

О ФЛАТТЕРЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК И ПАНЕЛЕЙ, ДВИЖУЩИХСЯ В ПОТОКЕ ГАЗА

Р. Д. Степанов

(Москва)

Уравнения оболочек приняты в форме общей технической теории пологих оболочек [1] и оболочек средней длины [2] В. З. Власова.

Аэродинамические силы, действующие на оболочку, учитываются лишь как силы избыточного давления по формуле, предложенной А. А. Ильюшиным [3].

В работе приняты следующие обозначения: α, β — безразмерные координаты точки на цилиндрической поверхности оболочки, представляющие собой: α — выраженное в долях радиуса R расстояние по образующей, а β — центральный угол, R, h, l — радиус, толщина и длина цилиндрической оболочки, E, σ, ρ — модуль Юнга, коэффициент Пуассона, плотность материала оболочки, D — цилиндрическая жесткость, u, v, w — компоненты вектора смещения оболочки, V — скорость потока, v_0 — скорость звука на бесконечности, p_0 — давление газовой среды на бесконечности, κ — показатель политропы; $\omega = p + iq$ — комплексная частота, c, B — постоянные,

$$[c^2 = \frac{h^2}{12R^2}, \quad D = \frac{Eh^2}{12(1-\sigma^2)}, \quad B = \rho_0 \frac{\kappa}{v_0}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}]$$

B_1 — коэффициент демпфирования, Z — компонента поперечной нагрузки.

1. Исходные соотношения теории цилиндрических оболочек. В системе безразмерных координат α, β в случае, когда на оболочку действует нагрузка, направленная в каждой точке по нормали к поверхности ($X = Y = 0, Z \neq 0$), основное разрешающее уравнение пологих цилиндрических оболочек имеет вид [1]:

$$\nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \Phi + \frac{1-\sigma^2}{c^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} = \frac{R^4}{D} Z \quad (1.1)$$

где $\Phi(\alpha, \beta)$ — скалярная функция, определяемая по формулам

$$u = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta^2} - \sigma \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha^3}, \quad v = - \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \beta^3} + (2 + \sigma) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta} \right], \quad w = \nabla^2 \nabla^2 \Phi \quad (1.2)$$

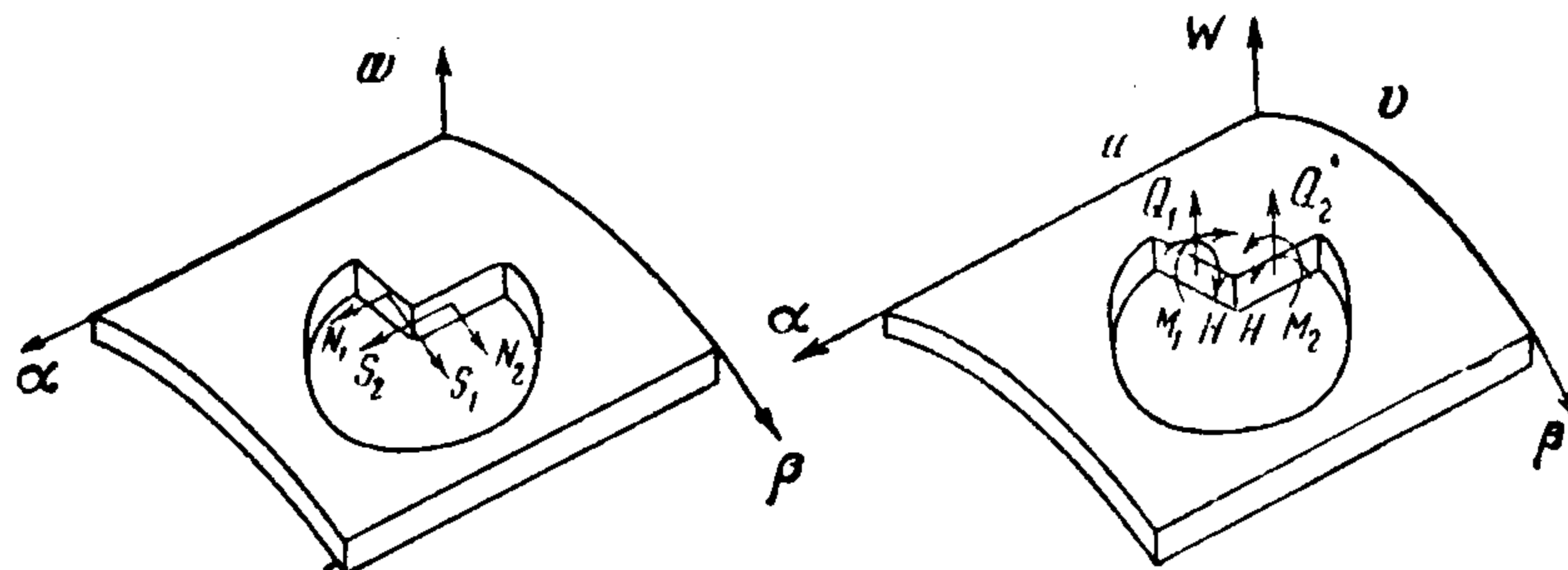
Внутренние силы полой цилиндрической оболочки определяются через функции $\Phi(\alpha, \beta)$ следующей группой формул:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2}, & M_1 &= \frac{D}{R^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \sigma \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \nabla^2 \nabla^2 \Phi \\ N_2 &= \frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4}, & M_2 &= \frac{D}{R^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \sigma \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \nabla^2 \nabla^2 \Phi \\ S &= - \frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^3 \partial \beta}, & H &= - \frac{D(1-\sigma)}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \nabla^2 \nabla^2 \Phi \\ Q_1 &= - \frac{D}{R^3} \frac{\partial}{\partial \alpha} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \Phi, & Q_2 &= - \frac{D}{R^3} \frac{\partial}{\partial \beta} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \Phi \end{aligned} \quad (1.3)$$

Обобщенные поперечные силы, определяемые в смысле Кирхгофа и необходимые для формулировки граничных условий, вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} Q_1^* &= -\frac{D}{R^3} \left[\frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} + (2 - \sigma) \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2} \right] \nabla^2 \nabla^2 \Phi \\ Q_2^* &= -\frac{D}{R^3} \left[\frac{\partial^3}{\partial \beta^3} + (2 - \sigma) \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta} \right] \nabla^2 \nabla^2 \Phi \end{aligned} \quad (1.4)$$

Положительные направления сил и моментов показаны на фиг. 1.



Фиг. 1

В работе будет широко использоваться приближенная теория расчета цилиндрических оболочек средней длины [2].

В системе безразмерных координат α, β при $X = Y = 0$, а $Z \neq 0$ основное разрешающее уравнение цилиндрических оболочек средней длины имеет вид:

$$\frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \alpha^4} + \frac{c^2}{1 - \sigma^2} \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \beta^4} \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right]^2 = \frac{R^2}{Eh} Z \quad (1.5)$$

Здесь функция $\Phi_1(\alpha, \beta)$ определяется формулами

$$u = \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial \alpha \partial \beta^2}, \quad v = -\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial \beta^3}, \quad w = \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \beta^4} \quad (1.6)$$

Внутренние силы цилиндрических оболочек средней длины выражаются через функцию $\Phi_1(\alpha, \beta)$ следующей группой формул:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2}, \quad N_2 = \frac{Eh}{R} \left[\frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \alpha^4} + \frac{c^2}{1 - \sigma^2} \left(\frac{\partial^6 \Phi_1}{\partial \beta^6} + \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \alpha^4} \right) \right] \\ M_1 &= \frac{D}{R^2} \sigma \left[\frac{\partial^6 \Phi_1}{\partial \beta^6} + \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \beta^4} \right], \quad M_2 = \frac{D}{R^2} \left[\frac{\partial^6 \Phi_1}{\partial \beta^6} + \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \beta^4} \right] \\ S &= -\frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \alpha^3 \partial \beta}, \quad H = -\frac{D}{R^2} (1 - \sigma) \left[\frac{\partial^6 \Phi_1}{\partial \alpha \partial \beta^5} + \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \alpha \partial \beta^3} \right] \\ Q_1 &= -\frac{D}{R^3} \left[\frac{\partial^7 \Phi_1}{\partial \alpha \partial \beta^6} + \frac{\partial^5 \Phi_1}{\partial \alpha \partial \beta^4} \right], \quad Q_2 = -\frac{D}{R^3} \left[\frac{\partial^7 \Phi_1}{\partial \beta^7} + \frac{\partial^5 \Phi_1}{\partial \beta^5} \right] \end{aligned} \quad (1.7)$$

К дифференциальным уравнениям (1.1) или (1.5) в каждом частном случае должны быть присоединены заданные на краях оболочки граничные условия.

§ 2. Постановка задачи. Выражение поперечной нагрузки Z , приходящейся на элемент поверхности оболочки, складывается из двух частей: из сил инерции

$$Z_1 = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

и сил аэродинамического воздействия сверхзвукового потока, направленного вдоль образующей и обтекающей оболочку извне, которые учитываются по формуле, предложенной А. А. Ильюшиным [3]:

$$Z_2 = BV \frac{\partial w}{R \partial \alpha} - B_1 \frac{\partial w}{\partial t} \quad (2.2)$$

Подставляя выражение (2.2) в уравнение (1.1) и учитывая третье из соотношений группы (1.2), запишем дифференциальное уравнение малых колебаний пологих цилиндрических оболочек:

$$c_*^2 \nabla^8 \Phi + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} + \frac{R^2}{E} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^4 \Phi - \frac{BVR}{Eh} \frac{\partial}{\partial \alpha} \nabla^4 \Phi + \frac{R^2 B_1}{Eh} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^4 \Phi = 0 \quad (2.3)$$

И соответственно, подставляя выражение для внешней нагрузки Z в уравнение (1.5) с учетом третьего соотношения группы (1.6), получим уравнение малых колебаний цилиндрических оболочек средней длины:

$$\frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \alpha^4} + c_*^2 \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \beta^4} \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right]^2 + \frac{R^2}{E} \rho \frac{\partial^6 \Phi_1}{\partial t^2 \partial \beta^4} - \frac{BVR}{Eh} \frac{\partial^5 \Phi_1}{\partial \alpha \partial \beta^4} + \frac{B_1 R^2}{Eh} \frac{\partial^5 \Phi_1}{\partial t \partial \beta^4} = 0 \quad (2.4)$$

В уравнения (2.3) и (2.4) введена новая безразмерная величина

$$c_*^2 = \frac{c^2}{1 - \sigma^2} = \frac{h^2}{12R^2(1 - \sigma^2)} \quad (2.5)$$

Во всех последующих выкладках будет принято $B = B_1$.

В 1954 г. под руководством А. А. Ильюшина были выполнены работы [4,5] по исследованию автоколебаний пластинок, движущихся в газе, которые во многом определили подход и методы решения поставленной задачи; некоторые результаты, заимствованные из указанных работ, ниже будут приводиться без вывода.

В работе рассматривается класс решений вида

$$\Phi(\alpha, \beta, t) = \psi(\alpha, \beta) e^{\omega t} \quad (2.6)$$

где $\omega = p + iq$ — постоянная комплексная частота.

В классе решений (2.6) задача о флаттере состоит в определении наименьшей скорости потока (эту скорость будем называть критической скоростью), при превышении которой появляются положительные вещественные части комплексной частоты.

Подставляя (2.6) в уравнение (2.3), получим после сокращения на $e^{\omega t}$:

$$c_*^2 \nabla^8 \psi + \frac{\partial^4 \psi}{\partial \alpha^4} - \lambda \nabla^4 \psi - \frac{BVR}{Eh} \frac{\partial}{\partial \alpha} \nabla^4 \psi = 0 \quad (2.7)$$

Здесь

$$-\lambda = \rho \frac{R^2 \omega^2}{E} + \frac{BR^2}{Eh} \omega \quad (2.8)$$

Уравнение (2.8) позволяет для каждого частного собственного значения λ определить два значения частоты:

$$\omega_{1,2} = -\frac{B}{2\rho h} \pm \left[\left(\frac{B}{2\rho h} \right)^2 - \frac{E\lambda}{\rho R^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.9)$$

Пусть для некоторых собственных значений один из корней (2.9) будет чисто мнимым числом. Тогда из (2.8) легко получить

$$\operatorname{Re} \lambda = \lambda_1 = \rho \frac{R^2}{E} q^2, \quad \operatorname{Im} \lambda = \lambda_2 = -\frac{BR^2}{Eh} q \quad (2.10)$$

Уравнения (2.10) на комплексной плоскости λ_1, λ_2 изображают точки квадратной параболы (фиг. 2)

$$\lambda_1 = \rho \frac{Eh^2}{B^2R^2} \lambda_2^2 \quad (2.11)$$

которую, следуя [4,5], назовем параболой устойчивости. Область, лежащая внутри параболы устойчивости, отвечает собственным значениям, для которых оба корня (2.9) имеют отрицательную вещественную часть, а область, лежащая вне параболы, соответствует собственным значениям, для которых вещественная часть одного из корней (2.9) имеет положительную вещественную часть.

§ 3. Неограниченная замкнутая цилиндрическая оболочка. Решение основного дифференциального уравнения малых колебаний (2.7) для рассматриваемого случая будем искать в виде

$$\psi(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_{kn} e^{i(n\beta + k\alpha)} \quad (3.1)$$

где $C_{k,n}$ — некоторое постоянное число, n, k — постоянные числа, обозначающие число полуволн в меридиональном направлении и в направлении образующей оболочки.

Подставив (3.1) в уравнение (2.7), получим характеристическое уравнение, из которого для λ получаем следующее выражение

$$\lambda_1 = c_*^2 (k^2 + n^2)^2 + \frac{k^4}{(k^2 + n^2)^2}, \quad \lambda_2 = -\frac{BVR}{Eh} k \quad (3.2)$$

На комплексной плоскости λ_1, λ_2 уравнения (3.2) изображают точки параболы восьмой степени:

$$\lambda_1 = c_*^2 \left[\frac{E^2 h^2}{B^2 R^2 V^2} \lambda_2^2 + n^2 \right]^2 + \frac{E^4 h^4 \lambda_2^4}{B^4 V^4 R^4} \left[\frac{E^2 h^2}{B^2 R^2 V^2} \lambda_2^2 + n^2 \right]^{-2} \quad (3.3)$$

Для определения критической скорости потока проанализируем вопрос о взаимном расположении параболы (3.3) с параболой устойчивости (2.11) в случае $n=0$ и $n \neq 0$. При $n=0$ (т. е. для случая, когда контур поперечного сечения оболочки в процессе деформации остается кругом) уравнения (3.2) принимают вид:

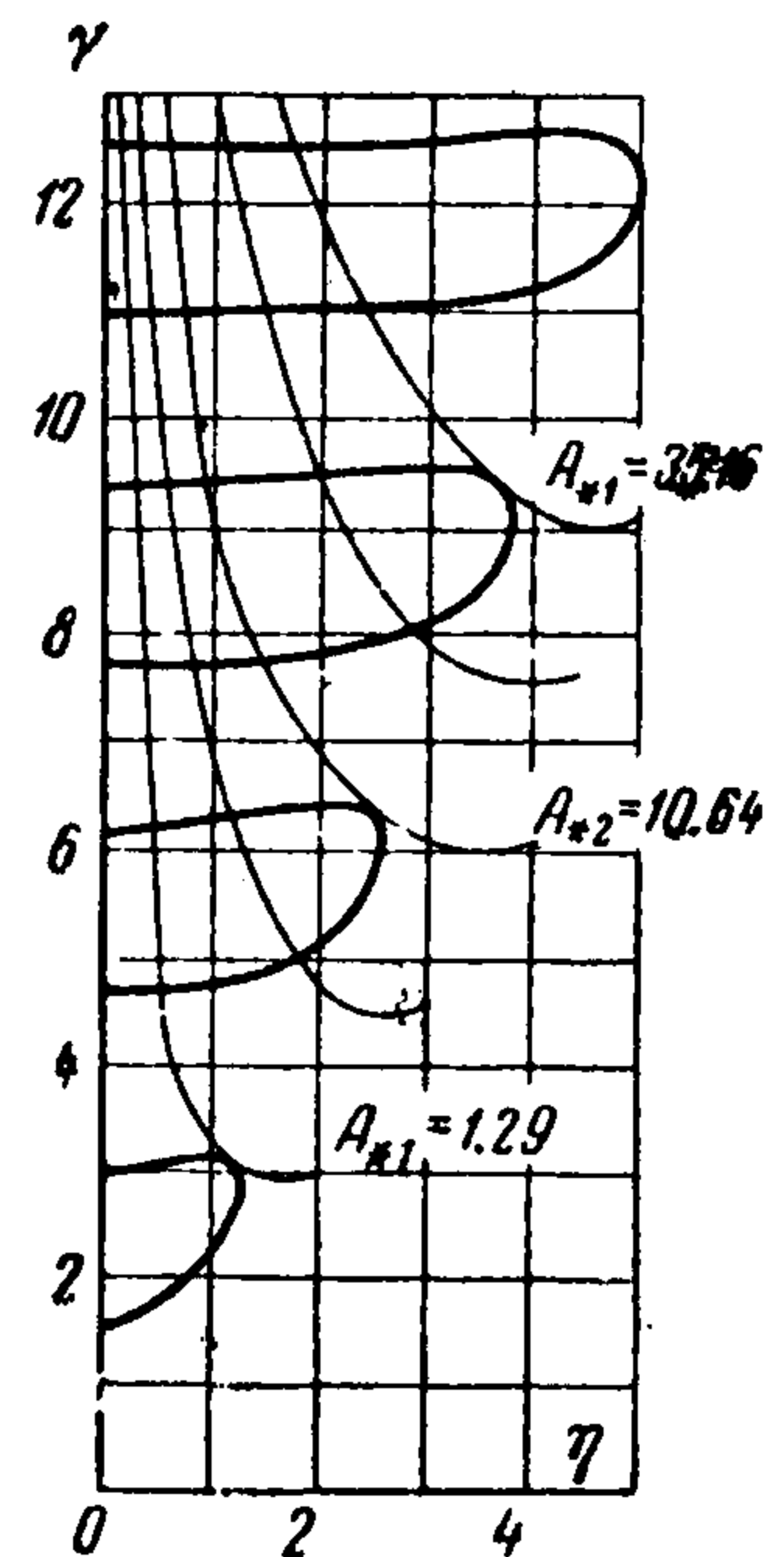
$$\lambda_1 = c_*^2 k^4 + 1, \quad \lambda_2 = -\frac{BRV}{Eh} k \quad (3.4)$$

Для точек взаимного пересечения параболы (3.4) с параболой устойчивости справедливы равенства

$$\rho \frac{R^2 q^2}{E} = c_*^2 k^4 + 1, \quad \frac{BR^2}{Eh} q = \frac{BVR}{Eh} k \quad (3.5)$$

Исключив из первого уравнения (3.5) параметр q , получим одно уравнение для определения точек взаимного пересечения двух исследуемых парабол:

$$k^4 - \rho \frac{V^2}{Ec_*^2} k^2 + \frac{1}{c_*^2} = 0 \quad (3.6)$$



Фиг. 2

решение которого будет

$$k_{1, 2, 3, 4} = \pm \left\{ \frac{\rho V^2}{2Ec_*^2} \pm \left[\left(\frac{\rho V^2}{2Ec_*^2} \right)^2 - \frac{1}{c_*^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (3.7)$$

Из (3.7) следует, что при

$$V_* > \left(\frac{2Ec_*}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.8)$$

парабола (3.4), пересекаясь с параболой устойчивости в четырех точках, выходит за пределы области устойчивости. Отсюда следует, что при скорости потока, большей $(2Ec_*/\rho)^{1/2}$, движение оболочки может быть неустойчивым.

Для исследования вопроса о взаимном пересечении параболы устойчивости с параболой (3.3), в общем случае, при $n \neq 0$ получим уравнение

$$k^8 + k^6 \left(4n^2 - \rho \frac{V^2}{Ec_*^2} \right) + k^4 \left(6n^4 + \frac{1}{c_*^2} - 2\rho \frac{V^2 n^2}{Ec_*^2} \right) + k^2 \left(4n^6 - \rho n^4 \frac{V^2}{Ec_*^2} \right) + n^8 = 0 \quad (3.9)$$

Решение уравнения (3.9) дает восемь корней:

$$k_i = \pm 2n^2 \left\{ \left[-a \pm (a^2 - 4b + 8n^4)^{\frac{1}{2}} \right] \pm \left[\left(-a \pm (a^2 - 4b + 8n^4)^{\frac{1}{2}} \right)^2 - 16n^4 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \quad (3.10)$$

где

$$a = 4n^2 - \rho \frac{V^2}{Ec_*^2}, \quad b = 2n^2 a + \frac{1}{c_*^2} - 2n^4 \quad (3.11)$$

Подобно тому, как это было сделано выше для случая $n = 0$, можно и здесь показать, что необходимое и достаточное условие, при котором парабола (3.3), пересекаясь с параболой устойчивости, выходит за пределы области устойчивости, сводится к определению условий появления комплексных корней (3.10).

Анализируя выражение (3.10), можно поставить два следующих существенно различных необходимых и достаточных условия того, чтобы парабола (3.3), пересекаясь с параболой устойчивости, вышла за пределы области устойчивости:

$$a^2 - 4b + 8n^4 = \rho^2 \frac{V^4}{E^2 c_*^4} - \frac{4}{c_*^2} \geq 0 \quad (3.12)$$

$$-a \pm (a^2 - 4b + 8n^4)^{\frac{1}{2}} < 4n^2$$

При (3.12) должно выполняться неравенство

$$a = 4n^2 - \rho \frac{V^2}{Ec_*^2} > 0 \quad (3.13)$$

Неравенства (3.12) и (3.13) дают возможность определить критические скорости:

$$V_* \geq \left(\frac{2Ec_*}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad n > \frac{1}{2} (c_*)^{-\frac{1}{2}} = n_* \quad (3.14)$$

$$V_* \geq \frac{1}{2n} \left[\frac{E}{\rho} (16n^4 c_*^2 + 1) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.15)$$

Формула критической скорости (3.14) тождественно совпадает с критической скоростью потока, найденной нами для замкнутой цилиндрической оболочки при $n = 0$, и, как видно из неравенства (3.13), ею можно пользоваться для всех значений $n > n_*$, что для класса тонких оболочек соответствует числу полуволи $n > 30 \div 50$, т. е. такому большому числу полуволи, при которых форма поперечного сечения мало отличается от круга.

Минимум скорости (3.15) по n имеет место при $n = 1/2 c_*^{-1/2}$ и в точности совпадает с критической скоростью, найденной выше при $n = 0$.

Из приведенного анализа следует, что флаттер замкнутой цилиндрической оболочки неограниченной длины, находящейся в сверхзвуковом потоке, может иметь место при скорости потока $V > [2Ec_*/\rho]^{1/2}$, когда форма поперечного сечения остается кругом.

Пользуясь формулами (2.9) и (3.2), можно получить два значения частоты, которые существенным образом зависят от скорости потока:

$$\omega_{1,2} = -\frac{B}{2\rho h} \pm \left\{ \left(\frac{B}{2\rho h} \right)^2 - \frac{E}{\rho R^2} \left[c_*^2 (k^2 + n^2)^2 + \frac{k^4}{(k^2 + n^2)^2} \right] + \frac{BVk}{\rho h} i \right\}^{1/2} \quad (3.16)$$

Решение дифференциального уравнения малых колебаний пологих оболочек (2.3), принятое нами в форме

$$\Phi(\alpha, \beta, t) = e^{i(n\beta + k\alpha)} e^{p+iq} \quad (3.17)$$

означает, что вдоль образующей оболочки распространяются волны, бегущие со скоростью

$$v_b = -q/k \quad (3.18)$$

Отделяя действительную часть комплексной частоты (3.16) от мнимой части, найдем

$$v_b = \pm \left\{ \frac{1}{2k^2} \left[\pm \left\{ \left[\left(\frac{B}{2\rho h} \right)^2 - \frac{E}{\rho R^2} \left(c_*^2 (k^2 + n^2)^2 + \frac{k^4}{(k^2 + n^2)^2} \right) \right]^2 + \frac{B^2 V^2 k^2}{h^2 \rho^2 R^2} \right\}^{1/2} - \left[\frac{B^2}{4\rho^2 h^2} - \frac{E}{\rho R^2} \left(c_*^2 (k^2 + n^2)^2 + \frac{k^4}{(k^2 + n^2)^2} \right) \right] \right\}^{1/2} \right\} \quad (3.19)$$

Пользуясь формулой (3.19), определим скорость распространения бегущей волны при $V = 0$:

$$v_b = \pm \left\{ \frac{E}{\rho R^2} \left[c_*^2 \frac{(k^2 + n^2)^2}{k^2} + \frac{k^2}{(k^2 + n^2)^2} + \frac{B^2}{4\rho^2 h^2 k^2} \right] \right\}^{1/2}$$

Минимальная скорость распространения бегущей волны имеет место при

$$n^2 = k \left[\left(\frac{1}{c_*} \right)^2 - k \right] \quad (5.20)$$

При этом она имеет значение

$$v_{b \min} = \left[\frac{2Ec_*^2}{\rho R^2} - \frac{B^2}{4\rho^2 h^2 k^2} \right]^{1/2} \quad (3.21)$$

§ 4. Неограниченная цилиндрическая панель, шарнирно опертая вдоль образующих. В рассматриваемом случае к дифференциальному уравнению малых колебаний (2.3) должны быть присоединены граничные условия

$$u = w = 0, \quad N_2 = M_2 = 0 \quad \text{при } \beta = 0 \text{ и } \beta = \beta_1 = s/R \quad (4.1)$$

Определяя по формулам (1.2) и (1.3) перемещения и внутренние силы оболочки через потенциальную функцию Φ , граничные условия на краях $\beta = 0$, $\beta = \beta_1$ можно записать в таком виде:

$$\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \beta^4} = \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \beta^6} = 0 \quad (4.2)$$

Представляя решение указанной краевой задачи в виде

$$\Phi(\alpha, \beta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} \sin \frac{n\pi\beta}{\beta_1} e^{ik\alpha} e^{\omega t} \quad (4.3)$$

и произведя выкладки, аналогичные тем, которые были приведены выше для общего случая $n \neq 0$, найдем формулу для критической скорости потока:

$$V_* \geq \frac{\beta_1}{2n\pi} \left[\frac{E}{\rho} \left(16 \frac{n^4 \pi^4}{\beta_1^4} c_*^2 + 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{E}{\rho} \left(\frac{4n^2 \pi^2 h^2}{12s^2(1-\sigma^2)} + \frac{s^2}{4R^2 n^2 \pi^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.4)$$

при $R \rightarrow \infty$ получим

$$V_{*\min} \geq \frac{\pi h}{s} \left[\frac{E}{\rho} \frac{1}{3(1-\sigma^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{при } n = 1 \quad (4.5)$$

Формула (4.5) совпадает с критической скоростью потока для бесконечной пластинки, шарнирно опертой вдоль краев, параллельных направлению потока, которая была получена впервые в работе [4].

Опуская все промежуточные выкладки, приведем формулу критической скорости потока для неограниченной замкнутой цилиндрической оболочки, найденной из рассмотрения дифференциального уравнения малых колебаний цилиндрических оболочек средней длины (2.4):

$$V_* \geq \left[\frac{2E}{\rho} c_* \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.6)$$

Формулой (4.6) можно пользоваться для всех $n \geq 2$. Из (4.6) следует, что при $n = \infty$ критическая скорость неограниченной замкнутой цилиндрической оболочки средней длины совпадает со скоростью неограниченной замкнутой цилиндрической оболочки, найденной, исходя из теории пологих оболочек.

§ 5. Флаттер замкнутых цилиндрических оболочек ограниченной длины при различных граничных условиях на торцах. Пользуясь уравнением малых колебаний оболочек средней длины (2.4), рассмотрим ряд краевых задач.

Введем в рассмотрение новую переменную ξ , связанную с α формулой

$$\alpha = \frac{l}{R} \xi \quad (5.1)$$

Тогда разрешающее уравнение малых колебаний (2.4) запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \xi^4} + c_*^2 \frac{l^4}{R^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right)^2 \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \xi^4} + \rho \frac{l^4}{ER^2} \frac{\partial^6 \Phi_1}{\partial t^2 \partial \beta^4} + \\ + \frac{Bl^4}{EhR^2} \frac{\partial^5 \Phi}{\partial t \partial \beta^4} - \frac{BVI^3}{EhR^2} \frac{\partial^5 \Phi_1}{\partial \xi \partial \beta^4} = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

К уравнению (5.2) в каждом частном случае должны быть присоединены граничные условия на торцах $\xi = 0$ и $\xi = 1$.

Определяя по формулам (1.6)—(1.7) перемещения и внутренние силы оболочки через Φ_1 , граничные условия для краевых задач можно представить в следующем виде:

а) оболочка шарнирно оперта на торцах $\xi = 0$, $\xi = 1$:

$$w = \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \beta^4} = 0, \quad M_1 = \frac{D}{R} \sigma \left[\frac{\partial^6 \Phi_1}{\partial \beta^6} + \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \beta^4} \right] = 0 \quad \text{при } \xi = 0 \text{ и } \xi = 1 \quad (5.3)$$

б) оболочка защемлена на торцах $\xi = 0$ и $\xi = 1$:

$$w = \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \beta^4} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{R}{l} \frac{\partial^5 \Phi_1}{\partial \xi \partial \beta^4} = 0 \quad \text{при } \xi = 0 \text{ и } \xi = 1 \quad (5.4)$$

в) оболочка шарнирно оперта на торце $\xi = 1$ и жестко защемлена на краю $\xi = 0$:

$$\begin{aligned} w = \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \beta^4} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{R}{l} \frac{\partial^5 \Phi_1}{\partial \xi \partial \beta^4} = 0 \quad \text{при } \xi = 0 \\ w = \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \beta^4} = 0, \quad M_1 = \frac{D}{R} \sigma \left[\frac{\partial^6 \Phi_1}{\partial \beta^6} + \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \beta^4} \right] = 0 \quad \text{при } \xi = 1 \end{aligned} \quad (5.5)$$

г) оболочка защемлена на торце $\xi = 0$ и свободна на торце $\xi = 1$:

$$\begin{aligned} w = \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \beta^4} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{R}{l} \frac{\partial^5 \Phi_1}{\partial \xi \partial \beta^4} = 0 \quad \text{при } \xi = 0 \\ N_1 = \frac{EhR}{l^2} \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \xi^2 \partial \beta^2} = 0, \quad S = \frac{EhR^2}{l^3} \frac{\partial^5 \Phi_1}{\partial \xi^3 \partial \beta} = 0 \quad \text{при } \xi = 1 \end{aligned} \quad (5.6)$$

(из второй группы соотношений видно, что граничные условия на свободном краю удовлетворяются частично);

д) оболочка шарнирно оперта на торце $\xi = 0$ и свободна на краю $\xi = 1$:

$$\begin{aligned} w = \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \beta^4} = 0, \quad M_1 = \frac{D}{R} \sigma \left[\frac{\partial^6 \Phi_1}{\partial \beta^6} + \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \beta^4} \right] = 0 \quad \text{при } \xi = 0 \\ N_1 = \frac{EhR}{l^2} \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \xi^2 \partial \beta^2} = 0, \quad S = \frac{EhR^2}{l^3} \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \xi^3 \partial \beta} = 0 \quad \text{при } \xi = 1 \end{aligned} \quad (5.7)$$

В классе решений

$$\Phi_1(\alpha, \beta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_{kn} X_k(\xi) e^{\omega t} \cos n\beta \quad (5.8)$$

Уравнение (5.2) после ряда несложных преобразований запишется в виде

$$\frac{d^4 X_k}{d\xi^4} - An^4 \frac{dX_k}{d\xi} + c_1^2 (n^2 - 1)^2 n^4 - \lambda n^4 = 0 \quad (5.9)$$

где

$$-\lambda = \frac{l^4}{ER^2} \left[\rho \omega^2 + \frac{B}{h} \omega \right], \quad A = \frac{Bl^3}{EhR^2} V, \quad c_1^2 = c_*^2 \frac{l^4}{R^4} = \frac{h^2 l^4}{12R^6(1-\sigma^2)} \quad (5.10)$$

Уравнение параболы устойчивости будет иметь вид:

$$\lambda_1 = \rho \frac{h^2 ER^2}{B^2 l^4} \lambda_2^2 \quad \left(\lambda_1 = \frac{l^4}{ER^2} \rho q^2, \lambda_2 = -\frac{Bl^4}{EhR^2} q \right) \quad (5.11)$$

При фиксированных c_1 , n , A , λ решение уравнения (5.9) в случае, когда корни характеристического уравнения различны, имеет вид:

$$X_k(\xi) = C_1 e^{-k_1 \xi} + C_2 e^{-k_2 \xi} + C_3 e^{-k_3 \xi} + C_4 e^{-k_4 \xi}. \quad (5.12)$$

Дальнейшая задача сводится к определению нетривиальных решений C_i , для чего достаточно подчинить решение (5.12) граничным условиям и потребовать обращения в нуль соответствующего детерминанта $\Delta(k_i)$. Опуская вопрос о виде детерминанта $\Delta(k_i)$ при различных возможных комбинациях кратных корней, введем в рассмотрение функцию

$$F(k_i) = \frac{\Delta(k_i)}{\delta(k_i)} \quad (5.13)$$

где

$$\delta(k_i) = (k_1 - k_2)(k_1 - k_3)(k_1 - k_4)(k_2 - k_3)(k_2 - k_4)(k_3 - k_4)$$

Из выражения $\delta(k_i)$ следует, что все нули функции $\Delta(k_i)$ будут нулями $\delta(k_i)$, а $F(k_i)$ будет аналитической функцией во всей области изменения переменных.

Решение уравнения (5.9) в самом общем случае сопряжено со значительными математическими трудностями, и потому применим здесь метод исследования собственных значений λ , который был предложен в работах [4,5]. Существо метода заключается в том, что вместо решения уравнения (5.9) параметры задачи A , λ и два искомых корня k_3 , k_4 выражаются через два других корня k_1 , k_2 уравнения

$$A = -\frac{1}{n^4} [k^3 + k^2 k_1 + k_1^2 k + k_1^3], \quad \lambda = c_1^2 (n^2 - 1)^2 - \frac{k_1 k_2 k_3 k_4}{n^4}$$

$$k_{3,4} = -\frac{k_1 + k_2}{2} \pm \left[k_1 k_2 - \frac{3}{4} (k_1 + k_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.14)$$

и вместо нахождения собственных значений уравнения (5.9) исследуется система двух уравнений, составляющих характеристическую систему

$$A + \frac{4\eta}{n^4} (\eta^2 - \gamma^2) = 0, \quad F(\eta, \gamma) = \frac{\Delta(\eta, \gamma)}{\delta(\eta, \gamma)} = 0 \quad (5.15)$$

где η и γ — величины, связанные с корнями уравнения

$$k_1 = \eta + i\gamma, \quad k_2 = \eta - i\gamma \quad (5.16)$$

при этом

$$\delta(\eta, \gamma) = 16i\gamma [\gamma^2 - 2\eta^2]^{\frac{1}{2}} [(\gamma^2 - 3\eta^2) + 4\eta^2 \gamma^2] \quad (5.17)$$

Левая часть каждого из уравнений (5.15) представляет аналитическую функцию переменных η и γ , и задача состоит в том, чтобы найти такое решение

$$\eta_i = \eta_i(n, A), \quad \gamma_i = \gamma_i(n, A) \quad (5.18)$$

системы, которое позволит, пользуясь формулами

$$A = -\frac{4\eta}{n^4}(\eta^2 - \gamma^2), \quad k_{3,4} = -\eta \pm [\gamma^2 - 2\eta^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\lambda = c_1^2(n^2 - 1)^2 + \frac{\eta^2 + \gamma^2}{n^4}(\gamma^2 - 3\eta^2) \quad (5.19)$$

для каждой краевой задачи вычислить соответствующие собственные значения λ и установить то значение A , при котором собственное значение становится комплексным.

Решение характеристической системы проще всего получить графически, если вычертить на одном чертеже в прямоугольной системе координат η , γ графики кривых, определяемых уравнениями (5.15). Общий вид кривых характеристической системы приводится на фиг. 2; графики кривых, соответствующих первому уравнению системы (гиперболы), вычерчиваются при различных значениях $A = \text{const}$. Дальнейшая задача сводится к установлению тех значений A_{*i} , при которых точки первой и второй вещественных ветвей (5.18) совпадают и нельзя сделать никакого вывода о собственных значениях рассматриваемых краевых задач.

Приравняв $A = A_{*i}$ согласно (5.10), находим скорость потока, при которой еще имеет место устойчивость невозмущенного движения, но выше которой движение может стать неустойчивым. Следовательно, для каждой частной краевой задачи необходимо прежде всего составить выражение второго уравнения характеристической системы $\Delta(\eta, \gamma) = 0$.

Составление определителя $\Delta(\eta, \gamma)$ покажем на примере шарнирно опертой оболочки. Для определения ненулевых C_i ($i = 1, 2, 3, 4$) подчиним выражение (5.12) для $X_k(\xi)$ граничным условиям (5.3) и приравняем нулю определитель полученной системы:

$$\Delta(k_1, k_2, k_3, k_4) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 & k_4^2 \\ e^{-k_1} & e^{-k_2} & e^{-k_3} & e^{-k_4} \\ k_1^2 e^{-k_1} & k_2^2 e^{-k_2} & k_3^2 e^{-k_3} & k_4^2 e^{-k_4} \end{vmatrix} = 0$$

Раскрыв определитель и произведя в нем замену k_i через η и γ по формулам (5.16), получим

$$\text{а) } \Delta(\eta, \gamma) = \left\{ -2\eta^2 \gamma [\gamma^2 - 2\eta^2]^{\frac{1}{2}} \text{ch } 2\eta + 2\eta^2 \gamma [\gamma^2 - 2\eta^2]^{\frac{1}{2}} \cos \gamma \text{ch } [\gamma^2 - 2\eta^2]^{\frac{1}{2}} - (3\eta^4 - \gamma^2 - 2\eta^2 \gamma^2) \sin \gamma \text{sh } [\gamma^2 - 2\eta^2]^{\frac{1}{2}} \right\} 16i = 0 \quad (5.20)$$

выражения $\Delta(\eta, \gamma)$ для различных краевых задач получаются аналогичным путем;

б) оболочка зашпемлена на торцах $\xi = 0$ и $\xi = 1$:

$$\Delta(\eta, \gamma) = 8i \left\{ \gamma [\gamma^2 - 2\eta^2]^{\frac{1}{2}} [\cos \gamma \operatorname{ch} (\gamma^2 - 2\eta^2)^{\frac{1}{2}} - \operatorname{ch} 2\eta] + \right. \\ \left. + 3\eta^2 \sin \gamma \operatorname{sh} [\gamma^2 - 2\eta^2]^{\frac{1}{2}} \right\} = 0 \quad (5.21)$$

в) оболочка зашпемлена на торце $\xi = 0$ и шарнирно оперта на торце $\xi = 1$:

$$\Delta(\eta, \gamma) = 8i \left\{ 2\eta\gamma [\gamma^2 - 2\eta^2]^{\frac{1}{2}} \operatorname{sh} 2\eta + (\gamma^2 - 3\eta^2) [\gamma^2 - 2\eta^2]^{\frac{1}{2}} \sin \gamma \operatorname{ch} [\gamma^2 - 2\eta^2]^{\frac{1}{2}} - \right. \\ \left. - 2\eta^2]^{\frac{1}{2}} - \gamma (\gamma^2 + \eta^2) \cos \gamma \operatorname{sh} [\gamma^2 - 2\eta^2]^{\frac{1}{2}} \right\} = 0 \quad (5.22)$$

г) оболочка зашпемлена на торце $\xi = 0$ и свободна на краю $\xi = 1$:

$$\Delta(\eta, \gamma) = i \left\{ 8\gamma (\eta^2 + \gamma^2)^2 [\gamma^2 - 2\eta^2]^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} 2\eta + 4\gamma (26\eta^4 + 2\gamma^4 - 4\eta^2\gamma^2) \times \right. \\ \times [\gamma^2 - 2\eta^2]^{\frac{1}{2}} \cos \gamma \operatorname{ch} [\gamma^2 - 2\eta^2]^{\frac{1}{2}} + 8\eta^2 (2\eta^2\gamma^2 - \gamma^4 + 3\eta^4) \sin \gamma \times \\ \times \operatorname{sh} [\gamma^2 - 2\eta^2]^{\frac{1}{2}} - 16\eta\gamma (\gamma^4 - \eta^4) \cos \gamma \operatorname{sh} [\gamma^2 - 2\eta^2]^{\frac{1}{2}} - \\ \left. - 16\eta (4\eta^2\gamma^2 - 3\eta^4 - \gamma^4) [\gamma^2 - 2\eta^2]^{\frac{1}{2}} \sin \gamma \operatorname{ch} [\gamma^2 - 2\eta^2]^{\frac{1}{2}} - \right. \\ \left. - 32\eta^2\gamma^2 (\gamma^2 - \eta^2) [\gamma^2 - 2\eta^2]^{\frac{1}{2}} e^{-2\eta} \right\} = 0 \quad (5.23)$$

д) оболочка шарнирно оперта на торце $\xi = 0$ и свободна на торце $\xi = 1$:

$$\Delta(\eta, \gamma) = i \left\{ -2\eta\gamma (\gamma^2 + \eta^2) [\gamma^2 - 2\eta^2]^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} 2\eta + \eta\gamma (\gamma^2 - 2\eta^2)^{\frac{1}{2}} \times \right. \\ \times [(\gamma^2 - \eta^2)^2 + (\gamma^2 - 3\eta^2)^2] e^{-2\eta} + 8\eta^3\gamma [\gamma^2 - 2\eta^2]^{\frac{1}{2}} (\gamma^2 - \eta^2) \cos \gamma \times \\ \times \operatorname{ch} [\gamma^2 - 2\eta^2]^{\frac{1}{2}} + 4\eta (3\eta^2\gamma^4 - \gamma^6 + 3\eta^6 - 5\eta^4\gamma^2) \sin \gamma \operatorname{sh} [\gamma^2 - 2\eta^2]^{\frac{1}{2}} + \\ \left. + \gamma [5\eta^2\gamma^4 - \gamma^6 - 19\eta^4\gamma^2 + 23\eta^6] \cos \gamma \operatorname{sh} [\gamma^2 - 2\eta^2]^{\frac{1}{2}} + \right. \\ \left. + [\gamma^2 - 2\eta^2]^{\frac{1}{2}} (\gamma^6 + 11\eta^4\gamma^2 - \eta^2\gamma^4 - 3\eta^6) \sin \gamma \operatorname{ch} [\gamma^2 - 2\eta^2]^{\frac{1}{2}} \right\} = 0 \quad (5.24)$$

Отметим, что при $\eta=0$ уравнения $\Delta(\eta, \gamma) = 0$ вырождаются в характеристические уравнения балочных фундаментальных функций для соответствующих граничных условий.

Для всех рассмотренных краевых задач были построены графики уравнений (5.15), при помощи которых определяются критические скорости потока (фиг. 2), т. е. скорости, выше которых невозмущенное движение оболочки становится неустойчивым. Значения критических скоростей для трех краевых задач (оболочка шарнирно оперта с двух сторон, зашпемлена с двух сторон, зашпемлена с одной и шарнирно оперта с другой стороны) приведены в табл. 1, для различных отношений R/l и h/R . Вычисле-

Таблица 1

Значения критических скоростей (м/сек) потока для замкнутой цилиндрической оболочки, шарнирно опертой на торцах (I), заземленной на одном торце и шарнирно опертой на другом (II) и заземленной на торцах (III)

$\frac{h}{R}$	$\frac{R}{l}$	Точные			По вариационному методу					
		I	II	III	2-е приближение			3-е приближение		
					I	II	III	I	II	III
$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{6}$	14067	19182	26642	12278	16883	22132	14770	20448	29040
	$\frac{1}{8}$	5934	9092	11239	5203	7141	9352	6332	8869	11880
	$\frac{1}{10}$	3038	4143	5754	2708	3686	4812	3369	4238	6134
	$\frac{1}{12}$	1758	2397	3330	1648	2186	2822	1999	2656	3526
$\frac{1}{300}$	$\frac{1}{6}$	9378	12788	17761	8197	11266	14765	9847	13939	19360
	$\frac{1}{8}$	3956	5396	7493	3484	4775	6249	4308	5913	7920
	$\frac{1}{10}$	2025	2769	3836	1687	2475	3225	2246	3314	4089
	$\frac{1}{12}$	1172	1598	2220	1120	1444	1902	1390	2014	2539
$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{6}$	7033	9591	13321	6160	8461	11085	7385	10723	14879
	$\frac{1}{8}$	2968	4048	5623	2629	3596	4701	3233	4437	5943
	$\frac{1}{10}$	1520	2072	2879	1378	1874	2436	1685	2533	3069
	$\frac{1}{12}$	879	1199	1666	861	1130	1447	1043	1626	1976
$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{6}$	5626	7673	10656	4940	6781	8880	5908	8578	11903
	$\frac{1}{8}$	2375	3238	4498	2119	2892	3776	2586	3549	4754
	$\frac{1}{10}$	1216	1658	2303	1129	1512	1968	1348	2026	2595
$\frac{1}{750}$	$\frac{1}{6}$	3751	5115	7104	3322	4548	5946	3938	5718	7367
	$\frac{1}{8}$	1583	2159	2999	1450	1964	2552	1890	2366	3169
	$\frac{1}{10}$	810	1105	1535	796	1056	1354	1025	1350	1636

ния критических скоростей для указанных случаев были проведены для $n = 4$, при следующих значениях постоянных

$$E = 2 \cdot 10^{12} \frac{\text{дин}}{\text{см}^2}, \quad \rho = 7.8 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}, \quad \sigma = 0.3$$

$$\rho_0 = 1.014 \cdot 10^8 \frac{\text{дин}}{\text{см}^3}, \quad v_0 = 3.4 \cdot 10^4 \frac{\text{см}}{\text{сек}}, \quad \kappa = 1.4$$

При этом мы исходим из того, что для класса тонких оболочек коротких и средней длины основному тону свободных колебаний при одной продольной полуволне соответствуют четыре поперечные полуволны (круг переходит в эллипс).

Это положение можно установить, если исследовать частоту свободных колебаний замкнутых цилиндрических оболочек для случая шарнирного опирания по краям.

Минимум частоты свободных колебаний шарнирно опертой по торцам замкнутой цилиндрической оболочки, рассчитанной по теории пологих оболочек, имеет место

Таблица 2

Значения критических скоростей потока для замкнутой цилиндрической оболочки, шарнирно-опертой по торцам, найденных вариационным методом

$\frac{h}{R}$	$\frac{R}{l}$	По 2-му приближению м/сек	По 3-му приближению м/сек
$\frac{1}{200}$	1/6	10858	14770
	1/8	4939	6498
	1/10	2684	3463
	1/12	1689	2233
$\frac{1}{300}$	1/6	7185	9847
	1/8	3261	4332
	1/10	1770	2208
	1/12	1117	1452
$\frac{1}{400}$	1/6	5384	7385
	1/8	2449	3167
	1/10	1337	1732
$\frac{1}{500}$	1/6	4313	5908
	1/8	1971	2456
	1/10	1086	1268
	1/12	700	936
$\frac{1}{750}$	1/6	2900	3938
	1/8	1348	1775
	1/10	765	1050

при условии, совпадающем с условием (3.21), при котором имеет место минимум скорости распространения бегущей волны вдоль образующей оболочки при отсутствии потока.

Так как одно из уравнений характеристической системы $F(\eta, \gamma) = 0$ не зависит от n , то из первого уравнения (5.18) на первый взгляд следует, что при прочих равных условиях с увеличением номера члена разложения n автоколебание может иметь место при меньших скоростях потока. Видимо, существуют волны, скорость распространения которых (при всех n , больших или меньших $n = 4$) выше скорости распространения бегущей волны, имеющей место при $n = 4$. Это положение удалось подтвердить лишь для случая, когда скорость потока равна нулю.

§ 6. Приложение метода Бубнова-Галеркина к исследованию задач автоколебаний цилиндрических оболочек. В предыдущем параграфе был изложен метод исследования собственных значений краевых задач, исходя из уравнений малых колебаний цилиндрических оболочек средней длины, который позволяет определить точные значения критических скоростей потока.

Нам не удалось применить аналогичный метод при исследовании собственных значений отдельных краевых задач, пользуясь общим уравнением малых колебаний цилиндрических оболочек (2.3). Поэтому при рассмотрении задачи об автоколебании замкнутых цилиндрических оболочек и цилиндрических панелей по теории пологих оболочек был применен вариационный метод. Первоначально вариационным методом были определены критические скорости потока для класса замкнутых цилиндрических оболочек средней длины при различных граничных условиях на торцах.

Значения критических скоростей, найденных во втором и третьем, приближениях, исходя из уравнений оболочек средней длины, приведены в табл. 1. Из таблиц видно, что второе приближение по Галеркину дает несколько заниженное значение критической скорости, а третье приближение — несколько завышенное значение скорости по сравнению с точным значением V_* , т. е. второе и третье приближения захватывают точное значение критической скорости в вилку.

Хорошая сходимость вариационного метода позволила применить его к исследованию задач автоколебания замкнутых цилиндрических оболочек и цилиндрических панелей, пользуясь более общим уравнением пологих оболочек (2.3).

В табл. 2 приведены значения критических скоростей потока для замкнутой цилиндрической оболочки, шарнирно опертой на торцах, найденных, исходя из теории пологих оболочек. Сравнивая данные табл. 2 с соответствующими им величинами критических скоростей, приведенных в табл. 1, можно заметить, что разница в величинах критических скоростей не превышает 10—15% и, следовательно, для практических целей вполне оправдано при исследовании задач автоколебания замкнутых цилиндрических оболочек пользоваться упрощенным уравнением оболочек средней длины.

Большая помощь была оказана автору И. Ф. Барклеевой и вычислителем В. С. Зудиной, которым автор выражает свою благодарность.

Поступила 28 V 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. В л а с о в В. З. Общая теория оболочек. ГИТТЛ, 1949.
2. Г о л ь д е н в е й з е р А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Госиздат технико-теоретич. литературы, 1953.
3. И л ь ю ш и н А. А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей. Труды ДАН, т. II, 1949.
4. М о в ч а н А. А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе, ПММ, т. XX, вып. 2, 1956.
5. М о в ч а н А. А. Об устойчивости панели, движущейся в газе, т. ПММ, XXI, вып. 2, 1957.