

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛИНЕЙНОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

М. А. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер

(Москва)

В классических исследованиях Ляпунова [1] вопрос об устойчивости периодического решения $z_i = z_i^0(t)$ (с периодом τ) системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_i}{dt} = f_i(z_1, \dots, z_n, t) \quad [f_i(z, t + \tau) \equiv f_i(z, t)] \quad (0.1)$$

был сведен в основных (некритических) случаях к вопросу об устойчивости нулевого решения $x_i = 0$ системы линейного приближения¹

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_k \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_k} \right)_{z=z^0(t)} x_k \quad (0.2)$$

Это сведение установлено для случая, когда правые части f_j уравнений (0.1) — аналитические функции или функции, непрерывные в окрестности интегральной кривой и дифференцируемые по z_1, \dots, z_n равномерно относительно t в точках самой кривой.

В настоящей работе исследуется устойчивость периодического решения $z_i = z_i^0(t)$ [$z_i^0(t + \tau) \equiv z_i^0(t)$] системы (0.1) в случае, когда правые части f_i имеют разрывы в некоторых точках интегральной кривой $z_i = z_i^0(t)$. Выясняется, что следует понимать под линейным приближением в этом «разрывном» случае, и устанавливаются теоремы, аналогичные теоремам Ляпунова об устойчивости по линейному приближению в «непрерывном» случае.

§ 1. Постановка задачи и формулировки основных теорем². Для определения условий, накладываемых на правые части системы уравнений (0.1), рассмотрим в $n + 1$ -мерном пространстве z_1, \dots, z_n, t криволинейный цилиндр C , осью которого служит интегральная кривая невозмущенного движения $z_i = z_i^0(t)$. Пусть бесконечная последовательность гиперповерхностей (поверхностей разрыва)³

$$F_\alpha(z_1, \dots, z_n, t) = 0 \quad (1.1)$$

рассекает цилиндр C на области H_α и интегральная кривая $z_i = z_i^0(t)$ пересекает поверхности разрыва (1.1) в точках M_α при $t = t_\alpha$, переходя с возрастанием t с «отрицательной» на «положительную» сторону этой поверхности (фиг. 1).

¹ Здесь и всюду далее латинские индексы i, j, k пробегает значения $1, \dots, n$, а индекс α — значения $1, 2, \dots, \infty$.

² Формулировки основных теорем без доказательств опубликованы в ДАН СССР, 116, № 4, 1957 г.

³ В дальнейшем для сокращения вместо «гиперповерхность», «гиперплоскость» будем писать «поверхность», «плоскость».

Предполагается, что правые части уравнений (0.1) удовлетворяют следующим условиям.

1°. Функции f_i — периодические относительно t с периодом τ .

2°. Функции f_i непрерывны в каждой области H_α , включая границы $F_\alpha = 0$ и $F_{\alpha-1} = 0$, и при переходе через поверхности $F_\alpha = 0$ могут испытывать разрывы 1-го рода.

3°. Функции f_i в каждой точке области H_α дифференцируемы относительно z_1, \dots, z_n в точках интегральной кривой $z_i = z_i^\circ(t)$ и при этом дифференцируемость равномерна относительно t , т. е.

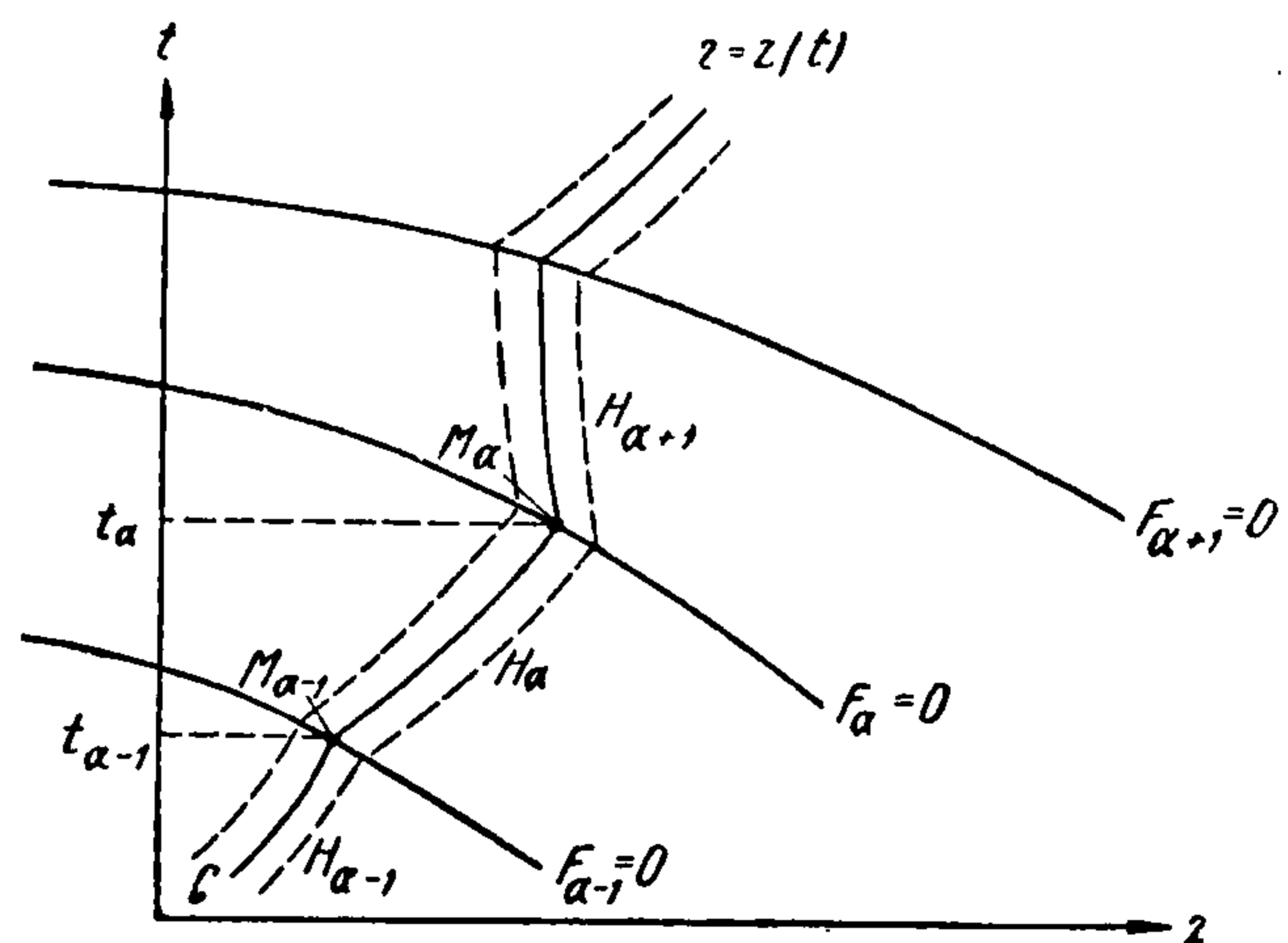
$$f_i(z_1, \dots, z_n, t) = f_i(z_1^\circ, \dots, z_n^\circ, t) + \sum_j \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j} \right)_{z=z^\circ(t)} (z_j - z_j^\circ) + o(\rho) \tag{1.2}$$

где

$$\rho = \left[\sum_j (z_j - z_j^\circ)^2 \right]^{1/2}, \quad \frac{o(\rho)}{\rho} \rightarrow 0 \quad \text{при } \rho \rightarrow 0$$

равномерно относительно t в каждом интервале $t_{\alpha-1} \leq t \leq t_\alpha$.

4°. Выполняются условия существования и единственности решения системы (0.1) в каждой области H_α при заданных начальных условиях, и имеет место непрерывная зависимость интегральных кривых от начальных условий. Как обычно, предполагается, что интегральные кривые системы (0.1) непрерывны всюду в S , в том числе и в точках пересечения с поверхностями разрыва правых частей f_i .



Фиг. 1

Относительно поверхностей разрыва делаются следующие предположения.

5°. Поверхности $F_\alpha = 0$ непрерывны, а в точках M_α гладкие.

6°. Вдоль интегральной кривой $z_i = z_i^\circ(t)$ производные $(dF_\alpha/dt)^+$ и $(dF_\alpha/dt)^-$ отличны от нуля и одного знака¹.

7°. При параллельном сдвиге вдоль оси t на величину периода τ семейство поверхностей (1.1) переходит само в себя.

Наряду с системой (0.1) рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_k \left[\frac{\partial f_i}{\partial z_k} \right]_{z^\circ(t)} x_k \tag{1.3}$$

¹ Здесь

$$\frac{dF_\alpha}{dt} = \left[\sum_k \frac{\partial F_\alpha}{\partial z_k} f_k + \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} \right]_{z=z^\circ(t)}$$

а индексы минус и плюс означают соответственно значения при $t = t_\alpha - 0$ и $t = t_\alpha + 0$, т. е. до и после разрыва.

и будем считать, что функции x_i в каждом интервале $t_{\alpha-1} + 0 \leq t \leq t_{\alpha} - 0$ непрерывны и удовлетворяют уравнениям (1.3), а при $t = t_{\alpha}$ испытывают разрывы, определяемые формулами

$$x_i^+ - x_i^- = \xi_i \sum_k h_k^- x_k^- \quad (1.4.1)$$

или

$$x_i^+ - x_i^- = \xi_i \sum_k h_k^+ x_k^+ \quad (1.4.2)$$

где ξ_i — величина разрыва функции f_i в точке M_{α} при переходе с отрицательной на положительную сторону поверхности $F_{\alpha} = 0$, а¹

$$h_k^{\pm} = \left[\frac{\partial F_{\alpha}}{\partial z_k} \left/ \left(\frac{dF_{\alpha}}{dt} \right)^{\pm} \right]_{M_{\alpha}} \quad (1.5)$$

В следующем параграфе будет доказана эквивалентность условий (1.4.1) и (1.4.2). Эти условия будем называть *условиями разрывов*.

Линейную дифференциальную систему, определяемую линейными дифференциальными уравнениями (1.3) и линейными же условиями разрывов (1.4), назовем *линейным приближением* исходной нелинейной системы (0.1).

Значение введенного таким образом линейного приближения вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1. Если нулевое решение системы линейного приближения асимптотически устойчиво, то и периодическое решение $z_i = z_i(t)$ исходной нелинейной системы (0.1) асимптотически устойчиво.

Характеристическое уравнение линейного приближения определяется так же, как и в непрерывном случае. Через $X(t)$ обозначается фундаментальная матрица линейного приближения; ее столбцами являются n линейно независимых решений системы (1.3) + (1.4). Тогда имеет место тождество

$$X(t + \tau) = X(t)U \quad (1.6)$$

где U — некоторая постоянная неособенная матрица. Характеристическим уравнением линейного приближения называется характеристическое уравнение $\det(U - \rho E) = 0$ матрицы U (здесь E — единичная матрица, а ρ — скалярная переменная).

Теорема 2. Если хотя бы один из корней характеристического уравнения линейного приближения имеет модуль, больший единицы, то периодическое решение $z_i = z_i^{\circ}(t)$ системы (0.1) неустойчиво.

§ 2. Предварительные замечания. 1°. Особенность теорем 1 и 2 состоит в том, что изучение непрерывных траекторий системы (0.1) заменяется изучением разрывных траекторий линейного приближения (1.3) + (1.4). Имеется в виду, что для таких разрывных траекторий сохраняются те определения понятий устойчивости и асимптотической устойчивости, которые были введены Ляпуновым применительно к непрерывным траекториям.

¹ Величины ξ_i и h_k зависят еще и от индекса α , но для упрощения обозначений мы этот индекс опускаем.

2°. Все уравнения записывались выше в скалярной форме с тем, чтобы рассматриваемое здесь обобщение теорем Ляпунова сформулировать в терминах и обозначениях, принятых в [1]. Для доказательства теорем удобнее перейти к матричной записи основных соотношений. С этой целью введем в рассмотрение столбцы z , f , x , ξ , h^- и h^+ , составленные соответственно из элементов z_i , f_i , ξ_i , h_i^- и h_i^+ , а также квадратные матрицы¹

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial z_k} \right\|, \quad B^- = \|\xi_i h_k^-\| = \xi h^{-'}, \quad B^+ = \|\xi_i h_k^+\| = \xi h^{+'} \quad (2.1)$$

Теперь систему исходных уравнений (0.1) и линейное приближение (1.3) + (1.4) можно записать в матричной форме:

$$\frac{dz}{dt} = f(z, t) \quad (2.2)$$

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{z=z^*(t)} x \quad (2.3)$$

$$x^+ - x^- = B^- x^- \quad (2.4.1)$$

или

$$x^+ - x^- = B^+ x^+ \quad (2.4.2)$$

3°. Воспользуемся матричной формой записи для доказательства эквивалентности условий разрывов (2.4.1) и (2.4.2) или, что то же, (1.4.1) и (1.4.2). С этой целью равенства (2.4.1) и (2.4.2) запишем так:

$$x^+ = (E + B^-) x^-, \quad x^+ = (E - B^+)^{-1} x^-$$

Покажем, что $E + B^- = (E - B^+)^{-1}$. Действительно, это равенство сводится к равенству $B^- - B^+ - B^- B^+ = 0$. Последнее справедливо, так как

$$B^- - B^+ = \xi \left[\frac{\partial F_\alpha / \partial z}{(dF_\alpha / dt)^-} - \frac{\partial F_\alpha / \partial z}{(dF_\alpha / dt)^+} \right]' = \xi h^{-'} \xi h^{+'} = B^- B^+$$

Здесь $\partial F_\alpha / \partial z$ — градиент функции F_α , т. е. столбец с элементами $\partial F_\alpha / \partial z_i$. Из совпадения условий (1.4.1) и (1.4.2) следует, что при любом $t = t_\alpha$ имеет место равенство

$$\sum_k h_k^- x_k^- = \sum_k h_k^+ x_k^+ \quad (2.5)$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$S = E + B^- = (E - B^+)^{-1}$$

и будем записывать условия разрывов в виде

$$x^+ = S x^- \quad (2.6)$$

Рассмотрим структуру матрицы S и осуществляемого ею преобразования (2.6). Обозначим через K пересечение касательной плоскости

¹ Здесь и далее знак ' означает транспонирование матрицы.

к поверхности разрыва $F_\alpha = 0$ (в точке M_α) с плоскостью $t = t_\alpha$. Векторы в плоскости $t = t_\alpha$, параллельные K , удовлетворяют уравнению $h^{-1}x = 0$.

Пусть

$$\gamma = \frac{(dF_\alpha/dt)_{M_\alpha}^+}{(dF_\alpha/dt)_{M_\alpha}^-} = 1 + h^{-1}\xi$$

Согласно условию 6° § 1 величина $\gamma > 0$.

Рассмотрим порознь три случая.

Первый случай: $\gamma \neq 1$. В этом случае $h^{-1}\xi \neq 0$ и ξ не принадлежит к K . Для любого вектора x имеет место однозначное разложение $x = x_\xi + x_k$.

Поскольку

$$\text{то } S\xi = \xi + \xi(h^{-1}\xi) = \gamma\xi, \quad x_\xi \parallel \xi,$$

$$Sx_\xi = \gamma x_\xi$$

С другой стороны

$$Sx_k = x_k + \xi(h^{-1}x_k) = x_k$$

Таким образом, преобразование $x^+ = Sx^-$ не изменяет векторов, параллельных K , а векторы, параллельные ξ , умножает на γ . Компоненты векторов x^- и x^+ связаны соотношениями

$$x_\xi^+ = \gamma x_\xi^-, \quad x_k^+ = x_k^-$$

Из сказанного следует, что матрица S имеет простые элементарные делители и характеристические числа γ — первой кратности и 1 — $(n-1)$ -й кратности.

Второй случай: $\gamma = 1$, $\xi \neq 0$, $h \neq 0$. В этом случае $\xi \in K$. Все характеристические числа матрицы S равны единице, но $S \neq E$. Матрица S имеет один элементарный делитель второй степени, а все остальные — первой.

Третий случай: $\gamma = 1$ и $\xi = 0$ или $h = 0$. В этом случае $S = E$ и $x^+ = x^-$. Таким образом, все интегральные кривые линейного приближения непрерывны при $t = t_\alpha$ только тогда, когда правые части дифференциальных уравнений (0.1) непрерывны в точке M_α интегральной кривой $z = z^\circ(t)$ или в этой точке поверхность разрыва $F_\alpha = 0$ касается плоскости $t = t_\alpha$.

4°. Если ввести в рассмотрение разрывные функции

$$h_k(t) = \left[\frac{\partial F_\alpha / \partial z_k}{dF_\alpha / dt} \right]_{z=z^\circ(t)}$$

то из (2.5) будет следовать, что функция $\Sigma h_k(t) x_k(t)$ непрерывна.

Тогда систему линейного приближения можно записать так:

$$Dx_i = \sum_k \left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_k} \right)_{z=z^\circ(t)} + \sum_x \xi_i h_k(t) \delta(t - t_\alpha) \right] x_k \quad (2.7)$$

где $\delta(t)$ — функция Дирака, а Dx_i — производная функции x_i с учетом δ -членов¹.

С другой стороны, при помощи несложных вычислений можно показать, что выражение, стоящее в квадратных скобках, представляет собой обобщенную частную производную по z_k от правой части f_i (т. е. производную с учетом δ -членов), взятую при $z = z^\circ(t)$:

$$(D_k f_i)_{z=z^\circ(t)} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_k} \right)_{z=z^\circ(t)} + \sum_{\alpha} \xi_i h_k(t) \delta(t - t_\alpha) \quad (2.8)$$

Поэтому систему линейного приближения (1.3)+(1.4) можно записать в форме

$$Dx_i = \sum_k (D_k f_i)_{z=z^\circ(t)} x_k \quad (2.9)$$

которая отличается от линейного приближения (0.2) при непрерывных правых частях только тем, что обычные производные dx_i/dt , $\partial f_i/\partial z_k$ заменены обобщенными производными Dx_i , $D_k f_i$ ².

5°. Введем в рассмотрение отклонение

$$x = z - z^\circ(t) \quad (2.9)$$

и перепишем уравнение (2.2) в отклонениях

$$\frac{dx}{dt} = p(x, t), \quad [p(x, t) = f(z^\circ(t) + x, t) - f(z^\circ(t), t)] \quad (2.10)$$

Уравнения поверхностей разрыва теперь запишутся так:

$$P_\alpha(x, t) = 0 \quad (P_\alpha(x, t) \equiv F_\alpha(z^\circ(t) + x, t)) \quad (2.11)$$

В $n+1$ -мерном пространстве x, t поверхность разрыва (2.11) непрерывна, как и поверхность $F_\alpha = 0$ в пространстве z, t , но в отличие от поверхности $F_\alpha = 0$ в пространстве z, t поверхность (2.11) не является гладкой и имеет изломы по линии пересечения с плоскостью $t = t_\alpha$.

Из-за второго слагаемого в формуле (2.10) функция $p(x, t)$ имеет разрывы не только на поверхностях $P_\alpha = 0$, но и на плоскостях $t = t_\alpha$.

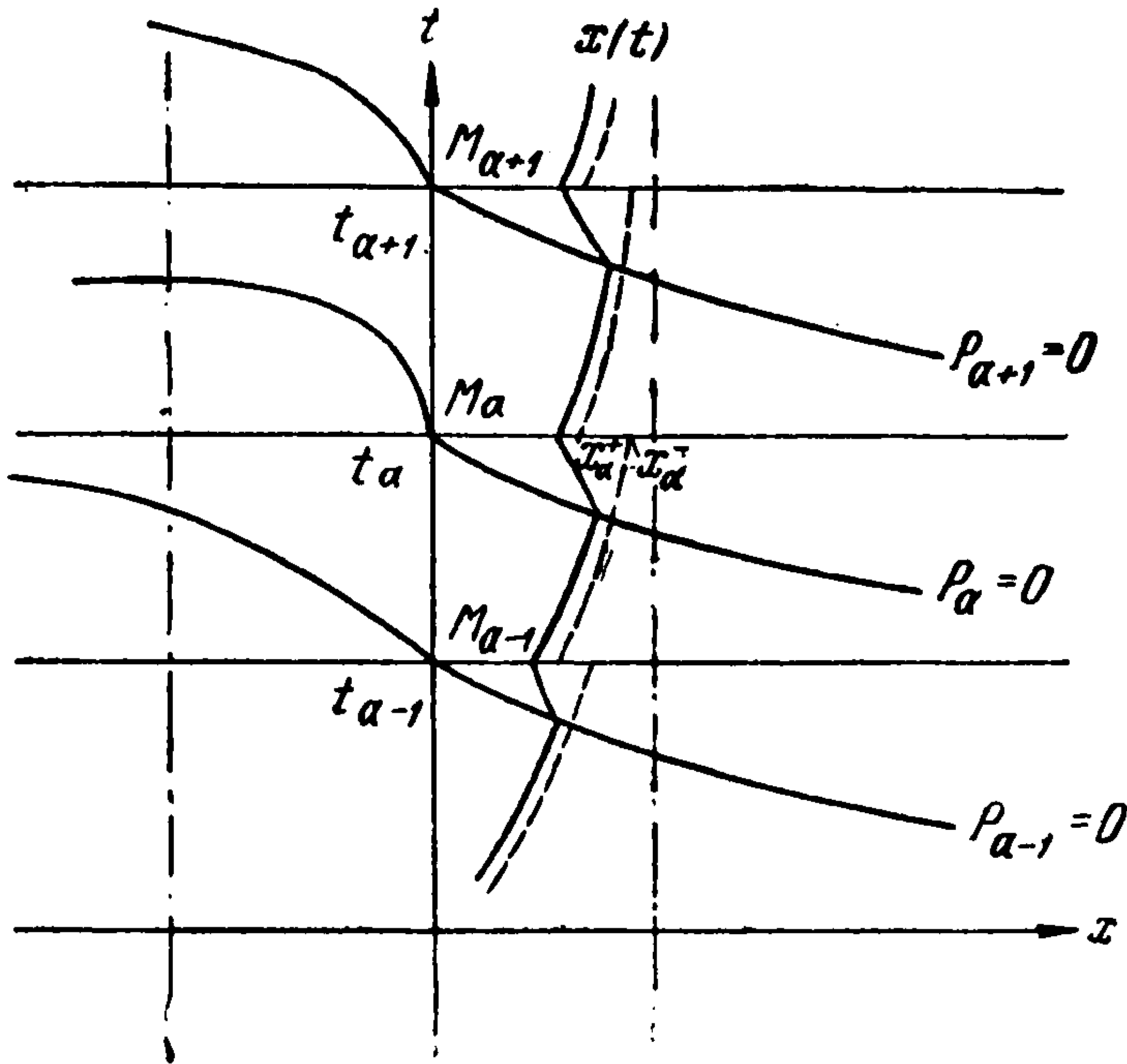
¹ Мы здесь исходим из того, что производную всякой разрывной (при $t = t_\alpha$) функции $x(t)$ с величинами разрывов η_α можно записать с учетом δ -членов суммой

$$\frac{dx}{dt} + \sum_{\alpha} \eta_\alpha \delta(t - t_\alpha)$$

и что произведение непрерывной функции $z(t)$ на $\delta(t - t_\alpha)$ равно $z(t_\alpha) \delta(t - t_\alpha)$. Напомним также, что ξ_i и $h_k(t)$ зависят еще от индекса α , который, как это было оговорено, здесь опускается.

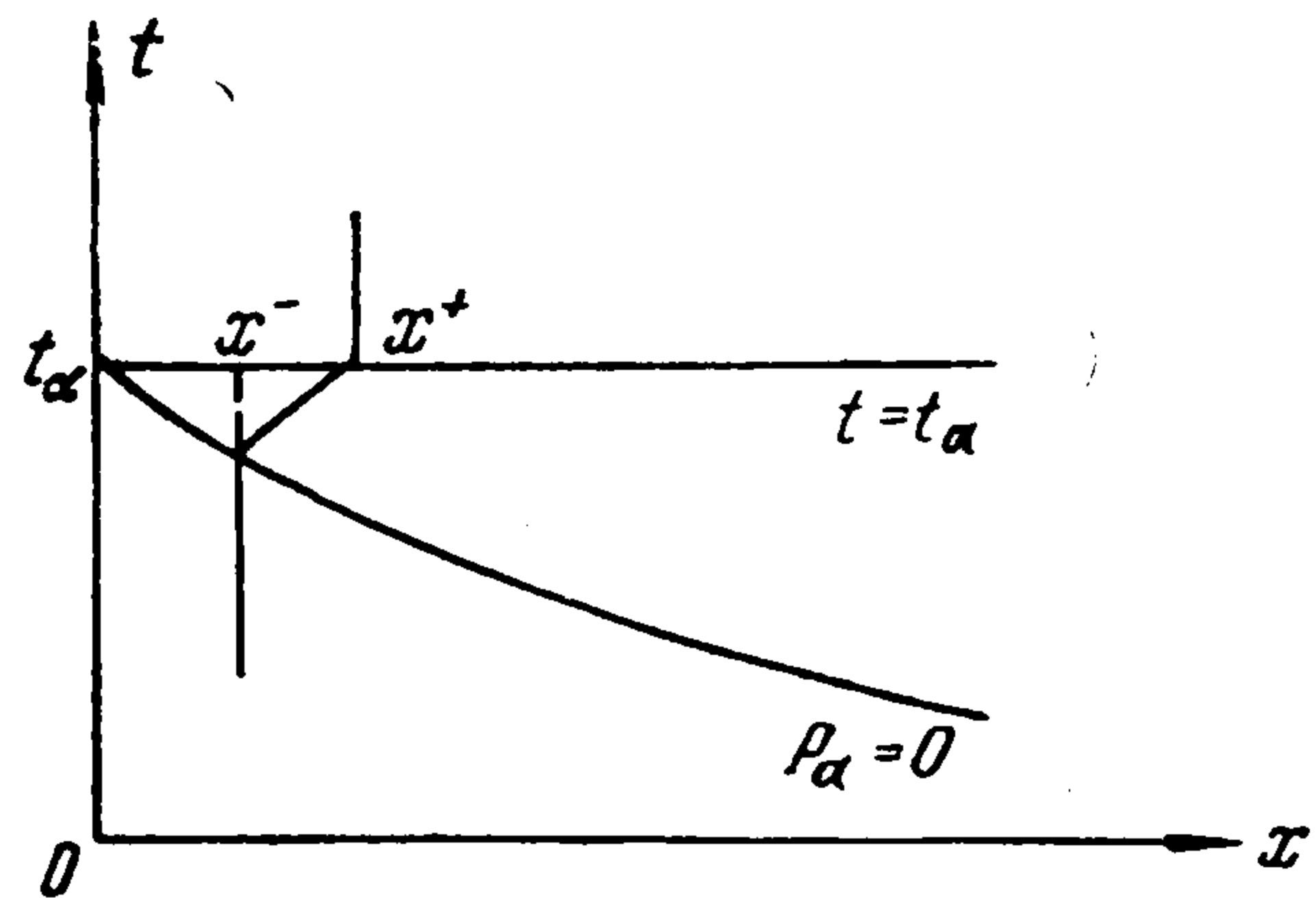
² Применительно к частному случаю системы, отличающейся от линейной с постоянными коэффициентами наличием в правой части одной нелинейной функции от одного аргумента типа $\text{sig } pz$, в книге [2] линейное приближение составлялось с δ -функциями в форме, которая получается как частный случай уравнений (2.9). При этом автор фактически опирался на классическую теорему Ляпунова, хотя применение ее к разрывным системам не было обосновано.

Решения же системы (2.10) так же непрерывны, как и решение исходной системы (0.1). Пространство z, t переходит в пространство x, t так (фиг. 2), что каждая плоскость $t = \text{const}$ преобразуется в себя параллельным сдвигом, при котором точка пересечения этой плоскости с кривой $z = z^\circ(t)$ переходит в точку оси t . Теперь осью цилиндра C в пространстве x, t является ось t . Поверхности $P_\alpha = 0$ и плоскости $t = t_\alpha$



Фиг. 2

являются осями цилиндра C в пространстве x, t . Поверхности $P_\alpha = 0$ и плоскости $t = t_\alpha$



Фиг. 3

разбивают цилиндр C на *центральные* и *угловые* области. Последние расположены между поверхностями $P_\alpha = 0$ и соответствующими плоскостями $t = t_\alpha$.

Угловые области будем называть *верхними* или *нижними*, если ограничивающая поверхность $P_\alpha = 0$ у этих областей проходит соответственно над или под плоскостью $t = t_\alpha$. В каждой точке оси t , отличной от точек M_α , функция $p(x, t)$ равна нулю.

В точке же M_α оси t ($t = t_\alpha$) функция $p(x, t)$ может иметь три значения: нуль — при подходе из центральной области, ξ и $-\xi$ при подходе соответственно из нижней или верхней угловой области.

6°. Теперь условиям разрывов может быть дано элементарное геометрическое истолкование. Пусть для конкретности интегральная кривая нелинейной системы (2.10) пересекает нижнюю угловую область, прилегающую к плоскости $t = t_\alpha$ (фиг. 3). Рассматриваемую траекторию выберем в малой окрестности оси t , ее направление будем считать поэтому мало отличным от вертикали. Продолжим траекторию через угловую область с сохранением этого вертикального направления. Если точку ее пересечения с плоскостью $t = t_\alpha$ обозначить через x^- , а точку пересечения той же плоскости $t = t_\alpha$ с истинной (ломаной) интегральной кривой через x^+ , то с точностью до малых высшего порядка из прямоугольного треугольника получаем условия разрыва (2.4).

Действительно, заменим уравнение поверхности разрывов $P_\alpha = 0$ уравнением касательной плоскости

$$\left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial x}\right)_{M_\alpha}' x + \left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial t}\right)_{M_\alpha} (t - t_\alpha) = 0$$

Согласно (2.12)

$$\left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial x}\right)_{M_\alpha} = \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial z}\right)_{M_\alpha}, \quad \left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial t}\right)_{M_\alpha} = \left(\frac{dF_\alpha}{dt}\right)_{M_\alpha}^-$$

Подставляя эти производные в полученное уравнение касательной плоскости и разрешая его относительно $t - t_\alpha$, получаем

$$t_\alpha - t = h^- x$$

С точностью до бесконечно малых второго порядка наклон траектории в угловой области равен ξ . Поэтому

$$x^+ - x^- = \xi(t_\alpha - t_1)$$

где t_1 — значение t при входе траектории в угловую область, т. е. при $x = x^-$. Следовательно,

$$x^+ - x^- = \xi h^- x^- \quad (2.12)$$

§ 3. Преобразование Ляпунова. К системе линейного приближения применим преобразование Ляпунова

$$x = L(t)y, \quad L(t) = X(t)e^{-At}, \quad A = \frac{1}{\tau} \ln U \quad (3.1)$$

Здесь L — матрица преобразования, $X(t)$ — фундаментальная матрица линейного приближения (2.3) + (2.4), U — постоянная матрица, фигурирующая в тождестве (1.6), а y — столбец, составленный из новых переменных y_i .

Если через $Y(t)$ обозначать фундаментальную матрицу системы (2.3) + (2.4), преобразованной к переменным y_i , то из первого равенства (3.1) следует, что $X(t) = L(t)Y(t)$ или, учитывая второе равенство (3.1), $Y(t) = e^{At}$.

Отсюда сразу вытекает, что уравнение линейного приближения в переменных y имеет вид:

$$dy/dt = Ay \quad (3.2)$$

и что интегральные кривые системы линейного приближения в пространстве x, t непрерывны. Раньше в пространстве x, t линейное приближение описывалось линейными уравнениями (2.3) с переменными кусочно-непрерывными коэффициентами и условиями скачков (2.4); теперь же, в пространстве y, t условия скачков отсутствуют, так как интегральные кривые непрерывны.

Таким образом, рассматриваемое в этой работе линейное приближение приводимо в смысле Ляпунова, но в отличие от классического случая, рассмотренного Ляпуновым, периодическая матрица $L(t)$ разрывна при $t = t_\alpha$, так как при этих значениях t испытывают разрывы столбцы матрицы $X(t)$ и, следовательно, сама матрица $X(t)$. Действительно, согласно (2.6) $X^+ = SX^-$ при $t = t_\alpha$ и, следовательно, $L^+ = SL^-$.

Применив теперь преобразование Ляпунова к исходной нелинейной системе (2.10), получим систему

$$\frac{dy}{dt} = q(y, t) \quad \left(q = L^{-1}p - L^{-1} \frac{dL}{dt} y \right) \quad (3.3)$$

Поверхности разрыва $P_\alpha(x, t) = 0$ переходят в поверхности $Q_\alpha(y, t) = 0$, где $Q_\alpha(y, t) \equiv P_\alpha(Ly, t)$.

В отличие от поверхностей $P_\alpha(x, t) = 0$, которые непрерывны и на линии пересечения с плоскостями $t = t_\alpha$ имеют лишь изломы, поверх-

ность $Q_\alpha(y, t) = 0$ имеет разрывы вдоль этих линий пересечения, т. е. состоит из двух непрерывных частей (при $t \leq t_\alpha$ и $t \geq t_\alpha$), которые пересекаются с плоскостью $t = t_\alpha$ по различным кривым, проходящим через одну и ту же точку $t = t_\alpha$ оси t (соответствующую M_α). В координатах x, t интегральные кривые системы (2.10) были непрерывны. Соответствующие этим кривым интегральные кривые системы (3.3) в пространстве y, t разрывны при $t = t_\alpha$, так как при этих значениях t разрывна матрица $L(t)$. При $t = t_\alpha$ имеем

$$x = L^+y^+ = L^-y^- \quad (3.4)$$

Итак, в пространстве y, t интегральная кривая невозмущенного движения, как и в пространстве x, t , совпадает с осью t . Кривая возмущенного движения в пространстве (y, t) в отличие от пространства x, t имеет изломы (на поверхностях $Q_\alpha = 0$), но в отличие от пространства x, t еще и разрывна на плоскостях $t = t_\alpha$; эти разрывы определяются формулами (3.4). Траектории же линейного приближения в пространстве y, t непрерывны и определяются системой линейных дифференциальных уравнений (3.2) с постоянными и всюду одинаковыми коэффициентами. Как и пространство x, t , пространство y, t разделено поверхностями $Q_\alpha = 0$ и плоскостями $t = t_\alpha$ на центральные и угловые области.

§ 4. Доказательство теорем. Пусть нулевое решение линейного приближения (1.3) + (1.4) асимптотически устойчиво. Тогда асимптотически устойчиво решение $y = 0$ системы (3.2), и потому все характеристические числа матрицы A имеют отрицательные действительные части. В этом случае, как показал Ляпунов, существует положительно-определенная квадратичная форма $V(y)$, полная производная которой $(dV/dt)^\circ$, вычисленная при помощи уравнений (3.2), является отрицательно-определенной:

$$V(y) > 0, \quad (dV/dt)^\circ < 0 \quad (y \neq 0)$$

Проследим теперь за изменением значения этой же функции $V(y)$ вдоль разрывных интегральных кривых нелинейной системы (3.3).

Интегральная кривая проходит по центральным областям, по угловым областям и имеет разрывы на плоскостях $t = t_\alpha$. Ниже показывается, что значение функции V вдоль траектории убывает на центральных участках, и дается оценка этого убывания. В угловых же областях значения V могут возрастать. Дается оценка этого возрастания и показывается, что оно компенсируется скачками функции V при прохождении через примыкающие к угловым областям плоскости $t = t_\alpha$.

В центральной области нелинейная система (3.3) имеет систему (3.2) своим линейным приближением. Поэтому в центральной области

$$q = Ay + (*)$$

Здесь и далее $(*)$ и $(**)$ означает совокупность членов, порядок малости которых по отношению к y соответственно выше первого или второго. Тогда

$$\frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dt} \right)^{\circ\circ} = \frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dt} \right)^\circ + \frac{1}{V} (**)$$

где производные $(dV/dt)^{\circ\circ}$ и $(dV/dt)^\circ$ вычисляются соответственно при помощи систем уравнений (3.3) и (3.2).

Первое слагаемое в правой части является непрерывной однородной функцией нулевого измерения, принимающей отрицательные значения, и имеет отрицательный максимум $-\mu^2$. Второе же слагаемое стремится к нулю при $y \rightarrow 0$ и потому при любом $\mu_1^2 < \mu^2$ и достаточно малых y в силу (4.2)

$$\frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dt} \right)^{\circ\circ} \leq -\mu_1^2 \quad (4.3)$$

и, следовательно,

$$V \leq V^* e^{-\mu_1^2 (t-t^*)} \quad (4.4)$$

Здесь V^* и V — значения V в моменты t^* и t ($t^* < t$), в которые точка интегральной кривой находится в данной центральной области. Формула (4.4) определяет быстроту убывания функции V вдоль интегральной кривой в центральной области.

В угловой области при $y \rightarrow 0$ (тогда и t стремится к соответствующему t_α) функция q имеет конечный предел $\eta = (L^-)^{-1} \xi$ для нижней и $\eta = -(L^+)^{-1} \xi$ для верхней угловой области.

Поэтому в угловой области

$$\frac{1}{V\bar{V}} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{V\bar{V}} \sum_k \frac{\partial V}{\partial y_k} q_k = \frac{1}{V\bar{V}} \sum_k \frac{\partial V}{\partial y_k} \eta_k + \frac{1}{V\bar{V}} \quad (*)$$

при достаточно малых y — величина, ограниченная

$$\left| \frac{1}{V\bar{V}} \frac{dV}{dt} \right| < 2K$$

и, следовательно,

$$|V\bar{V} - V'\bar{V}'| < K |t - t'|$$

где V и V' — значения V в моменты t и t' в пределах одной и той же угловой области. Так как $|t - t'|$ — величина по крайней мере первого порядка малости по отношению к y , то и отношение

$$\frac{V\bar{V}}{V'\bar{V}'} = 1 + \frac{V\bar{V} - V'\bar{V}'}{V'\bar{V}'} \leq 1 + \frac{K |t - t'|}{V\bar{V}}$$

ограничено при достаточно малых y , т. е. существует такое число N , что

$$V \leq NV' \quad (4.5)$$

т. е. коэффициент возрастания V в угловой области конечен. Так как число существенно различных угловых областей конечно, то число N может быть выбрано одним и тем же для всех угловых областей.

Покажем теперь, что изменение V в угловой области компенсируется соответствующим скачком $V(y^+) - V(y^-)$. Пусть для конкретности интегральная кривая пересекает нижнюю угловую область, переходя в пространствах x, t и y, t от точек (x_1, t_1) и (y_1, t_1) на поверхности разрыва до точек (x, t_α) и (y, t_α) на плоскости $t = t_\alpha$ (фиг. 4). Уравнение поверхности разрыва $P_\alpha(x, t) = 0$ представим в виде¹, разрешенном относительно t :

$$t_\alpha - t = h^{-1} x + (*) \quad (4.6)$$

¹ Так как $x = Ly$ и $y = L^{-1}x$ и матрицы $L(t)$ и $L^{-1}(t)$ имеют ограниченные коэффициенты, то бесконечно малые величины относительно x будут бесконечно малыми величинами относительно y того же порядка малости и наоборот. Поэтому здесь употребляются прежние обозначения (*) и (**).

Так как в нижней угловой области $\lim p = \xi$ при $x \rightarrow 0$, то

$$x - x_1 = \int_{t_1}^{t_\alpha} p dt = \xi(t_\alpha - t_1) + (*) = \xi h^{-1} x_1 + (*) = B^{-1} x_1 + (*)$$

т. е.

$$x = Sx_1 + (*) \quad (4.7)$$

С другой же стороны,

$$x_1 = L(t_1)y_1 = L^{-1}y_1 + [L(t_1) - L(t_\alpha - 0)]y_1 = L^{-1}y_1 + (*) \quad (4.8)$$

Учитывая, что $L^+ = SL^-$, из (3.4), (4.7) и (4.8) имеем

$$L^+y^+ = x = Sx_1 = SL^{-1}y_1 + (*) = L^+y_1 + (*) \quad (4.9)$$

Умножая слева почленно на $(L^+)^{-1}$, получим

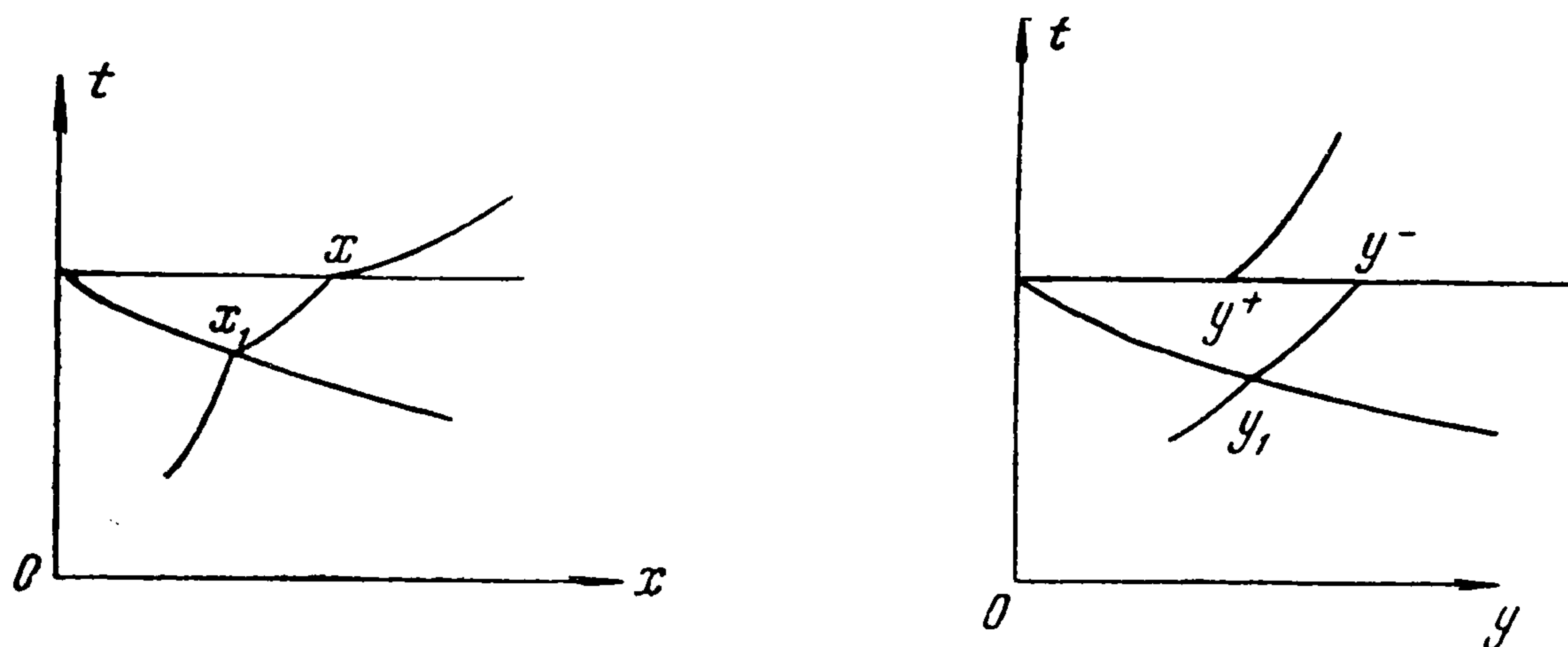
$$y^+ = y_1 + (*), \quad V(y^+) = V(y_1) + (**)$$

и поэтому при достаточно малых y

$$e^{-\eta} < \frac{V(y^+)}{V(y_1)} = 1 + \frac{1}{V(y_1)}(**) < e^\eta \quad (4.11)$$

где η — сколь угодно малое положительное число.

Пусть $T = \min_x (t_{\alpha+1} - t_\alpha)$, а ν — произвольное положительное число, меньше μ и $\nu < \mu_1 < \mu$. Возьмем $\gamma_1 < 1/2(\mu_1^2 - \nu^2)T$. Число $\varepsilon > 0$ выберем



Фиг. 4

столь малым, чтобы внутри эллиптического цилиндра $V = \varepsilon$ выполнялись неравенства (4.4), (4.5) и (4.11) и время Δt пребывания в любой угловой области внутри цилиндра $V = \varepsilon$ было меньше $1/2(\mu_1^2 - \nu^2)T / \mu_1^2$. Такой выбор границы для ε возможен, так как в силу периодичности и свойства 7° (§ 1) число подлежащих рассмотрению центральных и угловых областей конечно. Рассмотрим последовательность моментов времени $t_\alpha^* = 1/2(t_\alpha + t_{\alpha+1})$. Соответствующие плоскости $t = t_\alpha^*$ внутри цилиндра $V = \varepsilon$ не пересекают угловых областей.

Пусть $\delta = \varepsilon / N$. Возьмем начальную точку интегральной кривой при $t = t_1^*$ внутри цилиндра $V = \delta$. Эта точка принадлежит центральной области. При изменении t в пределах $t_1^* \leq t \leq t_2^*$ функция V вдоль интегральной кривой сначала убывает, затем может возрасти (возрастание компенсируется скачком), затем снова убывает. Поскольку коэффициент возрастания не превосходит N , то в интервале $t_1^* \leq t \leq t_2^*$ интегральная кривая проходит внутри цилиндра $V = \varepsilon$.

При этом, полагая $V_\alpha = V_{t-t_\alpha^*}$, будем иметь

$$V_2 \leq V_1 e^{-\mu_1^2(T-\Delta t)+\eta} = V_1 e^{-\nu^2 T} \quad (4.12)$$

Так как $V_2 < V_1$, то точка интегральной кривой при $t = t_2^*$ снова находится внутри цилиндра $V = \delta$, и потому для следующего отрезка интегральной кривой ($t_2^* \leq t \leq t_3^*$) можно повторить приведенные выше рассуждения и т. д. Отсюда заключаем, что любая интегральная кривая нелинейной системы, начинающаяся при $t = t_1^*$ внутри цилиндра $V = \delta$, будет проходить все время внутри цилиндра $V = \varepsilon$ и

$$V_\alpha \leq V_1 e^{-(\alpha-1)\nu^2 T}$$

Отсюда $\lim V_\alpha = 0$ при $\alpha \rightarrow \infty$. Так как в интервале $t_\alpha^* \leq t \leq t_{\alpha+1}^*$ имеет место неравенство $V \leq NV_\alpha$, то $\lim V(t) = 0$ при $t \rightarrow \infty$. Теорема 1 доказана.

Приступая теперь к доказательству теоремы 2, примем, что хотя бы один из корней характеристического уравнения линейного приближения по модулю больше единицы. Тогда один из корней характеристического уравнения матрицы A имеет положительную действительную часть. В этом случае существует квадратичная форма $V(y)$, принимающая положительное значение при некотором y_0 и имеющая в силу (3.2) положительно-определенную производную

$$V_0 = V(y_0) > 0, \quad \left(\frac{dV}{dt}\right)^\circ > 0$$

Пусть

$$\kappa^2 = \min \frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dt}\right)^\circ \quad (V \geq V_0)$$

Тогда в любой центральной области вдоль отрезка интегральной кривой, где $V \geq V_0$, при достаточно малых y

$$\frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dt}\right)^\circ \geq \kappa_1^2 > 0 \quad (4.13)$$

Здесь $\kappa_1 < \kappa$, а производная $(dV/dt)^\circ$ выражена с помощью (3.3). Пусть снова $T = \min_\alpha (t_{\alpha+1} - t_\alpha)$ и $0 < \gamma < \kappa_1^2$. Выберем столь малое ε , чтобы внутри цилиндра $V = \varepsilon$ выполнялись неравенства (4.11) и (4.13) и время Δt пребывания в любой угловой области внутри цилиндра было меньше $1/2 T (\kappa_1^2 - \gamma) / \kappa_1^2$. Пусть, кроме того, внутри цилиндра $V = \varepsilon$ имеет место неравенство $\eta < 1/2 T (\kappa_1^2 - \gamma)$. Тогда вместо неравенства (4.12) будем иметь

$$V_1 \geq V_0 e^{\gamma T}$$

Это неравенство справедливо, если в интервале $t_1 \leq t \leq t_2$ интегральная кривая находится внутри цилиндра $V = \varepsilon$. При этом $V_1 \geq V_0$ и рассуждения можно повторить для второго отрезка интегральной кривой и т. д. В некоторый момент времени интегральная кривая выйдет за пределы цилиндра $V = \varepsilon$, так как значения V_α растут быстрее, нежели члены геометрической прогрессии со знаменателем $q = e^{\gamma T} > 1$. Теорема 2 доказана.

Поступила 15 V 1957

Московский
физико-технический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Л я п у н о в А. М. Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892.
2. Ц ы п к и н Я. З. Теория релейных систем. М., 1955.