим первый параграф статьи посвящен интерполяционным полиномам для функций одной переменной.

§ 1. Будем исходить из интерполяционного полинома в форме Лагранжа. Известно, что интерполяционный полином Лагранжа для функции одной переменной имеет следующий вид

$$P^{(m)}(\xi) = L_0^{(m)}(\xi)\,\Phi_0 + L_1^{(m)}(\xi)\,\Phi_1 + \ldots + L_m^{(m)}(\xi)\,\Phi_m \tag{1.1}$$

Здесь $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_m$ — значения интерполируемой функции в узлах интерполяции, а $L_0^{(m)}(\xi)$, $L_1^{(m)}(\xi), \ldots, L_m^{(m)}(\xi)$ — функциональные интерполяционные коэффициенты Лагранжа, которые представляют собой алгебраические полиномы степени m относительной переменной ξ.

Рассмотрим интерполяционный полином и в иной форме:

$$P^{(m)}(\xi) = K_0^{(m)} + K_1^{(m)}\xi + K_2^{(m)}\xi^2 + \ldots + K_m^{(m)}\xi^m \tag{1.2}$$

Здесь же отметим, что изображение интерполяционного полинома в форме (1.1) в ряде случаев таит в себе большие неудобства. К числу таких случаев относится применение интерполяционного полинома для приближенного изображения функции, с которой предполагаются те или иные операции (дифференцирование, интегрирование и т. п.). В этих случаях изображение интерполяционного полинома в форме (1.2) значительно удобнее.

В настоящем параграфе дано разложение функциональных интерполяционных коэффициентов Лагранжа по степеням ξ при равных промежутках и показана связь этого разложения с представлением интерполяционного полинома в форме (1.2). Не приводя всех выкладок, укажем, что решение поставленной задачи применительно к отрезку интерполяции [0,1] было осуществлено путем решения системы линейных алгебраических уравнений

$$K_0^{(m)} + K_1^{(m)}\frac{k}{m} + K_2^{(m)}\left(\frac{k}{m}\right)^2 + \ldots + K_m^{(m)}\left(\frac{k}{m}\right)^m = 0 \tag{1.3}$$
$$(k = 0, 1, \ldots, m)$$

При решении этой системы пришлось разложить два определителя, из коих первый типа Вандермонда. Ниже показаны упомянутые определители и формулы их разложения [1]:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{m} & \ldots & \left(\frac{1}{m}\right)^m \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \left(\frac{m}{m}\right) & \ldots & \left(\frac{m}{m}\right)^m \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{m(m+1)}{2}} 1!\,2!\ldots m! \tag{1.4}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{m} & \ldots & \left(\frac{1}{m}\right)^{i-1} & \left(\frac{1}{m}\right)^{i+1} & \ldots & \left(\frac{1}{m}\right)^m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{j-1}{m} & \ldots & \left(\frac{j-1}{m}\right)^{i-1} & \left(\frac{j-1}{m}\right)^{i+1} & \ldots & \left(\frac{j-1}{m}\right)^m \\ \frac{j+1}{m} & \ldots & \left(\frac{j+1}{m}\right)^{i-1} & \left(\frac{j+1}{m}\right)^{i+1} & \ldots & \left(\frac{j+1}{m}\right)^m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{m}{m} & \ldots & \left(\frac{m}{m}\right)^{i-1} & \left(\frac{m}{m}\right)^{i+1} & \ldots & \left(\frac{m}{m}\right)^m \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{m(m+1)}{2}-i} (-1)^{i+j} \frac{1!\,2!\ldots m!}{j!\,(m-j)!} N_{ij}^{(m)} \tag{1.5}$$

Здесь

$$N_{ij}^{(m)} = \sum_{k=0}^{m-j} k!\, C_{(m-j)}^{(k)} S_{(m-k-i)}^{(m-k)} \tag{1.6}$$

$C_{(m-j)}^{(k)}$ — число сочетаний из $m-j$ элементов по k, $S_{(m-k-i)}^{(m-k)}$ — число Стирлинга. При этом имеется в виду, что в случае отрицательного нижнего индекса у числа Стирлинга последнее равняется нулю.

Числа $N_{ij}^{(m)}$ образуют особую систему чисел, из которой числа Стирлинга оказываются частным случаем ($j = m$).

В качестве примера в табл. 1 приведены числа $N_{ij}^{(m)}$ при $m = 1, 2, 3$ и 4.

Числа $N_{ij}^{(m)}$ подчинены ряду закономерностей, в частности, в каждом столбце (кроме $j = 1$) сумма $N_{ij}^{(m)}$ с четными i равна сумме $N_{ij}^{(m)}$ с нечетными i. В первом столбце ($j = 1$) сумма $N_{ij}^{(m)}$ с нечетными i превышает сумму $N_{ij}^{(m)}$ с четными i на $(m-1)$!. При $i = m - s$ имеются разности $(s-1)$-го порядка, отличные от нуля, разности порядка s равны нулю. Закономерности, которым подчиняются неравные нулю разности, ясны из формулы (1.6).

Не приводя промежуточных выкладок, укажем, что как в функциональных коэффициентах Лагранжа, представляющих собой линейные комбинации функций ξ^r ($r = 0, 1, \ldots, m$), так и в коэффициентах $K_r^{(m)}$, представляющих собой линейные комбинации величин $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_m$, содержатся в качестве коэффициентов элементы одной и той же матрицы.

Указанная матрица имеет следующий вид:

[1] Вывод формулы (1.4) см. в работе [1], там же дано разложение определителя (1.5) в рекуррентной форме.

Таблица 1

$m = 1$

$i \backslash j$	1
1	1

$m = 2$

$i \backslash j$	1	2
1	2	1
2	1	1

$m = 3$

$i \backslash j$	1	2	3
1	6	3	2
2	5	4	3
3	1	1	1

$m = 4$

$i \backslash j$	1	2	3	4
1	24	12	8	6
2	26	19	14	11
3	9	8	7	6
4	1	1	1	1

$$\left\| \begin{array}{c|cccc} \beta_{00}^{(m)} & \beta_{01}^{(m)} & \beta_{02}^{(m)} & \ldots & \beta_{0m}^{(m)} \\ \hline \beta_{10}^{(m)} & \beta_{11}^{(m)} & \beta_{12}^{(m)} & \ldots & \beta_{1m}^{(m)} \\ \beta_{20}^{(m)} & \beta_{21}^{(m)} & \beta_{22}^{(m)} & \ldots & \beta_{2m}^{(m)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{m0}^{(m)} & \beta_{m1}^{(m)} & \beta_{m2}^{(m)} & \ldots & \beta_{mm}^{(m)} \end{array} \right\| \tag{1.7}$$

Здесь

$$\begin{gathered} \beta_{00}^{(m)} = 1, \quad \beta_{0j}^{(m)} = 0 \quad (j = 1, \ldots, m) \\ \beta_{i0}^{(m)} = -\sum_{j=1}^{m} \Delta_{ij}^{(m)} \quad (i = 1, \ldots, m) \\ \beta_{ij}^{(m)} = \Delta_{ij}^{(m)} \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, m) \end{gathered} \tag{1.8}$$

При этом

$$\Delta_{ij}^{(m)} = \frac{(-1)^{i+j} m^i}{j!\,(m-j)!} N_{ij}^{(m)} \tag{1.9}$$

В качестве примера приводим матрицы (1.7) для $m = 1, 2, 3$ и 4:

Таблица 2

$m = 1$

$$\left\| \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline -1 & 1 \end{array} \right\|$$

$m = 2$

$$\left\| \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{array} \right\|$$

$m = 3$

$$\left\| \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -5.5 & 9 & -4{,}5 & 1 \\ 9 & -22.5 & 18 & -4.5 \\ -4.5 & 13.5 & -13.5 & 4.5 \end{array} \right\|$$

$m = 4$

$$\left\| \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{-25}{3} & 16 & -12 & \frac{16}{3} & -1 \\ \frac{70}{3} & \frac{-208}{3} & 76 & \frac{-112}{3} & \frac{22}{3} \\ \frac{-80}{3} & 96 & -128 & \frac{224}{3} & -16 \\ \frac{32}{3} & \frac{-128}{3} & 64 & \frac{-128}{3} & \frac{32}{3} \end{array} \right\|$$

Нижний правый участок матрицы, отделенный пунктиром, представляет собой величины $\Delta_{ij}^{(m)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, m)$.

Образование функциональных интерполяционных коэффициентов Лагранжа подчинено формуле

$$L_k^{(m)}(\xi) = \beta_{0k}^{(m)} + \beta_{1k}^{(m)}\xi + \beta_{2k}^{(m)}\xi^2 + \ldots + \beta_{mk}^{(m)}\xi^m \tag{1.10}$$

а коэффициентов $K_k^{(m)}$ — формуле [1]

$$K_k^{(m)} = \beta_{k0}^{(m)}\Phi_0 + \beta_{k1}^{(m)}\Phi_1 + \beta_{k2}^{(m)}\Phi_2 + \ldots + \beta_{km}^{(m)}\Phi_m \tag{1.11}$$

[1] Числа $N_{ij}^{(m)}$ и матрицы (1.7) нами составлены до $m = 20$. Соответствующие таблицы предполагается опубликовать в сборнике трудов Ленинградского института инженеров железнодорожного транспорта.

В процессе составления указанных таблиц при отыскании чисел $\Delta_{ij}^{(m)}$, кроме формулы (1.9), были использованы и приводимые ниже, ранее нами выведенные рекуррентные формулы

$$\Delta_{1j}^{(m)} = \frac{(-1)^{1+j} m C_m^{\ j}}{j} \tag{1.12}$$

$$\Delta_{ij}^{(m)} = \frac{(-1)^{i-1}}{j^{i-1}} \Delta_{1j} \sum_{\alpha_1=1}^{m} \frac{1}{\alpha_1^{i-2}} \Delta_{1\alpha_1}^{(m)} (j-\alpha_1) \sum_{\alpha_2=1}^{m} \frac{1}{\alpha_2^{i-3}} \times$$
$$\times \Delta_{1\alpha_2}^{(m)} (j-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2) \sum_{\alpha_3=1}^{m} \frac{1}{\alpha_3^{i-4}} \Delta_{1\alpha_3}^{(m)} (j-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_3)\ldots$$
$$\ldots \sum_{\alpha_{i-1}=1}^{m} \frac{1}{\alpha_{i-1}^{i-i}} \Delta_{1\alpha_{i-1}}^{(m)} (j-\alpha_{i-1})(\alpha_1-\alpha_{i-1})(\alpha_2-\alpha_{i-1})\ldots$$
$$\ldots(\alpha_{i-2}-\alpha_{i-1}) \qquad (i=2,\ldots,m) \tag{1.13}$$

Формула (1.13) удобна при m достаточно больших и i, близких к единице. В других случаях меньший объем вычислений получается при использовании формулы (1.9).

Так, например, при $i=2$ формула (1.13) имеет вид:

$$\Delta_{2j}^{(m)} = \frac{(-1)^1}{j} \Delta_{1j}^{(m)} [\Delta_{11}^{(m)}(j-1) + \Delta_{12}^{(m)}(j-2) + \ldots + \Delta_{1m}^{(m)}(j-m)]$$

В заключение параграфа отметим наличие интерполяционной формулы, аналогичной формуле (1.2). Имеется в виду интерполяционная формула А. А. Маркова

$$P^{(m)}(\xi) = \Phi_0 + \sum_{k=1}^{m} \Big(\sum_{i=k}^{m} C_{ki} \Delta^i P(0) \Big) \xi^k \tag{1.14}$$

Отличие формулы (1.2) с учетом формулы (1.11) от формулы (1.14) состоит в том, что в формуле (1.2) коэффициенты $K_k^{(m)}$ представляют собой простую линейную комбинацию заданных значений функции (1.11). В формуле же (1.14) выражение, стоящее в круглых скобках, представляющее собой по сути дела тот же коэффициент $K_k^{(m)}$, находится как линейная комбинация разностей разного порядка заданных значений функции, или, иными словами, как линейная комбинация некоторых линейных комбинаций заданных значений функций следующего типа:

$$\Phi_0, \quad \Phi_1-\Phi_0, \quad \Phi_2-2\Phi_1+\Phi_0, \quad \Phi_3-3\Phi_2+3\Phi_1-\Phi_0, \ldots$$

Совершенно очевидна бóльшая простота формулы (1.2), нежели формулы (1.14). Укажем, что применительно к формуле (1.14) значения чисел C_{ki} (до $m=20$) приведены в книге В. Н. Фаддеевой [2]. Несколько ранее аналогичные числа (числа A_ν до $m=20$) привел в своей работе Ш. Е. Микеладзе [3], который применительно к принятым у нас обозначениям представил интерполяционный полином А. А. Маркова в следующей форме:

$$P(\xi) = \Phi_0 + \frac{\xi}{1!} P'(0) + \frac{\xi^2}{2!} P''(0) + \ldots + \frac{\xi^m}{m!} P^{(m)}(0)$$

$$P^{(k)}(0) = \sum_{\nu=k}^{m} A_\nu \Delta^\nu P(0) \tag{1.15}$$

Здесь $P^{(k)}(0)$ — производная k-го порядка от функции $P(\xi)$ при $\xi = 0$, а $\Delta^{\nu}P(0)$ — разность порядка ν заданных значений интерполируемой функции. Заметим, что ни в работе [2], ни в работе [3] не дается общего вида выражений C_{ki} или A_{ν} соответственно.

§ 2. Подобно тому, как это имеет место для функций одной переменной, можно представить и интерполяционный полином для функций n переменных в двух формах, аналогичных формам (1.1) и (1.2), а именно

$$P^{(m_1,\ldots,m_n)}(\xi_1,\ldots,\xi_n) = \sum_{i_1=0}^{m_1}\ldots\sum_{i_n=0}^{m_n}\Phi_{i_1,\ldots,i_n}L_{i_1,\ldots,i_n}^{(m_1,\ldots,m_n)}(\xi_1,\ldots,\xi_n) \tag{2.1}$$

$$P^{(m_1,\ldots,m_n)}(\xi_1,\ldots,\xi_n) = K_{\underbrace{0\ldots0}_{n}} + \sum_{k=1}^{n}\Bigl(\sum_{i_k=1}^{m_k} K_{\underbrace{0\ldots i_k\ldots0}_{n}}^{\overbrace{(0\ldots m_k\ldots0)}^{n}}\xi_k^{i_k}\Bigr) +$$

$$+\sum_{k_2=k_1+1}^{n}\sum_{k_1=1}^{n-1}\Bigl(\sum_{i_{k_1}=1}^{m_{k_1}}\sum_{i_{k_2}=1}^{m_{k_2}} K_{\underbrace{0\ldots i_{k_1}\ldots i_{k_2}\ldots0}_{n}}^{\overbrace{(0\ldots m_{k_1}\ldots m_{k_2}\ldots0)}^{n}}\xi_{k_1}^{i_{k_1}}\xi_{k_2}^{i_{k_2}}\Bigr)+\ldots+$$

$$+\sum_{k_{n-1}=k_{n-2}+1}^{n}\ \sum_{k_{n-2}=k_{n-3}+1}^{n-1}\ldots\sum_{k_1=1}^{n-(n-2)}\Bigl(\sum_{i_{k_1}=1}^{m_{k_1}}\ldots\sum_{i_{k_{n-1}}=1}^{m_{k_{n-1}}} K_{\underbrace{i_{k_1}i_{k_2}\ldots0\ldots i_{k_{n-1}}}_{n}}^{\overbrace{(m_{k_1}m_{k_2}\ldots0\ldots m_{k_{n-1}})}^{n}}\times$$

$$\times\,\xi_{k_1}^{i_{k_1}}\ldots\xi_{k_{n-1}}^{i_{k_{n-1}}}\Bigr)+\sum_{i_n=1}^{m_n}\sum_{i_{n-1}=1}^{m_{n-1}}\ldots\sum_{i_1=1}^{m_1}K_{i_1\ldots i_n}^{(m_1\ldots m_n)}\,\xi_1^{i_1}\xi_2^{i_2}\ldots\xi_n^{i_n} \tag{2.2}$$

Число сумм (вне круглых скобок) кратности s равно числу граней измерения s, сходящихся у одной вершины n-мерного куба.

Подобно тому, как это сделано для функции одной переменной и для функции n переменных, задача решена путем решения системы линейных алгебраических уравнений

$$P^{(m_1,\ldots,m_n)}\left(\frac{i_1}{m_1},\ldots,\frac{i_n}{m_n}\right) = \Phi_{i_1,\ldots,i_n} \qquad \begin{pmatrix} i_1 = 0, 1, \ldots, m_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ i_n = 0, 1, \ldots, m_n \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

При решении этой системы приходится раскрывать определители блочных матриц, в связи с чем доказана следующая теорема.

Теорема. Если имеется блочная матрица M с квадратными блоками одинакового размера и при этом в матрице M содержится как по вертикали, так и по горизонтали m_1 блоков, а кроме того, матрица каждого из блоков может быть представлена как произведение квадратной матрицы N (порядка m_2), одинаковой для всех блоков на различные, вообще говоря, для каждого из блоков выражения $C_{i_1 i_2}$ ($i_1 = 1,\ldots,m_1$; $i_2 = 1,\ldots,m_1$), то имеет место следующее равенство:

$$D(M) = [D(N)]^{m_1}\left\{\begin{Vmatrix} C_{11}\ldots C_{1m_1} \\ \cdots\cdots \\ C_{m_1 1}\ldots C_{m_1 m_1}\end{Vmatrix}\right\}^{m_2} \tag{2.4}$$

Действительно, пусть имеется матрица M:

$$M = \left\| \begin{array}{c|c|c} C_{11}N & \ldots & C_{1m_1}N \\ \hline \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot \\ \hline C_{m_11}N & \ldots & C_{m_1m_1}N \end{array} \right\| \qquad \left(N = \left\| \begin{array}{c} d_{11} \ldots d_{1m_2} \\ \cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot \\ d_{m_21} \ldots d_{m_2m_2} \end{array} \right\| \right)$$

Путем преобразования строк определитель матрицы M можно привести к определителю следующей матрицы M'

$$M' = \left\| \begin{array}{c|c|c|c} C_{11}N & C_{12}N & \ldots & C_{1m_1}N \\ \hline M_0^{(m_2m_2)} & C'_{22}N & \ldots & C'_{2m_1}N \\ \hline \cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot \\ \hline M_0^{(m_2m_2)} & C'_{m_12}N & \ldots & C'_{m_1m_1}N \end{array} \right\| \tag{2.5}$$

где

$$C'_{i_1i_2} = C_{i_1i_2} - \frac{C_{i_11}}{C_{11}} C_{1i_2} \qquad \begin{pmatrix} i_1 = 2, \ldots, m_1 \\ i_2 = 2, \ldots, m_1 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

а под $M_0^{(m_2m_2)}$ подразумевается квадратная матрица порядка m_2, все элементы которой равны нулю. Применяя к определителю матрицы (2.5) теорему Лапласа и учитывая, что матрица N порядка m_2, получим

$$D(M) = D(M') = (C_{11})^{m_2} D(N) D \left(\left\| \begin{array}{c|c|c} C_{22}'N & \ldots & C'_{2m_1}N \\ \hline \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot \\ \hline C'_{m_12}N & \ldots & C'_{m_1m_1}N \end{array} \right\| \right) \tag{2.7}$$

Указанный выше процесс последовательного преобразования строк и применения теоремы Лапласа можно продолжать; тогда в следующей ступени разложения определителя получим

$$D(M) = (C_{11})^{m_2} D(N) (C_{22}')^{m_2} D(N) D \left(\left\| \begin{array}{c|c|c} C_{33}''N & \ldots & C''_{3m_1}N \\ \hline \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot \\ \hline C''_{m_13}N & \ldots & C''_{m_1m_1}N \end{array} \right\| \right) \tag{2.8}$$

где

$$C''_{i_1i_2} = C'_{i_1i_2} - \frac{C'_{i_12}}{C_{22}'} C'_{2i_2} \qquad \begin{pmatrix} i_1 = 3, 4, \ldots, m_1 \\ i_2 = 3, 4, \ldots, m_1 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

Окончательно после m_1 ступени

$$D(M) = (C_{11}C_{22}'C_{33}'' \ldots C_{m_1m_1}^{(m_1-1)})^{m_2} [D(N)]^{m_1} \tag{2.10}$$

Здесь

$$C_{m_1m_1}^{(m_1-1)} = C_{m_1m_1}^{(m_1-2)} - \frac{C_{m_1,(m_1-1)}^{(m_1-2)}}{C_{(m_1-1)(m_1-1)}^{(m_1-2)}} C_{(m_1-1),m_1}^{(m_1-2)} \tag{2.11}$$

Произведение $C_{11}C_{22}'C_{33}'' \ldots C_{m_1m_1}^{(m_1-1)}$ есть разложение определителя:

$$\begin{vmatrix} C_{11} & \ldots & C_{1m_1} \\ \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot \\ C_{m_11} & \ldots & C_{m_1m_1} \end{vmatrix}$$

Таким образом приходим к формуле (2.4). Пользуясь формулой (2.4) путем $(n-1)$-кратного ее применения, легко находим основной определитель системы (2.3). Аналогично обстоит дело и с определителями, представляющими собой миноры основного определителя системы (2.3), соответствующие каждому из его членов. В последнем случае приходится прибегать к некоторым дополнительным преобразованиям. Не останавливаясь на выкладках, покажем, как изображаются коэффициенты L и K, входящие в формулы (2.1) и (2.2):

$$L_{i_1 i_2, \dots, i_n}^{(m_1, m_2, \dots, m_n)}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = L_{i_1}^{(m_1)}(\xi_1)\, L_{i_2}^{(m_2)}(\xi_2) \dots L_{i_n}^{(m_n)}(\xi_n) \tag{2.12}$$

$$K_{\underbrace{0 \dots i_{k_1} \dots i_{k_2} \dots i_{k_t} \dots 0}_{n}}^{\overbrace{(0 \dots m_{k_1} \dots m_{k_2} \dots m_{k_t} \dots 0)}^{n}} = \sum_{j_{k_1}=1}^{m_{k_1}} \sum_{j_{k_2}=1}^{m_{k_2}} \dots \sum_{j_{k_t}=1}^{m_{k_t}} \Delta_{i_{k_1} j_{k_1}}^{(m_{k_1})} \Delta_{i_{k_2} j_{k_2}}^{(m_{k_2})} \dots \Delta_{i_{k_t} j_{k_t}}^{(m_{k_t})} \times$$

$$\times \Bigg[\Phi_{\underbrace{0 \dots j_{k_1} \dots j_{k_2} \dots j_{k_s} \dots j_{k_t} \dots 0}_{n}} - \Bigg(\sum_{k_s = k_1}^{k_t} \Phi_{\substack{\overbrace{0 \dots j_{k_1} \dots j_{k_2} \dots j_{k_t} \dots 0}^{n} \\ j_{k_s}=0}} \Bigg) + \tag{2.13}$$

$$+ \Bigg(\sum_{k_{s_2}=k_{s_1}+1}^{k_t} \sum_{k_{s_1}=k_1}^{k_t - 1} \Phi_{\substack{\overbrace{0 \dots j_{k_1} \dots j_{k_2} \dots j_{k_t} \dots 0}^{n} \\ j_{k_{s_1}}=0, \quad j_{k_{s_2}}=0, \quad s_1<t, \ s_2<t}} \Bigg) - \dots (-1)^{t+1} \Phi_{\underbrace{00 \dots 0}_{n}} \Bigg]$$

В частности, для функций двух переменных имеем

$$P^{(m_1 m_2)}(\xi_1 \xi_2) = \sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \Phi_{i_1 i_2} L_{i_1 i_2}^{(m_1 m_2)}(\xi_1 \xi_2) \tag{2.14}$$

$$P^{(m_1, m_2)}(\xi_1 \xi_2) = K_{00} + \sum_{i_1=1}^{m_1} K_{i_1 0}^{(m_1, 0)} \xi_1^{i_1} + \sum_{i_2=1}^{m_2} K_{0 i_2}^{(0, m_2)} \xi_2^{i_2} + \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} K_{i_1 i_2}^{(m_1, m_2)} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \tag{2.15}$$

при этом

$$L_{i_1 i_2}^{(m_1 m_2)}(\xi_1 \xi_2) = L_{i_1}^{(m_1)}(\xi_1)\, L_{i_2}^{(m_2)}(\xi_2) \tag{2.16}$$

$$K_{00} = \Phi_{00}, \quad K_{i_1 0}^{(m_1 0)} = \sum_{j_1=1}^{m_1} \Delta_{i_1 j_1}^{(m_1)} (\Phi_{j_1 0} - \Phi_{00}), \quad K_{0 i_2}^{(0 m_2)} = \sum_{j_2=1}^{m_2} \Delta_{i_2 j_2}^{(m_2)} (\Phi_{0 j_2} - \Phi_{00})$$

$$K_{i_1 i_2}^{(m_1 m_2)} = \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} \Delta_{i_1 i_2 j_1 j_2}^{(m_1 m_2)} [\Phi_{j_1 j_2} - (\Phi_{j_1 0} + \Phi_{0 j_2}) + \Phi_{00}] \tag{2.17}$$

$$\Delta_{i_1 i_2 j_1 j_2}^{(m_1 m_2)} = \Delta_{i_1 j_1}^{(m_1)} \Delta_{i_2 j_2}^{(m_2)} \tag{2.18}$$

Матрица величин $\Delta_{i_1 i_2 j_1 j_2}^{(m_1 m_2)}$ легко получается из матриц (1.7), соответствующих $m = m_1$ и $m = m_2$, и может быть составлена раз навсегда для различных комбинаций значений m_1 и m_2. Например, для $m_1 = 2$ и $m_2 = 2$ или для $m_1 = 3$ и $m_2 = 2$ значения $\Delta_{i_1 i_2 j_1 j_2}^{(m_1 m_2)}$ имеют вид (табл. 3, 4).

Таблица 3

i_2	i_1	$j_1 = 1$		$j_1 = 2$	
		$j_2 = 1$	$j_2 = 2$	$j_2 = 1$	$j_2 = 2$
1	1	16	—4	—4	1
	2	—16	8	4	—2
2	1	—16	4	8	—2
	2	16	—8	—8	4

Таблица 4

i_1	i_2	$j_1=1$, $j_2=1$	$j_1=1$, $j_2=2$	$j_1=2$, $j_2=1$	$j_1=2$, $j_2=2$	$j_1=3$, $j_2=1$	$j_1=3$, $j_2=2$
1	1	36	—9	—18	4.5	4	—1
	2	—36	18	18	—9	—4	2
2	1	—90	22.5	72	—18	—18	4.5
	2	90	—45	—72	36	18	—9
3	1	54	—13.5	—54	13.5	18	—4.5
	2	—54	27	54	—27	—18	9

Аналогично для функций трех переменных

$$P^{(m_1m_2m_3)}(\xi_1\xi_2\xi_3)=\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}\sum_{i_3=0}^{m_3}\Phi_{i_1i_2i_3}L_{i_1i_2i_3}^{(m_1m_2m_3)}(\xi_1\xi_2\xi_3) \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}P^{(m_1m_2m_3)}(\xi_1\xi_2\xi_3) &= K_{000}+\sum_{i_1=1}^{m_1}K_{i_100}^{(m_100)}\xi_1^{i_1}+\sum_{i_2=1}^{m_2}K_{0i_20}^{(0m_20)}\xi_2^{i_2}+\sum_{i_3=1}^{m_3}K_{00i_3}^{(00m_3)}\xi_3^{i_3}+\\ &+\sum_{i_1=1}^{m_1}\sum_{i_2=1}^{m_2}K_{i_1i_20}^{(m_1m_20)}\xi_1^{i_1}\xi_2^{i_2}+\sum_{i_2=1}^{m_2}\sum_{i_3=1}^{m_3}K_{0i_2i_3}^{(0m_2m_3)}\xi_2^{i_2}\xi_3^{i_3}+\sum_{i_1=1}^{m_1}\sum_{i_3=1}^{m_3}K_{i_10i_3}^{(m_10m_3)}\xi_1^{i_1}\xi_3^{i_3}+\\ &+\sum_{i_1=1}^{m_1}\sum_{i_2=1}^{m_2}\sum_{i_3=1}^{m_3}K_{i_1i_2i_3}^{(m_1m_2m_3)}\xi_1^{i_1}\xi_2^{i_2}\xi_3^{i_3}\end{aligned} \tag{2.20}$$

Здесь

$$L_{i_1i_2i_3}^{(m_1m_2m_3)}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=L_{i_1}^{(m_1)}(\xi_1)L_{i_2}^{(m_2)}(\xi_2)L_{i_3}^{(m_3)}(\xi_3) \tag{2.21}$$

$$K_{000}=\Phi_{000};\quad K_{i_100}^{(m_100)}=\sum_{j_1=1}^{m_1}\Delta_{i_1j_1}^{(m_1)}(\Phi_{j_100}-\Phi_{000})$$

$$K_{0i_20}^{(0m_20)}=\sum_{j_2=1}^{m_2}\Delta_{i_2j_2}^{(m_2)}(\Phi_{0j_20}-\Phi_{000})$$

$$K_{00i_3}^{(00m_3)}=\sum_{j_3=1}^{m_3}\Delta_{i_3j_3}^{(m_3)}(\Phi_{00j_3}-\Phi_{000}) \tag{2.22}$$

$$K_{i_1i_20}^{(m_1m_20)}=\sum_{j_1=1}^{m_1}\sum_{j_2=1}^{m_2}\Delta_{i_1j_1}^{(m_1)}\Delta_{i_2j_2}^{(m_2)}[\Phi_{j_1j_20}-(\Phi_{j_100}+\Phi_{0j_20})+\Phi_{000}]$$

$$K_{0i_2i_3}^{(0m_2m_3)}=\sum_{j_2=1}^{m_2}\sum_{j_3=1}^{m_3}\Delta_{i_2j_2}^{(m_2)}\Delta_{i_3j_3}^{(m_3)}[\Phi_{0j_2j_3}-(\Phi_{0j_20}+\Phi_{00j_3})+\Phi_{000}]$$

$$K_{i_10i_3}^{(m_10m_3)}=\sum_{j_1=1}^{m_1}\sum_{j_3=1}^{m_3}\Delta_{i_1j_1}^{(m_1)}\Delta_{i_3j_3}^{(m_3)}[\Phi_{j_10j_3}-(\Phi_{j_100}+\Phi_{00j_3})+\Phi_{000}]$$

$$\begin{aligned}K_{i_1i_2i_3}^{(m_1m_2m_3)} &= \sum_{j_1=1}^{m_1}\sum_{j_2=1}^{m_2}\sum_{j_3=1}^{m_3}\Delta_{i_1j_1}^{(m_1)}\Delta_{i_2j_2}^{(m_2)}\Delta_{i_3j_3}^{(m_3)}[\Phi_{j_1j_2j_3}-(\Phi_{j_1j_20}+\\ &+\Phi_{0j_2j_3}+\Phi_{j_10j_3})+(\Phi_{j_100}+\Phi_{0j_20}+\Phi_{00j_3})-\Phi_{000}]\end{aligned}$$

Для величин

$$\Delta^{(m_1 m_2 m_3)}_{i_1 i_2 i_3 j_1 j_2 j_3} = \Delta^{(m_1)}_{i_1 j_1} \Delta^{(m_2)}_{i_2 j_2} \Delta^{(m_3)}_{i_3 j_3}$$

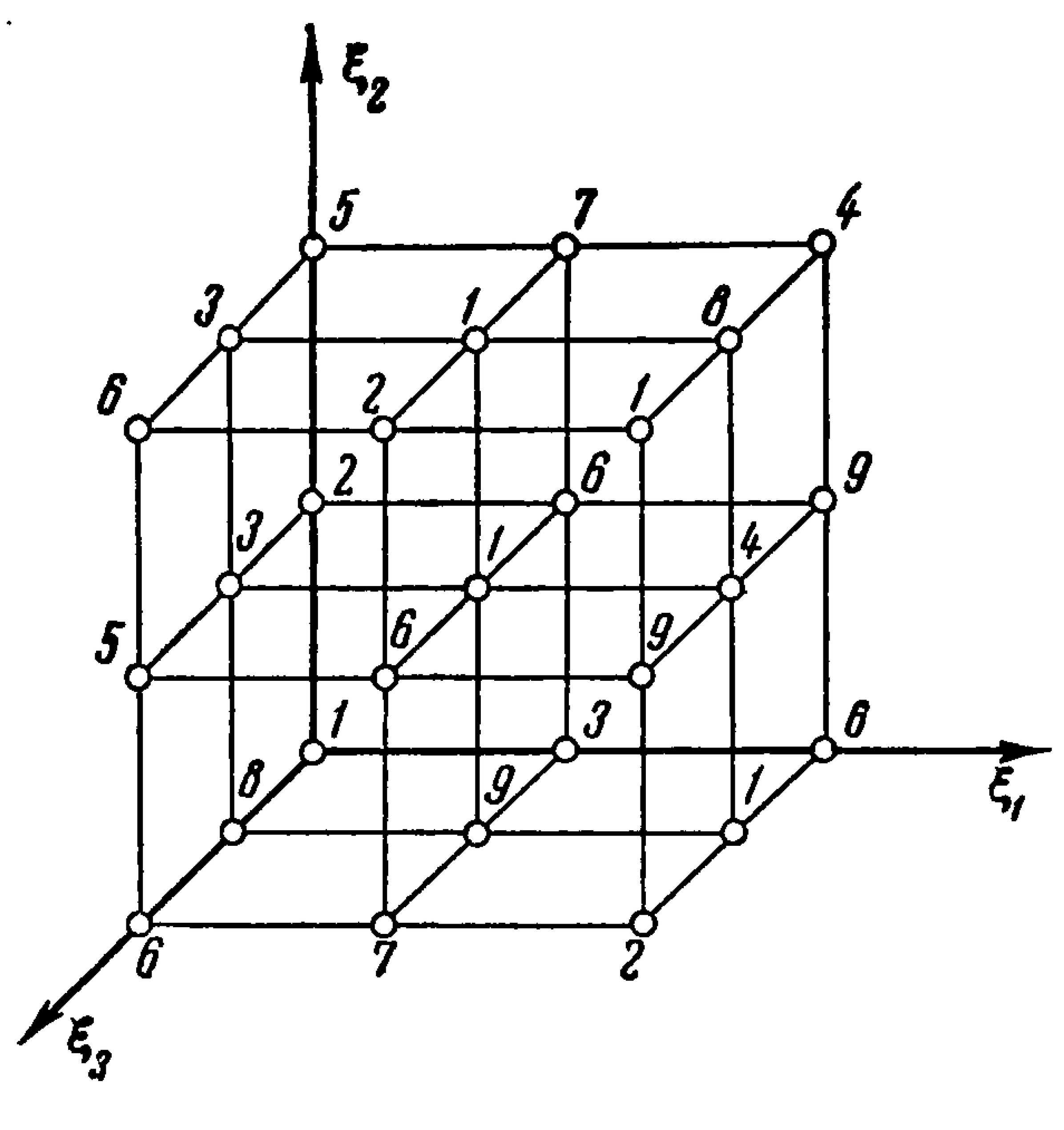
можно составить раз навсегда таблицы значений.

Например, при $m_1 = 2$, $m_2 = 2$ и $m_3 = 2$ такая табл. 5 имеет вид:

Таблица 5

i_1	i_2	i_3	$j_1 = 1$				$j_1 = 2$			
			$j_2 = 1$		$j_2 = 2$		$j_2 = 1$		$j_2 = 2$	
			$j_3 = 1$	$j_3 = 2$	$j_3 = 1$	$j_3 = 2$	$j_3 = 1$	$j_3 = 2$	$j_3 = 1$	$j_3 = 2$
1	1	1	64	—16	—16	4	—16	4	4	—1
		2	—64	32	16	—8	16	—8	—4	2
	2	1	—64	16	32	—8	16	—4	—8	2
		2	64	—32	—32	16	—16	8	8	—4
2	1	1	—64	16	16	—4	32	—8	—8	2
		2	64	—32	—16	8	—32	16	8	—4
	2	1	64	—16	—32	8	—32	8	16	—4
		2	—64	32	32	—16	32	—16	—16	8

В заключение отметим, что для отыскания численного значения функции, соответствующего тем или иным значениям аргументов по заданным значениям функции в узлах, удобно пользоваться формой (1.1), (2.1), так как имеются весьма удобные таблицы для функциональных коэффициентов Лагранжа [4,5].



Фиг. 1

Пример. Составить интерполяционный полином для функции трех переменных, заданный следующими значениями:

Φ_{000}	Φ_{100}	Φ_{200}	Φ_{010}	Φ_{020}	Φ_{001}	Φ_{002}
1	3	6	2	5	8	6
Φ_{110}	Φ_{120}	Φ_{210}	Φ_{220}	Φ_{011}	Φ_{012}	Φ_{021}
6	7	9	4	3	5	3
Φ_{022}	Φ_{101}	Φ_{102}	Φ_{201}	Φ_{202}	Φ_{111}	Φ_{112}
6	9	7	1	2	1	6
Φ_{121}	Φ_{122}	Φ_{211}	Φ_{212}	Φ_{221}	Φ_{222}	
1	2	4	9	8	1	

Полином представляется в следующей форме:

$$\begin{aligned} P^{(222)}(\xi_1\xi_2\xi_3) = {} & K_{000} + K_{100}\xi_1 + K_{200}\xi_1^2 + K_{010}\xi_2 + K_{110}\xi_1\xi_2 + K_{210}\xi_1^2\xi_2 + K_{020}\xi_2^2 + K_{120}\xi_1\xi_2^2 + \\ & + K_{220}\xi_1^2\xi_2^2 + K_{001}\xi_3 + K_{101}\xi_1\xi_3 + K_{201}\xi_1^2\xi_3 + K_{011}\xi_2\xi_3 + K_{111}\xi_1\xi_2\xi_3 + K_{211}\xi_1^2\xi_2\xi_3 + \\ & + K_{021}\xi_2^2\xi_3 + K_{121}\xi_1\xi_2^2\xi_3 + K_{221}\xi_1^2\xi_2^2\xi_3 + K_{002}\xi_3^2 + K_{102}\xi_1\xi_3^2 + K_{202}\xi_1^2\xi_3^2 + K_{012}\xi_2\xi_3^2 + \\ & + K_{112}\xi_1\xi_2\xi_3^2 + K_{212}\xi_1^2\xi_2\xi_3^2 + K_{022}\xi_2^2\xi_3^2 + K_{122}\xi_1\xi_2^2\xi_3^2 + K_{222}\xi_1^2\xi_2^2\xi_3^2 \end{aligned}$$

Находим коэффициенты $K_{i_1 i_2 i_3}$ ($i_1 = 0, 1, 2$; $i_2 = 0, 1, 2$ и $i_3 = 0, 1, 2$).

Предварительно вычислим необходимые для этого линейные комбинации из $\Phi_{i_1 i_2 i_3}$. Для отыскания K_{100} и K_{200} вычисляем

$$\Phi_{100} - \Phi_{000} = 3 - 1 = 2; \quad \Phi_{200} - \Phi_{000} = 6 - 1 = 5 \tag{а}$$

Для отыскания K_{010} и K_{020} вычисляем

$$\Phi_{010} = \Phi_{000} = 2 - 1 = 1, \quad \Phi_{020} - \Phi_{000} = 5 - 1 = 4 \tag{б}$$

Для отыскания K_{001} и K_{002} вычисляем

$$\Phi_{001} - \Phi_{000} = 8 - 1 = 7, \quad \Phi_{002} - \Phi_{000} = 6 - 1 = 5 \tag{в}$$

Для отыскания K_{110}, K_{120}, K_{210} и K_{220} вычисляем

$$\begin{aligned}
&\Phi_{110} - (\Phi_{100} + \Phi_{010}) + \Phi_{000} = 6 - (3 + 2) + 1 = 2\\
&\Phi_{120} - (\Phi_{100} + \Phi_{020}) + \Phi_{000} = 7 - (3 + 5) + 1 = 0\\
&\Phi_{210} - (\Phi_{200} + \Phi_{010}) + \Phi_{000} = 9 - (6 + 2) + 1 = 2\\
&\Phi_{220} - (\Phi_{200} + \Phi_{020}) + \Phi_{000} = 4 - (6 + 5) + 1 = -6
\end{aligned} \tag{г}$$

Для отыскания K_{011}, K_{012}, K_{021} и K_{022} вычисляем

$$\begin{aligned}
&\Phi_{011} - (\Phi_{010} + \Phi_{001}) + \Phi_{000} = 3 - (2 + 8) + 1 = -6\\
&\Phi_{012} - (\Phi_{010} + \Phi_{002}) + \Phi_{000} = 5 - (2 + 6) + 1 = -2\\
&\Phi_{021} - (\Phi_{020} + \Phi_{001}) + \Phi_{000} = 3 - (5 + 8) + 1 = -9\\
&\Phi_{022} - (\Phi_{020} + \Phi_{002}) + \Phi_{000} = 6 - (5 + 6) + 1 = -4
\end{aligned} \tag{д}$$

Для отыскаиия K_{101}, K_{102}, K_{201} и K_{202} вычисляем

$$\begin{aligned}
&\Phi_{101} - (\Phi_{100} + \Phi_{001}) + \Phi_{000} = 9 - (3 + 8) + 1 = -1\\
&\Phi_{102} - (\Phi_{100} + \Phi_{002}) + \Phi_{000} = 7 - (3 + 6) + 1 = -1\\
&\Phi_{201} - (\Phi_{200} + \Phi_{001}) + \Phi_{000} = 1 - (6 + 8) + 1 = -12\\
&\Phi_{202} - (\Phi_{200} + \Phi_{002}) + \Phi_{000} = 2 - (6 + 6) + 1 = -9
\end{aligned} \tag{е}$$

Наконец, для отыскания K_{111}, K_{112}, K_{121}, K_{122}, K_{211}, K_{212}, K_{221} и K_{222} вычисляем

$$\begin{aligned}
&\Phi_{111} - (\Phi_{110} + \Phi_{011} + \Phi_{101}) + (\Phi_{100} + \Phi_{010} + \Phi_{001}) - \Phi_{000} =\\
&\quad = 1 - (6 + 3 + 9) + (3 + 2 + 8) - 1 = -5\\
&\Phi_{112} - (\Phi_{110} + \Phi_{012} + \Phi_{102}) + (\Phi_{100} + \Phi_{010} + \Phi_{002}) - \Phi_{000} =\\
&\quad = 6 - (6 + 5 + 7) + (3 + 2 + 6) - 1 = -2\\
&\Phi_{121} - (\Phi_{120} + \Phi_{021} + \Phi_{101}) + (\Phi_{100} + \Phi_{020} + \Phi_{001}) - \Phi_{000} =\\
&\quad = 1 - (7 + 3 + 9) + (3 + 5 + 8) - 1 = -3\\
&\Phi_{122} - (\Phi_{120} + \Phi_{022} + \Phi_{102}) + (\Phi_{100} + \Phi_{020} + \Phi_{002}) - \Phi_{000} =\\
&\quad = 2 - (7 + 6 + 7) + (3 + 5 + 6) - 1 = -5\\
&\Phi_{211} - (\Phi_{210} + \Phi_{011} + \Phi_{201}) + (\Phi_{200} + \Phi_{010} + \Phi_{001}) - \Phi_{000} =\\
&\quad = 4 - (9 + 3 + 1) + (6 + 2 + 8) - 1 = 6\\
&\Phi_{212} - (\Phi_{210} + \Phi_{012} + \Phi_{202}) + (\Phi_{200} + \Phi_{010} + \Phi_{002}) - \Phi_{000} =\\
&\quad = 9 - (9 + 5 + 2) + (6 + 2 + 6) - 1 = 6\\
&\Phi_{221} - (\Phi_{220} + \Phi_{021} + \Phi_{201}) + (\Phi_{200} + \Phi_{020} + \Phi_{001}) - \Phi_{000} =\\
&\quad = 8 - (4 + 3 + 1) + (6 + 5 + 8) - 1 = 18\\
&\Phi_{222} - (\Phi_{220} + \Phi_{022} + \Phi_{202}) + (\Phi_{200} + \Phi_{020} + \Phi_{002}) - \Phi_{000} =\\
&\quad = 1 - (4 + 6 + 2) + (6 + 5 + 6) - 1 = 5
\end{aligned} \tag{ж}$$

$$K_{000} = \Phi_{000} = 1$$

Пользуясь вычисленными величинами (а) и данными табл. 2 ($m = 2$), находим (в каждом из произведений во всех приводимых ниже вычислениях на первом месте стоят значения, взятые из таблиц)

$$K_{100} = 4\cdot 2 - 1\cdot 5 = 3, \quad K_{200} = -4\cdot 2 + 2\cdot 5 = 2$$

Аналогично по величинам (б) и данным табл. 2 находим

$$K_{010} = 4\cdot 1 - 1\cdot 4 = 0, \quad K_{020} = -4\cdot 1 + 2\cdot 4 = 4$$

По величинам (в) и данным табл. 2 находим

$$K_{001} = 4\cdot 7 - 1\cdot 5 = 23, \quad K_{002} = -4\cdot 7 + 2\cdot 5 = -18$$

По величинам (г) и данным табл. 3 находим

$$\begin{aligned} K_{110} &= 16\cdot 2 - 4\cdot 0 - 4\cdot 2 + 1(-6) = 18 \\ K_{120} &= -16\cdot 2 + 8\cdot 0 + 4\cdot 2 - 2(-6) = -12 \\ K_{210} &= -16\cdot 2 + 4\cdot 0 + 8\cdot 2 - 2(-6) = -4 \\ K_{220} &= 16\cdot 2 - 8\cdot 0 - 8\cdot 2 + 4(-6) = -8 \end{aligned}$$

По величинам (д) и данным табл. 3 находим

$$\begin{aligned} K_{011} &= 16\cdot(-6) - 4(-2) - 4(-9) + 1(-4) = -56 \\ K_{012} &= -16(-6) + 8(-2) + 4(-9) - 2(-4) = 52 \\ K_{021} &= -16(-6) + 4(-2) + 8(-9) - 2(-4) = 24 \\ K_{022} &= 16(-6) - 8(-2) - 8(-9) + 4(-4) = -24 \end{aligned}$$

По величинам (е) и данным табл. 3 находим

$$\begin{aligned} K_{101} &= 16(-1) - 4(-1) - 4(-12) + 1(-9) = 27 \\ K_{102} &= -16(-1) + 8(-1) + 4(-12) - 2(-9) = -22 \\ K_{201} &= -16(-1) + 4(-1) + 8(-12) - 2(-9) = -66 \\ K_{202} &= 16(-1) - 8(-1) - 8(-12) + 4(-9) = 52 \end{aligned}$$

Наконец, по величинам (ж) и данным табл. 5 находим

$$\begin{aligned} K_{111} &= 64(-5) - 16(-2) - 16(-3) + 4(-5) - 16\cdot 6 + 4\cdot 6 + 4\cdot 18 - 1\cdot 5 = -265 \\ K_{112} &= -64(-5) + 32(-2) + 16(-3) - 8(-5) + 16\cdot 6 - 8\cdot 6 - 4\cdot 18 + 2\cdot 5 = 244 \\ K_{121} &= -64(-5) + 16(-2) + 32(-3) - 8(-5) + 16\cdot 6 - 4\cdot 6 - 8.18 + 2\cdot 5 = 170 \\ K_{122} &= 64(-5) - 32(-2) - 32(-3) + 16(-5) - 16\cdot 6 + 8\cdot 6 + 8\cdot 18 - 4\cdot 5 = -174 \\ K_{211} &= -64(-5) + 16(-2) + 16(-3) - 4(-5) + 32\cdot 6 - 8\cdot 6 - 8\cdot 18 + 2\cdot 5 = 280 \\ K_{212} &= 64(-5) - 32(-2) - 16(-3) + 8(-5) - 32\cdot 6 + 16\cdot 6 + 8\cdot 18 - 4\cdot 5 = -220 \\ K_{221} &= 64(-5) - 16(-2) - 32(-3) + 8(-5) - 32\cdot 6 + 8.6 + 16\cdot 18 - 4\cdot 5 = -118 \\ K_{222} &= -64(-5) + 32(-2) + 32(-3) - 16(-5) + 32\cdot 6 - 16\cdot 6 - 16.18 + 8\cdot 5 = 98 \end{aligned}$$

Таким образом, искомый интерполяционный полином имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} P^{(222)}(\xi_1\xi_2\xi_3) = {} & 1 + 3\xi_1 + 2\xi_1^2 + 18\xi_1\xi_2 - 4\xi_1^2\xi_2 + 4\xi_2^2 - 12\xi_1\xi_2^2 - 8\xi_1^2\xi_2^2 + 23\xi_3 + 27\xi_1\xi_3 - \\ & - 66\xi_1^2\xi_3 - 56\xi_2\xi_3 - 265\xi_1\xi_2\xi_3 + 280\xi_1^2\xi_2\xi_3 + 24\xi_2^2\xi_3 + 170\xi_1\xi_2^2\xi_3 - 118\xi_1^2\xi_2^2\xi_3 - \\ & - 18\xi_3^2 - 22\xi_1\xi_3^2 + 52\xi_1^2\xi_3^2 + 52\xi_2\xi_3^2 + 244\xi_1\xi_2\xi_3^2 - 220\xi_1^2\xi_2\xi_3^2 - \\ & - 24\xi_2^2\xi_3^2 - 174\xi_1\xi_2^2\xi_3^2 + 98\xi_1^2\xi_2^2\xi_3^2 \end{aligned}$$

Поступила 26 IX 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Филин А. П. К вопросу об определении коэффициентов в интерполяционных полиномах. Инженерный сборник, т. X, 1951.
2. Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
3. Микеладзе Ш. Е. О разложении определителя, элементами которого служат полиномы. ПММ, т. XII вып. 2, 1948.
4. Tables of Lagrangian Interpolation Coefficients Columbia University Press, New Jork, 1944.
5. Карамзина Л. Н., Курочкина Л. В. Таблицы интерполяционных коэффициентов. Изд. АН СССР, М., 1956.