Прикладная математика и механика, Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Н. Н. Красовский

(Свердловск)

Рассмотрим систему уравнений в конечных разностях

$$x_i([k+1]h) - x_i(kh) = \qquad (i = 1, \ldots, n)^* \tag{1}$$

$$= [a_{i1}x_1(kh) + \ldots + a_{in}x_n(kh) + q_{i1}u_1(kh) + \ldots + q_{ir}u_r(kh) + f_i(kh)]\,h$$

$$(k = 0,\ 1, \ldots,\ h > 0 = \mathrm{const})$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — координаты изображающей точки в фазовом пространстве системы, $u_1, \ldots, u_r$ — управляющие величины, $f_i(kh)$ — известные функции, a_{ij}, q_{il} — постоянные. Решение системы (1), соответствующее набору значений $u_l(kh)$ $(l = 1, \ldots, r;\ \ k = 0,\ 1, \ldots)$, будем обозначать через $x_i(\{x_{j_0}\},\ kh,\ \{u_l\})$ $(x_{j_0} = x_j(0))$.

Дано: начальная точка $\{x_{j_0}\}$ и последовательность точек $x_i = \xi_i(kh)$ $(i = 1, \ldots, n;\ \ k = 0,\ 1, \ldots)$. Требуется найти набор управляющих величин $u_l^\circ(kh)$ $(l = 1, \ldots, r;\ k = 0,\ 1, \ldots, K^\circ)$ таких, что последовательность $x_i(\{x_{j_0}\},\ kh,\ \{u_l^\circ\})$ «приходит» в точку $x_i = \xi_i(K^\circ h)$ (т. е. $x_i(\{x_{j_0}\},\ K^\circ h,\ \{u_l^\circ\}) = \xi_i(K^\circ h)$ $(i = 1, \ldots, n)$) за наименьшее возможное число шагов K°. При этом допускаются значения $u_l(kh)$, стесненные условием

$$|u_l(kh)| \leqslant N \qquad (l = 1, \ldots, r;\ k = 0,\ 1, \ldots;\ N = \mathrm{const}) \tag{2}$$

Аналогичные задачи для систем регулирования, описываемых дифференциальными уравнениями, рассматривались в ряде работ (см., например, [1—5]). Цель настоящей заметки — описать решение задачи для конечно-разностных уравнений и обосновать предельный переход к соответствующей задаче для дифференциальных уравнений при $h \to 0$. Это позволяет, в частности, обосновать приближенный способ вычислений в случае дифференциальных уравнений. В сформулированной выше задаче строение основной части системы предполагается заданным (заданы значения коэффициентов a_{ij} и q_{il}) и имеется лишь возможность варьировать управляющие величины u_l. Задача подбора оптимальных параметров a_{ij} в случае дифференциальных уравнений и при $u_l = 0$ рассмотрена в статье [6].

Рассматриваемую здесь задачу будем называть h-задачей оптимального регулирования, решение $x_i(\{x_{j_0}\},\ kh,\ \{u_l^\circ\})$ — h-оптимальной траекторией, величины $u_l^\circ(kh)$ — h-оптимальным управлением, $K^\circ h$ — h-оптимальным быстродействием. Если речь будет идти о задаче для системы дифференциальных уравнений, то букву h впереди соответствующего термина будем опускать. Обозначим через $\varphi_{ij}^h(kh)$ элементы фундаментальной матрицы решений однородной системы, соответствующей уравнениям (1):

$$x_i([k+1]h) - x_i(kh) = [a_{i1}x_1(kh) + \ldots + a_{in}x_n(kh)]\,h \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

т. е. при каждом фиксированном j набор величин $x_i = \varphi_{ij}^h(kh)$ является решением системы (3), причем $\varphi_{ij}^h(0) = 1$, $\varphi_{ij}^h(0) = 0$ при $i \neq j$.

Пусть $K > 0$ — фиксированное целое число, $v_l(kh)$ $(l = 1, \ldots, r;$ $k = 0, 1, \ldots, K)$ — набор действительных чисел. Решение системы (1), где $u_l(kh) = v_l(kh)$ и $x_i(0) = x_{i0}$, можно записать по формуле

$$x_i(\{x_{j0}\}, Kh, \{v_l\}) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}^h(Kh)\, x_{j0} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}^h([K-k]\,h)\,[q_{jl}\, v_l([k-1]\,h) + f_j([k-1]\,h)]\,h \qquad (4)$$

$$(i = 1, \ldots, n)$$

соответствующей известной формуле Коши [7] для решения неоднородной линейной системы дифференциальных уравнений. Формулу (4) можно проверить непосредственной подстановкой в уравнения (1) (при $K = 0$ второе слагаемое в правой части формулы (4) следует полагать равным нулю). Рассмотрим задачу: при фиксированном K найти совокупность величин $v_l(kh)$, удовлетворяющих условию

$$\xi_i(Kh) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}^h(Kh)\, x_{j_0} + \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}^h([K-k]\,h) \times$$

$$\times [q_{jl} v_l([k-1]\,h) + f_j([k-1]\,h)]\,h \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (5)$$

$$F(Kh) = \min\max\,(|\,v_l(kh)\,| \text{ при } l = 1, \ldots, r;\ \ k = 0, 1, \ldots, K) \qquad (6)$$

Равенства (5) есть условия попадания траектории $x_i(\{x_{j0}\}, kh, \{v_l\})$ в точку $x_i = \xi_i(Kh)$. Очевидно, это попадание осуществимо на K-шаге при ограничениях (2) тогда и только тогда, когда

$$F(Kh) \leqslant N \qquad (7)$$

Следовательно, h-оптимальным быстродействием $K^\circ h$ будет наименьшее из чисел Kh, удовлетворяющих неравенству (7).

При исследовании задачи (5), (6) воспользуемся результатами из книги [8], где рассматриваются весьма общие задачи такого рода под названием L-проблемы. Для сведения задачи (5), (6) к L-проблеме[1] рассмотрим $K \times r$-мерное векторное пространство $\{\eta_{kl}\}$ $(k = 1, \ldots, K;$ $l = 1, \ldots, r)$, где норму $\|\eta\|$ определим формулой

$$\|\eta\| = \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{r} |\,\eta_{kl}\,|\,h \qquad (8)$$

Будем рассматривать величины

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}^k([K-k)\,h)\, q_{jl} = \eta_{kl}^{(i)}$$

как компоненты $K \times r$-мерного вектора $\eta^{(i)}$. Тогда задача (5), (6) сводится к задаче: найти линейный функционал $L[\eta]$, определенный на $K \times r$-

[1] Задачу (5), (6) можно рассмотреть и непосредственно, однако общий взгляд на задачу как на L-проблему облегчает переход к другим аналогичным задачам.

мерных векторах η с нормой (8) и удовлетворяющий условиям

$$L[\eta^{[i]}] = c_i, \qquad F(Kh) = \|L\| = \min \tag{9}$$

где

$$c_i = \xi_i(Kh) - \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}^{h}(Kh)\, x_{j_0} - \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}^{h}([K-k]\,h)\, f_j([k-1]\,h)\, h \tag{10}$$

Действительно, общий вид линейного функционала L на векторах η будет

$$L[\eta] = \sum_{k,\,l} \eta_{lk} V_{lk} \qquad (V_{lk} = v_l(k-1)\,h)$$

и в соответствии с нормой $\|\eta\|$ (8) норма $\|L\|$ определяется формулой

$$\|L\| = \sup \frac{|L[\eta]|}{\|\eta\|} = \sup |V_{lk}| \qquad (l = 1, \ldots, r;\ k = 1, \ldots, K) \tag{11}$$

Будем предполагать векторы $\eta^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ линейно независимыми. Согласно результатам [8] (стр. 173) решение задачи (5), (6) — величина $F(Kh)$ минимальной нормы функционала $\|L\|$ — определяется из условия

$$F(Kh) = \frac{1}{\lambda(Kh)}, \quad \lambda(Kh) = \min \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \eta^{(i)} \right\| \quad \text{при} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i = 1 \tag{12}$$

или, иначе говоря,

$$\lambda(Kh) = \min \left[\sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{r} \left| \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_{ij}^{h}([K-k]\,h)\, q_{jl} \right| h \right] \quad \text{при} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i = 1 \tag{13}$$

Таким образом, h-оптимальным быстродействием $K^\circ h$ будет наименьшее из чисел Kh, удовлетворяющих неравенству

$$F(Kh) \leqslant N \quad \text{или} \quad \lambda(Kh) \geqslant \frac{1}{N} \tag{14}$$

где величина λ определяется по формуле (12) [или, что то же самое, по формуле (13)]. (Если при всех $K > 0$ выполняется неравенство $\lambda(Kh) < 1/N$ то последовательность $x_i = \xi_i(kh)$ недостижима траекторией (1) при ограничениях (2) ни при каких значениях $K > 0$). В качестве h-оптимального управления $u_l^\circ(kh)$ можно выбрать числа $u_l^\circ(kh) = v_l(kh) = V_{lk+1}$, определяющие функционал L, дающий минимальное по норме решение задачи (9), т. е. такое решение, для которого

$$\|L\| = \frac{1}{\lambda(K^\circ h)} \tag{15}$$

Согласно [8] (стр. 177, предложение 7°) это будет такой функционал, для которого линейная комбинация $\lambda_1^\circ \eta^{[1]} + \ldots + \lambda_n^\circ \eta^{(n)}$ [числа λ_i° — решения задачи (12)], является экстремальным элементом, т. е.

$$\left| L\left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^\circ \eta^{(i)}\right] \right| = \|L\| \cdot \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^\circ \eta^{(i)} \right\| \tag{16}$$

Из соотношения (16) вытекает в частности, что в тех точках, где

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^\circ \eta_{kl}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i^\circ \varphi_{ij}^{h}([K-k]\,h)\, q_{jl} \neq 0$$

h-оптимальные управляющие величины $u_l^\circ(kh) = V_{lk+1}$ должны вычисляться по формуле [8]

$$u_l^\circ([k-1]\,h) = \frac{1}{\lambda(K^\circ h)} \operatorname{sign} \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i^\circ \varphi_{ij}([K-k]\,h)\, q_{jl} \right] \tag{17}$$

Заметим, что в отличие от задачи оптимального регулирования для дифференциальных уравнений, где во многих линейных случаях решение является единственным, рассмотренная здесь h-задача, вообще говоря, может иметь не одно решение.

Рассмотрим теперь связь h-задачи при малом $h > 0$ с соответствующей задачей оптимального регулирования для дифференциальных уравнений, получающихся из уравнений (1) при $h \to 0$:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{l=1}^{n} q_{il} u_l + f_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{18}$$

Здесь в формулировке задачи величина $kh = t$, последовательности $x_i = \xi_i(kh)$ $(i = 1, \ldots, n)$, $f_i(kh)$ заменяется непрерывными кривыми $x_i = \xi_i(t)$, $f_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n;\ t \geqslant 0)$, в качестве управляющих величин u_l допускаются кусочно-непрерывные функции $u_l(t)$, стесненные условием

$$|u_l(t)| \leqslant N \qquad (l = 1, \ldots, r;\ t \geqslant 0) \tag{19}$$

Задача (5), (6) при замене формулы (4) на формулу Коши [7] (стр. 173) и $T = Kh$ запишется следующим образом:

$$F(T) = \min \max [|v_l(\tau)| \text{ при } l = 1, \ldots, r;\ 0 \leqslant \tau \leqslant T] \tag{20}$$

при условиях

$$\xi_i(T) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(T) x_{j_0} + \int_0^T \Big(\sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} \varphi_{ij}(T - \tau)[q_{jl} v_l(\tau) + f_j(\tau)]\Big) d\tau \tag{21}$$

$$(i = 1, \ldots, n)$$

Здесь $\varphi_{ij}(t)$ — элементы фундаментальной матрицы решений однородной системы (18) (при $u_l = 0, f_i = 0$).

Задача (20), (21) сводится к задаче (9), если в качестве векторов $\eta^{(i)}$ выбрать кривые

$$\eta_{l\tau l}^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(T - \tau) q_{jl} \qquad (l = 1, \ldots, r;\ 0 \leqslant \tau \leqslant T)$$

и норму $\| \eta_l^{(i)} \|$ определить формулой

$$\| \eta_l^{(i)} \| = \int_0^T \Big(\sum_{l=1}^{r} |\eta_{l\tau l}^{(i)}|\Big) d\tau = \int_0^T \Big(\sum_{l=1}^{r} \Big|\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(T - \tau) q_{jl}\Big|\Big) d\tau \tag{22}$$

Будем предполагать элементы $\eta_{l\tau l}^{(i)}$ вполне линейно независимыми [8], т. е. каждая линейная комбинация $\lambda_1 \eta_{l\tau l}^{(1)} + \ldots + \lambda_n \eta_{l\tau l}^{(n)}$ при $\lambda_1^2 + \lambda_n^2 \neq 0$ может обращаться в нуль лишь в отдельных изолированных точках. Тогда аналогично рассмотренному выше случаю h-задачи, опираясь на результаты [8] (стр. 171—179), придем к выводу о том, что оптимальным быстродействием T° будет наименьшее из чисел T, удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{N} = \lambda(T^\circ) = \int_0^T \Big(\sum_{l=1}^{r} \Big| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i^0 \varphi_{ij}(T - \tau) q_{jl} \Big|\Big) d\tau \tag{23}$$

где λ_i^0 — числа λ_i, при которых правая часть равенства (23) достигает минимума, причем

$$\lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n = 1 \tag{24}$$

и числа c_i определяются равенством

$$c_i(T) = \xi_i(T) - \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(T) x_{j0} - \int_0^T \Big(\sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \varphi_{ij}(T-\tau) f_i(\tau) \Big) d\tau \qquad (25)$$

$$(i = 1, \ldots, n)$$

В качестве оптимального управления здесь следует выбирать функции

$$u_l^\circ(t) = N \operatorname{sign} \Big[\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ll}^{(i)} \lambda_i^0 \Big] \qquad (26)$$

В отличие от предыдущей h-задачи число T^0 определяется здесь из строгого равенства (23), так как величина $\lambda(T)$, равная минимуму правой части (23) при $T^\circ = T$ и λ_i из (24), зависит от T непрерывно, как это следует из [8] (стр. 172, 173). Заметим еще, что функции $u_l^\circ(t)$ определяются условием (26) однозначно с точностью до множества значений t меры нуль [8], однако это для рассматриваемой здесь задачи оптимального регулирования, очевидно, не имеет значения и этим обстоятельством следует пренебречь.

Сохраняя введенные выше обозначения, рассмотрим теперь лишь случай $f_i = 0$, $\xi_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда можно проверить следующее утверждение.

При $h \to 0$ h-оптимальное быстродействие $K^\circ h$ сходится к оптимальному быстродействию T°, h-оптимальная траектория $x_i^h(\{x_{j0}\}, kh, \{u_l^{\circ h}\})$ сходится к оптимальной траектории $x_i(\{x_{j0}\}, t, \{u_l^\circ\})$ в том смысле, что при $h \to 0$ равномерно по $t = kh$ из интервала $[0, \min K^\circ h, T]$ выполняется условие[1]

$$\lim | x_i^h(\{x_{j0}\}, kh, \{u_l^{0h}\}) - x_i(\{x_{j0}\}, t, \{u_l^0\}) | = 0 \qquad (t = kh)$$

Если обозначить через $V_l^0(\tau, h)$ функции, определенные равенствами

$$V_l^\circ(\tau, h) = u_l^{\circ h}(kh) \quad \text{при} \quad kh \leqslant \tau \leqslant [k+1] h, \qquad l = 1, \ldots, r$$

то при $h \to 0$ функции $V_l^\circ(\tau, h)$ сходятся к функциям $u_l^\circ(\tau)$ на отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant T^\circ$ по мере [9] (стр. 28).

Приведем краткое доказательство этого утверждения. Согласно предыдущему оптимальное быстродействие T° определяется из равенства

$$\lambda(T^\circ) = \frac{1}{N} \qquad (27)$$

где

$$\lambda(T) = \min \Big[\int_0^T \Big(\sum_{l=1}^{r} \Big| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \varphi_{ij}(T-\tau) q_{jl} \Big| \Big) d\tau \Big] \qquad (28)$$

при

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i = 1, \qquad c_i = -\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(T) x_{j0}$$

[1] Здесь и в дальнейшем индекс h сверху означает принадлежность соответствующего решения к h-задаче.

Пусть $\psi_{ij}(t)$ — элементы матрицы, обратной к фундаментальной матрице $(\varphi_{ij}(t))_1^n$; тогда, как известно [7], можно записать

$$\varphi_{ij}(T-\tau)=\sum_{\beta=1}^{n}\varphi_{i\beta}(T)\psi_{\beta j}(\tau)$$

и, следовательно, число $\lambda(T)$, определенное условием (28), можно определять также из условия

$$\lambda(T)=\min\left[\int_0^T\left(\sum_{l=1}^{r}\left|\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\rho_\beta\psi_{\beta j}(\tau)q_{jl}\right|\right)d\tau\right] \tag{29}$$

при

$$\sum_{\beta=1}^{n}\rho_\beta(-x_{\beta 0})=1,\quad \rho_\beta=\sum_{i=1}^{n}\varphi_{i\beta}(T)$$

Согласно предположению функции (22) вполне линейно независимы, а следовательно, очевидно, и функции

$$\sum_{j=1}^{n}\psi_{\beta j}(\tau)q_{jl}\qquad(\beta=1,\ldots,n) \tag{30}$$

также вполне линейно независимы. Пусть $\rho_\beta{}^\circ(T)$ — числа, дающие решение задачи (29), а $\lambda^\circ(T)$ — решение задачи (28). Тогда из (29) имеем

$$\int_T^{T+\Delta T}\left[\sum_{l=0}^{r}\left|\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\rho_\beta{}^\circ(T)\psi_{\beta j}(\tau)q_{jl}\right|\right]d\tau\geqslant$$

$$\geqslant\lambda(T+\Delta T)-\lambda(T)\geqslant\int_T^{T+\Delta T}\left[\sum_{l=1}^{r}\left|\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\rho_\beta{}^\circ(T+\Delta T)\psi_{\beta j}(\tau)q_{jl}\right|\right]d\tau \tag{31}$$

$$\text{при } \Delta T>0$$

и так как вследствие полной независимости функций (30) интеграл в правой части (31) больше нуля (за исключением тривиального случая $x_{j0}=0\,(j=1,\ldots,n)$, который здесь естественно исключается), то заключаем, что $\lambda(T)$ — строго монотонно возрастающая (непрерывная) функция T и, следовательно, в частности, уравнение (27) имеет не больше одного решения. (Мы здесь предполагаем, что точка x_{j0} лежит в области достижимости начала координат, т. е. уравнение (27) имеет одно (и только одно) решение.) Таким образом, при данном $\varepsilon>0$ можно указать положительное число $\delta>0$ такое, что

$$\lambda(T^\circ+\varepsilon)-\lambda(T^\circ)>\delta,\qquad|\lambda(T)-\lambda(T^\circ)|>\delta\qquad\text{при } 0\leqslant T\leqslant T^\circ-\varepsilon \tag{32}$$

Коэффициенты $\varphi_{ij}^h(kh)$ при $h\to 0$ стремятся равномерно на каждом конечном интервале времени к величинам $\varphi_{ij}(t)\,(t=kh)$ [7] (стр. 23), поэтому можно указать положительное число γ такое, что

$$|\lambda^h(T^\circ\pm\theta h)-\lambda(T^\circ\pm\varepsilon)|<\tfrac{1}{2}\delta\qquad\text{при } h<\gamma$$

где θ — наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $\theta\leqslant\varepsilon/h$ и, следовательно

$$\left|\lambda^h(T^\circ\pm\theta h)-\frac{1}{N}\right|>\frac{1}{2}\delta \tag{33}$$

Из неравенства (33) заключаем, что при $h<\gamma$ имеем $|K^\circ h-T^\circ|<\varepsilon$, что вследствие произвольности выбора $\varepsilon>0$ и доказывает сходимость h-оптимального быстродействия $K^\circ h$ к T° при $h\to 0$.

Рассмотрим последовательность чисел $h_m (m = 1, 2, \ldots)$ таких, что $\lim h_m = 0$ при $m \to \infty$, и пусть λ^{h_m} — решения задачи (12) при $h = h_m$. По определению $K^\circ h_m$ (14) и по доказанному выше имеем $\lim \lambda (K^\circ h_m) = \lambda (T^\circ)$ при $h_m \to 0$. Нетрудно проверить также, повторяя рассуждения [8] (стр. 171, 172) и используя сходимость $\varphi_{ij}^{h_m}$ к φ_{ij}, что совокупность чисел $\lambda_i^{h_m}$ ограничена равномерно по m. Пусть λ_i^{0*} — некоторая предельная точка последовательности $\lambda_i^{h_m}$. Если предположить, что функции

$$u_l^*(\tau) = N \operatorname{sign} \Big[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{\circ *} \eta_{\tau l}^{[i]} \Big], \qquad u_l^0 (\tau) = N \operatorname{sing} \Big[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^\circ \eta_{\tau l}^{(i)} \Big]$$

различны, то будем иметь неравенство

$$\int_0^{T^\circ} \Big[\sum_{l=1}^{r} \Big| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{\circ *} \eta_{\tau l}^{(i)} \Big| \Big] d\tau > \lambda (T^\circ) \tag{34}$$

так как согласно результатам [8] (стр. 177, предложение 8°) задача (28) имеет в существенном одно решение. Однако неравенство (34) противоречит указанному выше соотношению $\lim \lambda (K^\circ h_m) = \lambda (T^\circ)$ и

$$\lim \lambda (K^\circ h_\mu) = \int_0^{T^\circ} \Big[\sum_{l=1}^{r} \Big| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^\circ \eta_{\tau l}^{(i)} \Big| \Big] d\tau \qquad \text{при } h_\mu = 0$$

где h_μ — подпоследовательность, для которой последовательность $\lambda_i^{h_\mu}$ сходится к числам $\lambda_i^{\circ *}$. Полученное противоречие вследствие сходимости φ_{ij}^h к φ_{ij} и формулы (17) и доказывает сходимость функций $V_l^0 (\tau, h)$ к функциям $u_l^\circ (t)$ по мере. Теперь равномерная сходимость h-оптимальной траектории $x_i^h (\{x_{j0}\}, kh, \{u_l^{\circ h}\})$ к оптимальной траектории $x_i (\{x_{i0}\}, t, \{u_l^\circ\})$ доказывается без труда использованим неравенств интегральной непрерывности [7] и опираясь на тот факт, что при малых h параметры $u_l^{\circ h}$ и u_l° систем (1) и (18) соответственно мало отличаются в среднем. Этим доказательство высказанного утверждения завершается.

Заметим, что доказанное утверждение обосновывает приближенный метод определения оптимального управления для задачи в случае дифференциальных уравнений заменой этих уравнений конечно-разностными уравнениями с достаточно малым шагом $h > 0$. Решение задачи (12), а следовательно, и всей h-задачи в этом последнем случае сводится к довольно простым операциям, правда, в весьма большом количестве.

Рассмотрим в заключение простой пример. Пусть система конечно-разностных уравнений (1) имеет вид:

$$x ([k+1] h) - x (kh) = y (kh) h, \qquad \xi_1 = \xi_2 = 0$$

$$y ([k+1] h) - y (kh) = u (kh) h, \qquad x_0 = -1, \; y_0 = 0, \; N = 1 \tag{35}$$

Фундаментальная матрица однородной системы (35) (при $u = 0$) имеет вид:

$$\varphi_{11} = 1, \qquad \varphi_{12} = kh, \qquad \varphi_{21} = 0, \qquad \varphi_{22} = 1 \qquad .$$

поэтому по условиям (12), (14) оптимальным быстродействием $K^\circ h$ будет наименьшее из чисел Kh, удовлетворяющих неравенству

$$\min \Big[\sum_{k=1}^{K} | \lambda_1 (K - k) + \lambda_2 | h^2 \Big] \geqslant \frac{1}{N} = 1 \tag{36}$$

$$\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = 1, \qquad c_1 = -1, \qquad c_2 = 0$$

или, переходя к числам ρ_1 и ρ_2, как и выше (стр. 675), запишем условие

(36) в виде

$$\min\left[\sum_{k=1}^{K}|-k+\rho_2|\,h^2\right]\geqslant 1 \qquad \text{при } -\infty<\rho_2<\infty \tag{37}$$

Очевидно, минимум в левой части неравенства (36) достигается при $\rho_2=+{}^1/_2\,K$ при K четном и $\rho_2=+{}^1/_2(K-1)$ при K нечетном, и этот минимум равен соответственно

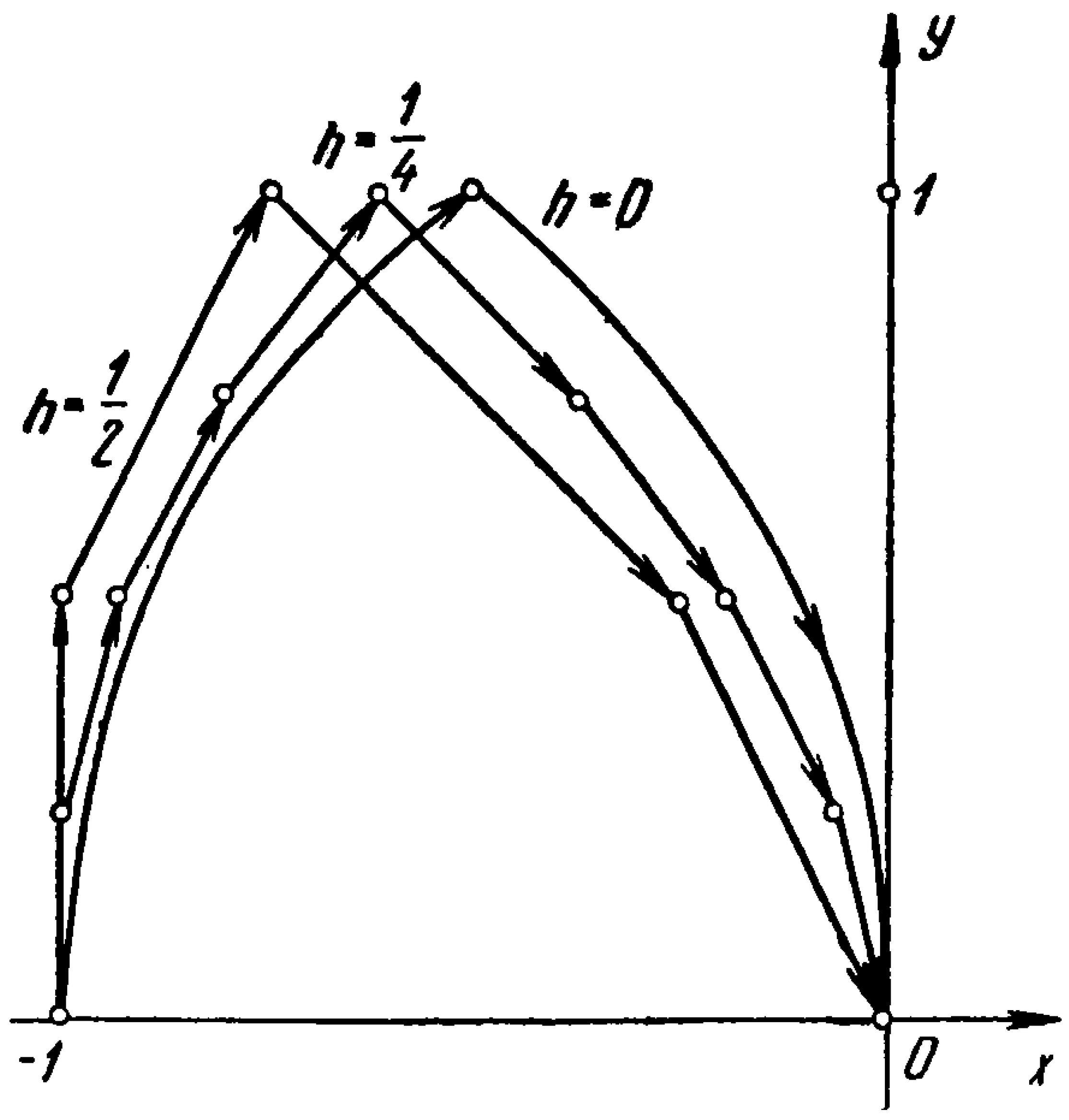
$$\min\left[\sum_{k=1}^{K}|-k+\rho_2|\,h^2\right]=\frac{K^2}{4}\,h^2$$

или

$$\min\left[\sum_{k=1}^{K}|-k+\rho_2|\,h^2\right]=$$

$$=\left[\frac{(K-1)}{2}+\frac{(K-1)^2}{4}\right]h^2$$

и, следовательно, K° — наименьшее из целых чисел, удовлетворяющих условию



Фиг. 1

$$K^\circ\geqslant 2/h \text{ или } [(K^\circ-1)/2+(K^\circ-1)/4]^2\geqslant 1/h^2$$

а соответствующее оптимальное управление $u^\circ(kh)$ определяется по фор муле (рассмотрим далее лишь K° четное)

$$u_0(kh)=(\operatorname{sign}[-k+K^\circ/2])(K^\circ h)^2/4$$

На фиг. 1 показаны (h)-оптимальные траектории для $h={}^1/_2$, $h={}^1/_4$ и для сравнения оптимальная траектория задачи

$$dx/dt=y,\qquad \xi_1=\xi_2=0$$
$$dy/dt=u,\qquad x_0=-1,\ y_0=0,\ N=1$$

Поступила 10 VI 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Цян Сюе-Сень, Техническая кибернетика. Издательство иностранной литературы. Москва, 1956, стр. 225—253.
2. Фельдбаум А. А. a) Оптимальные процессы в системах автоматического регулирования. Автоматика и телемеханика № 6, 1953. b) О синтезе оптимальных систем с помощью фазового пространства. Автоматика и телемеханика № 2, 1955. c) Труды II Всесоюзного совещания по теории и методам автоматического регулирования. Изд. АН СССР, 1955.
3. Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С. К теории оптимальных процессов. ДАН СССР, т. 110, вып. 1, 1956
4. Лернер А. Я. О предельном быстродействии систем автоматического управления. Автоматика и телемеханика. т. 15, № 6, 1954.
5. Silva L. M. Trans. ASME. т. 70, № 8, стр. 1317—1323, 1955 (перевод в сб. Машиностроение, № 8, 1956).
6. Четаев Н. Г. О выборе параметров устойчивой механической системы. ПММ, т. 15, вып. 3, 1951
7. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехиздат, М.—Л., 1949, стр. 173.
8. Ахиезер Н., Крейн М. О некоторых вопросах теории моментов. Статья IV, стр. 171, ГОНТИ-НТВУ, 1938.
9. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. Гостехиздат, М.—Л., 1951.