Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

ТЕОРЕМА О ВЗАИМНОСТИ РАБОТ И ПОСТРОЕНИЕ ТЕНЗОРА ГРИНА В ТЕОРИИ МАЛЫХ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Н. А. Кильчевский

(Киев)

Ниже рассматриваются обобщения известной из теории упругости теоремы о взаимности работ, распространяемой нами на упруго-пластическую среду, а также на два тела, одинаковых до деформирования по геометрической форме и размерам, но различных по упруго-пластическим свойствам составляющего их вещества.

Напряженное состояние упруго-пластического вещества соответствует простому нагружению.

Как известно, теорема о взаимности работ является основой метода Сомильяна решения некоторых краевых задач теории упругости [1].

Метод Сомильяна может быть распространен на различные классы задач теории упругости [2,3]. По существу теорема о взаимности работ теории упругости родственна известным формулам Грина теории ньютоновского потенциала и является вспомогательным средством составления интегральных уравнений теории упругости.

Обобщив теорему о взаимности работ на случай малых упруго-пластических деформаций, мы распространяем метод Сомильяна прежде всего на задачи статики упруго-пластической среды в случае простого нагружения и, применяя разложение по степеням некоторого малого параметра, указываем алгорифм приближенного построения тензора Грина для неограниченного упруго-пластического тела. Этот способ решения упруго-пластических задач близок к методу «упругих решений», выдвинутому А. А. Ильюшиным [4].

§ 1. Уравнения Генки в инвариантной форме. Воспользуемся системой уравнений Генки [4,5], которая связывает компоненты тензора деформаций и тензора напряжений в теории малых упруго-пластических деформаций в декартовой системе координат [1], и составим эти уравнения в произвольной криволинейной системе. Найдем

$$D_{ij} = \psi\,(g_{i\alpha}g_{j\beta} - \tfrac{1}{3}\,g_{ij}g_{\alpha\beta})\,T^{\alpha\beta} + \tfrac{1}{3}\,k g_{ij}g_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} \qquad (1.1)$$

Здесь D_{ij} — ковариантные компоненты тензора деформаций, $T^{\alpha\beta}$ — контравариантные компоненты тензора напряжений, $g_{\mu\nu}$ — ковариантные компоненты метрического тензора, k — модуль объемного сжатия, ψ — скалярная функция, зависящая от скалярных инвариантов тензоров напряжений и деформаций; все индексы принимают значения 1, 2, 3.

При простом нагружении ψ определяется экспериментально из исследований, например, простого растяжения, устанавливающих зависимость между интенсивностью касательных напряжений и интенсивностью деформаций сдвига. При чисто упругих деформациях

$$\psi = \frac{1}{2G} \qquad (G \text{ — модуль сдвига}) \qquad (1.2)$$

[1] Здесь мы пользовались работой [5].

Введем обозначение

$$D_{ij}^{(\varepsilon)} = \psi \left(g_{i\alpha} g_{j\beta} - \frac{1}{3} g_{ij} g_{\alpha\beta} \right) T^{\alpha\beta} \tag{1.3}$$

Тензор $D_{ij}^{(\varepsilon)}$ является девиатором тензора деформаций. Действительно, непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$g^{ij} D_{ij}^{(\varepsilon)} = 0 \tag{1.4}$$

т. е. линейный инвариант тензора $D_{ij}^{(\varepsilon)}$ равен нулю.

Рассмотрим линейный инвариант тензора деформаций D_{ij}. На основании (1.1) и (1.4) получим

$$D = g^{ij} D_{ij} = \frac{1}{3} k g^{ij} g_{ij} g_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = kT \qquad (T = g_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}) \tag{1.5}$$

Здесь T — линейный инвариант тензора напряжений.

§ 2. Теорема о взаимности работ. Пусть T'^{ij}, D_{ij}' — тензоры напряжений и деформаций некоторого деформированного состояния тела, а T''^{ij} и D_{ij}'' — тензоры напряжений и деформаций другого деформированного состояния этого же тела. Теорема о взаимности работ в теории упругости вытекает из свойств инварианта

$$J = T''^{ij} D_{ij}' \tag{2.1}$$

Положив, например, в (1.1) $\psi = 1/2G$, легко проверить тождество

$$T''^{ij} D_{ij}' \equiv T'^{ij} D_{ij}'' \tag{2.2}$$

Тождество (2.2) имеет место также для анизотропных упругих тел и тел с переменными модулями упругости, не зависящими от напряженного состояния тела.

Умножая тождество (2.2) на элемент объема недеформированного тела, интегрируя по объему тела и пользуясь теоремой Остроградского-Гаусса, получаем известную теорему о взаимности работ.

В теории малых упруго-пластических деформаций тождество (2.2) не имеет места, так как функция ψ зависит от напряженного состояния тела. Поэтому в основу доказательства обобщенной теоремы о взаимности работы следует положить не инвариант (2.1), а инвариант

$$J_{\Pi} = T''^{ij} D_{ij}' + (2G\psi'' - 1) T''^{ij} D_{ij}'^{(\varepsilon)} \tag{2.3}$$

Здесь ψ'' соответствует напряженному состоянию, определенному тензором T''^{ij}. Инвариант J_{Π} при $\psi'' = 1/2G$ превращается в инвариант (2.1).

Можно непосредственно проверить на основании равенств (1.1) и (1.3) выполнение тождества

$$T''^{ij} D_{ij}' + (2G\psi'' - 1) T''^{ij} D_{ij}'^{(\varepsilon)} \equiv T'^{ij} D_{ij}'' + (2G\psi^{1} - 1) T'^{ij} D_{ij}''^{(\varepsilon)} \tag{2.4}$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \iiint\limits_{(V)} J_{\Pi} dV = I_0 + I_1, \quad I_0 = \iiint\limits_{(V)} T''^{ij} D_{ij}' dV, \quad I_1 = \iiint\limits_{(V)} (2G\psi'' - 1) T''^{ij} D_{ij}'^{(\varepsilon)} dV \tag{2.5}$$

распространенный на объем недеформированного тела.

Результат преобразования интеграла от первого члена правой части (2.3) известен из теории упругости. Воспользуемся декартовой системой координат и преобразуем интеграл I_1 от второго члена правой части (2.3). Имеем

$$I_1 = \iiint\limits_{(V)} (2G\psi'' - 1)\Big\{\sigma_x''\frac{\partial u'}{\partial x} + \sigma_y''\frac{\partial v'}{\partial y} + \sigma_z''\frac{\partial w'}{\partial z} + \tau_{xy}''\Big(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x}\Big) +$$
$$+ \tau_{xz}''\Big(\frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial z}\Big) + \tau_{yz}''\Big(\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y}\Big) - \frac{1}{3}(\sigma_x'' + \sigma_y'' + \sigma_z'')\Big(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z}\Big)\Big\} dV \quad (2.6)$$

Здесь $\sigma_x'', \ldots, \tau_{xz}''$ — компоненты тензора напряжений для второго состояния тела, u', v', w' — проекции на оси декартовой системы координат вектора $\mathbf{u}'$ перемещения в первом состоянии тела.

Посредством очевидных преобразований, основанных на теореме Остроградского-Гаусса, получим

$$I_1 = \iint\limits_{(S)} (2G\psi'' - 1)\{[X_n'' - \sigma''\cos(nx)]\,u' + [Y_n'' - \sigma''\cos(ny)]\,v' +$$
$$+ [Z_n'' - \sigma''\cos(nz)]\,w'\}\,dS + \iiint\limits_{(V)} \{(2G\psi'' - 1)(X''u' + Y''v' + Z''w') -$$
$$- (\mathbf{f}_x''u' + \mathbf{f}_y''v' + \mathbf{f}_z''w')\cdot\operatorname{grad}(2G\psi'' - 1) + \mathbf{u}'\cdot\operatorname{grad}[(2G\psi'' - 1)\,\sigma'']\}\,dV \quad (2.7)$$

Первый интеграл в правой части равенства (2.7) распространен на поверхность тела S. Здесь введены обозначения

$$\mathbf{f}_x'' = \mathbf{i}\,\sigma_x'' + \mathbf{j}\,\tau_{xy}'' + \mathbf{k}\,\tau_{xz}'' \quad (2.8)$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — орты координатных осей, $\mathbf{f}_y''$ и $\mathbf{f}_z''$ определяются аналогично. Далее

$$\sigma'' = \frac{1}{3}(\sigma_x'' + \sigma_y'' + \sigma_z'') \quad (2.9)$$

$$X_n'' = \sigma_x''\cos(\mathbf{n}\,x) + \tau_{yx}''\cos(\mathbf{n}\,y) + \tau_{zx}''\cos(\mathbf{n}\,z) \quad (2.10)$$

Здесь $\mathbf{n}$ — орт внешней нормали к поверхности S тела, Y_n'' и Z_n'' определяются аналогично, X'', Y'', Z'' — проекции объемных сил на координатные оси. Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{\Phi}_n = \mathbf{F}_n + (2G\psi - 1)(\mathbf{F}_n - \mathbf{P}_n) \quad (2.11)$$

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{F} + (2G\psi - 1)\,\mathbf{F} - {}^2\mathbf{T}\cdot\operatorname{grad}(2G\psi - 1) + \operatorname{grad}[\sigma(2G\psi - 1)] \quad (2.12)$$

Здесь $\mathbf{F}_n$ — вектор напряжения на поверхности тела, $\mathbf{P}_n$ — вектор гидростатического давления на поверхности тела, $\mathbf{F}$ — вектор объемной силы, ${}^2\mathbf{T}$ — тензор напряжений. Будем рассматривать $\mathbf{\Phi}_n$ и $\mathbf{\Phi}$ как видоизмененные векторы напряжений на поверхности тела и объемных сил.

Возвратимся к тождеству (2.4). Интегрируя это тождество по объему тела, принимая во внимание соотношения (2.6) и (2.7) и обозначая (2.11)—(2.12), получим

$$\iint\limits_{(S)} \mathbf{\Phi}_n''\cdot\mathbf{u}'\,dS + \iiint\limits_{(V)} \mathbf{\Phi}''\cdot\mathbf{u}'\,dV = \iint\limits_{(S)} \mathbf{\Phi}_n'\cdot\mathbf{u}''\,dS + \iiint\limits_{(V)} \mathbf{\Phi}'\cdot\mathbf{u}''\,dV \quad (2.13)$$

Равенство (2.13) обобщает теорему о взаимности работ на случай малых упруго-пластических деформаций.

Как видно из (2.13), формулировка теоремы не отличается от известной из теории упругости, если приписать векторам $\mathbf{\Phi}_n$ и $\mathbf{\Phi}$ смысл, указанный выше.

§ 3. Теорема о взаимности работ для двух тел с различными упруго-пластическими свойствами. Теорема о взаимности работ, рассмотренная выше, связывает напряжения и перемещения, соответствующие двум состояниям некоторого упруго-пластического тела. Однако анализ доказательства теоремы показывает, что нетрудно найти ее дальнейшее обобщение, позволяющее связывать напряжения и перемещения в двух телах одинаковой до деформирования геометрической формы и размеров, но с различными механическими свойствами материала.

Предположим, что точки двух тел отнесены к идентичным координатным системам и существует взаимно однозначное соответствие между точками тел. Будем обозначать индексом (1) внизу некоторые механические величины, характеризующие первое тело, и индексом (2) — соответствующие величины во втором теле.

Рассмотрим инвариант

$$J_{12} = T'^{ij} D_{ij}'' + [(G' + G'')\psi' - 1]\, T'^{ij} D_{ij}''^{(\varepsilon)} + k_{[12]} T' D'' \tag{3.1}$$

Здесь введено обозначение

$$k_{[12]} = -k_{[21]} = \frac{k' - k''}{6k''} \tag{3.2}$$

Для общности в дальнейшем допускаем, что G', G'' и $k_{[12]}$ — скалярные функции точки одного из тел.

Воспользовавшись равенствами (1.1), (1.3) и (1.5), найдем

$$J_{12} = \frac{1}{6}(k' + k'') T' T'' + (G' + G'')\psi'\psi''\left(g_{i\alpha} g_{j\beta} - \frac{1}{3} g_{ij} g_{\alpha\beta}\right) T'^{ij} T''^{\alpha\beta}$$

Отсюда видно, что существует тождество

$$J_{12} \equiv J_{21} \tag{3.3}$$

Тождество (3.3) позволяет найти обобщение теоремы о взаимности работ.

Совершенно очевидно, что существуют другие инварианты, аналогичные (3.1), обладающие свойством симметричности (3.3). Мы остановились на инварианте (3.1) лишь потому, что при одинаковых механических свойствах вещества тел инвариант J_{12} совпадает с инвариантом J_{II} предыдущего параграфа.

Вновь рассмотрим интеграл

$$I = \iiint\limits_{(V)} J_{12}\, dV$$

Достаточно преобразовать интеграл

$$I_1 = \iiint\limits_{(V)} \{[(G' + G'')\psi' - 1]\, T'^{ij} D_{ij}''^{(\varepsilon)} + k_{[12]} T' D''\}\, dV$$

так как результат преобразования интеграла

$$\iiint\limits_{(V)} T'^{ij} D_{ij}''\, dV$$

известен в теории упругости.

Вновь переходя к декартовой системе координат, найдем

$$I_1 = \iiint\limits_{(V)} \{[(G' + G'')\psi' - 1]\left[\sigma_x{}'\frac{\partial u''}{\partial x} + \ldots + \tau_{yz}{}'\left(\frac{\partial v''}{\partial z} + \frac{\partial w''}{\partial y}\right) - \right.$$
$$\left. - \sigma'\left(\frac{\partial u''}{\partial x} + \frac{\partial v''}{\partial y} + \frac{\partial w''}{\partial z}\right)\right] + 3k_{[12]}\,\sigma'\left(\frac{\partial u''}{\partial x} + \frac{\partial v''}{\partial y} + \frac{\partial w''}{\partial z}\right)\} dV \qquad (3.4)$$

Сравнив (3.4) и (2.6), непосредственно можно установить, что равенство (2.13) сохранится, если ввести векторы $\mathbf{\Phi}_n$, и $\mathbf{\Phi}$ посредством равенств

$$\mathbf{\Phi}_n = \mathbf{F}_n + [(G' + G'')\psi - 1]\,\mathbf{F}_n - [(G' + G'')\psi - 3k_{[ij]} - 1]\,\mathbf{P}_n \qquad (3.5)$$
$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{F} + [(G' + G'')\psi - 1]\,\mathbf{F} - {}^2\mathbf{T}\cdot\mathrm{grad}\,[(G' + G'')\psi - 1] +$$
$$+ \mathrm{grad}\,\{\sigma\,[(G' + G'')\psi - 3k_{[ij]} - 1]\} \qquad (3.6)$$

Величины $k_{[ij]}$ определяются равенствами (3.2). Числа i и j образуют перестановки чисел 1 и 2.

Из тождества (3.3) находим

$$\iiint\limits_{(V)} J_{12} dV = \iiint\limits_{(V)} J_{21} dV \qquad (3.7)$$

Воспользовавшись обозначениями (3.5) — (3.6), получим

$$\iint\limits_{(S)} \mathbf{\Phi}_n{}'\cdot\mathbf{u}''\,dS + \iiint\limits_{(V)} \mathbf{\Phi}'\cdot\mathbf{u}''dV = \iint\limits_{(S)} \mathbf{\Phi}_n{}''\cdot\mathbf{u}'\,dS + \iiint\limits_{(V)} \mathbf{\Phi}''\cdot\mathbf{u}'dV \qquad (3.8)$$

Равенство (3.8) выражает обобщенную теорему о взаимности работ. Это равенство связывает объемные и поверхностные силы, напряжения и смещения в двух одинаковых по геометрической форме и размерам телах с различными упруго-пластическими свойствами материала.

Из равенства (3.7) можно также получить выражения обобщенной теоремы о взаимности работ, эквивалентные (3.8), но отличающиеся от (3.8) по форме. Например, на основании (3.1) получим

$$\iint\limits_{(S)} \mathbf{F}_n{}'\cdot\mathbf{u}''\,dS + \iiint\limits_{(V)} \mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}''dV + \iiint\limits_{(V)} \{[(G' + G'')\psi' - 1]\,T'^{ij}D''_{ij}{}^{(\varepsilon)} +$$
$$+ k_{[12]}T'D''\}\,dV = \iint\limits_{(S)} \mathbf{F}_n{}''\cdot\mathbf{u}'\,dS + \iiint\limits_{(V)} \mathbf{F}''\cdot\mathbf{u}'\,dV + \qquad (3.9)$$
$$+ \iiint\limits_{(V)} \{[(G' + G'')\psi'' - 1]\,T''^{ij}D_{ij}'^{(\varepsilon)} + k_{[21]}T''D'\}\,dV$$

§ 4. Действие сосредоточенной силы на неограниченное упруго-пластическое тело. Тензор Грина. Рассмотрим неограниченную упруго-пластическую среду и неограниченную упругую среду. Величины, характеризующие состояние упруго-пластической среды, обозначим одним штрихом; величины, характеризующие состояние упругой среды, обозначим двумя штрихами.

Пусть упругие свойства этих сред одинаковы;

$$G' = G'' = G = \mathrm{const}, \quad k' = k'' = k = \mathrm{const}, \quad k_{[12]} = -k_{[21]} = 0 \qquad (4.1)$$

Далее на основании (1.2)

$$\psi'' = \frac{1}{2G} \qquad (4.2)$$

Примем, что диаграмма зависимости между интенсивностью касательных напряжений τ' и интенсивностью деформаций сдвига γ' в упруго-пластической среде при активном процессе простого нагружения и состоянии упрочнения состоит из двух прямолинейных отрезков. Тогда [5]

$$\psi' = \frac{1}{2G} \tag{4.3}$$

на первом прямолинейном отрезке или в области упругих деформаций.

На втором участке, или в области упрочнения

$$\psi' = \frac{1}{2G_1}\left[1 + \frac{\tau_0'}{\tau'}\left(1 - \frac{G_1}{G}\right)\right] \tag{4.4}$$

Здесь G_1 — угловой коэффициент второго прямолинейного отрезка на диаграмме (τ', γ'), τ_0' — предел пропорциональности

Очевидно, $G_1 < G$.

Заметим далее, что

$$2G\psi' - 1 = \left(\frac{G}{G_1} - 1\right) - \left(\frac{G}{G_1} - 1\right)\frac{\tau_0'}{\tau'} \tag{4.5}$$

Примем, что объемные силы $\mathbf{F}'$ сводятся к единичной сосредоточенной силе, приложенной к точке N упруго-пластической среды. Предположим, что до достижения величины единицы эта сосредоточенная сила монотонно возрастала от нуля, причем упруго-пластическая среда при возрастании силы находилась в равновесном состоянии. Таким образом, материал в окрестности точки приложения силы находится в состоянии упрочнения. Вызванные этой силой в точке Q смещения будем обозначать $\mathbf{u}'(Q, N)$. Аналогично обозначим компоненты тензора напряжений, тензора деформаций и остальные величины, характеризующие состояние упруго пластической среды. Примем далее, что объемные силы $\mathbf{F}''$ сводятся к единичной сосредоточенной силе, приложенной к точке M упругой среды. Вызванные этой силой в точке P смещения будем обозначать $\mathbf{u}''(P, M)$. Аналогично обозначим остальные величины, характеризующие состояние упругой среды.

Вектор $\mathbf{F}'$ равен нулю во всей упруго-пластической среде, за исключением точки N. В окрестности этой точки имеем предельное условие

$$\lim_{Q \to N} \iiint\limits_{(V_Q)} \mathbf{F}'(Q, N)\, dV_Q = \mathbf{e}_N \tag{4.6}$$

где $\mathbf{e}_N$ — единичный вектор. Далее

$$\mathbf{\Phi}'' = \mathbf{F}'' \tag{4.7}$$

Во всей области, заполненной упругой средой, за исключением бесконечно малой окрестности точки M, вектор $\mathbf{F}''$ равен нулю и имеет место предельное условие

$$\lim_{P \to M} \iiint\limits_{(V_P)} \mathbf{F}''(P, M)\, dV_P = \mathbf{e}_M \tag{4.8}$$

Применим равенство (3.9). Заметив, что в случае неограниченной среды интегралы по поверхности в равенство (3.9) не войдут [1], найдем

[1] Мы заранее принимаем, что область пластических деформаций ограничена, и поэтому пользуемся известными свойствами упругих смещений и напряжений на бесконечности.

$$\mathbf{e}_N\cdot\mathbf{u}''(N, M)+\iiint\limits_{(V)}[2G\psi'(Q, N)-1]\,T'^{ij}(Q, N)\times$$
$$\times D_{ij}''^{(\varepsilon)}(Q, M)\,dV_Q=\mathbf{e}_M\cdot\mathbf{u}'(M, N) \tag{4.9}$$

Объемный интеграл в левой части равенства (4.9) распространяется на область, охваченную пластической деформацией. В этой области находится точка N. Функция $\psi'(Q, N)$ в области пластических деформаций определяется из равенства (4.5).

Пусть упругая среда и упруго-пластическая среда арифметизированы идентичными декартовыми системами координат с единичным координатным базисом $\mathbf{e}_i$ $(i=1, 2, 3)$. Пусть

$$\mathbf{e}_N=\mathbf{e}_j, \qquad \mathbf{e}_M=\mathbf{e}_k$$

Воспользуемся равенством (4.5). Выделяя из объемного интеграла в левой части равенства (4.9) член, не содержащий множитель τ_0'/τ', исключая из этого члена слагаемое, зависящее от σ', и применяя формулу Остроградского-Гаусса, найдем на основании (4.9)

$$u'_{(j)k}(M, N)=\frac{G}{G_1}u_{(k)j}''(N, M)+\left(\frac{G}{G_1}-1\right)\iint\limits_{(S)}\mathbf{F}'_{(j)n}(Q, N)\cdot\mathbf{u}_{(k)}''(Q, M)\,dS_Q-$$
$$-\left(\frac{G}{G_1}-1\right)\iiint\limits_{(V)}\sigma_{(j)}'(Q, N)\,D_{(k)}''(Q, M)\,dV_Q-$$
$$-\tau_0'\left(\frac{G}{G_1}-1\right)\iiint\limits_{(V)}\tau_{(j)}'^{\alpha\beta}(Q, N)\,D''^{(\varepsilon)}_{(k)\alpha\beta}(Q, M)\,dV_Q \tag{4.10}$$

Заметим, что

$$u''_{(k)j}(N, M)=u''_{(j)k}(M, N) \tag{4.11}$$

Поверхностный интеграл в правой части равенства (4.10) распространен на поверхность области пластических деформаций. Индексом (j) обозначены величины, связанные с действием единичной силы, равной вектору $\mathbf{e}_j$. Аналогичный смысл имеет индекс (k). Далее

$$\tau_{(j)}'^{\alpha\beta}(Q, N)=\frac{T'^{\alpha\beta}_{(j)}(Q, N)}{\tau_{(j)}'(Q, N)} \tag{4.12}$$

Функции $\tau_{(j)}'^{\alpha\beta}(Q, N)$ являются компонентами направляющего тензора напряжений [4]. Так как быстрота возрастания функций $T_{(j)}'^{\alpha\beta}(Q, N)$ и $\tau_{(j)}'(Q, N)$ при $Q\to N$ одинакова, функции $\tau_{(j)}'^{\alpha\beta}(Q, N)$ ограничены в области пластических деформаций.

Если изменять направление единичной силы так, чтобы оно последовательно совпадало с направлениями векторов $\mathbf{e}_k$ $(k=1, 2, 3)$ координатного базиса, мы получим из (4.10) систему функциональных уравнений, формально связывающих компоненты векторов $\mathbf{u}_{(j)}'(Q, N)$ и $\mathbf{u}_{(k)}''(P, M)$. При этом точку M приложения силы в упругой среде можно совмещать со всеми точками пространства.

Функциональные уравнения, вытекающие из равенств (4.10), имеют определенный аналитический смысл, если несобственные поверхностные и объемные интегралы, входящие в их правые части, будут сходящимися.

Предположим, что точка M лежит внутри области пластических деформаций. Тогда функции $D_k''(Q, M)$ и $D_{(k)\alpha\beta}''^{(\varepsilon)}$ при $Q \to M$ возрастают, как $(QM)^{-2}$. Так как сосредоточенную силу как в упругой, так и в пластической среде можно рассматривать как равнодействующую поверхностных сил, распределенных по поверхности сферы произвольно малого радиуса с центром в точке приложения силы, и эта равнодействующая не зависит от радиуса сферы, приходим к выводу, что $\sigma_{(j)}'(Q, N)$ при $Q \to N$ возрастает, как $(QN)^{-2}$. Далее, принимая во внимание, что функции $\tau_{(j)}'^{\alpha\beta}(Q, N)$ ограничены, приходим к заключению, что при несовпадении точек M и N несобственные объемные интегралы, входящие в соотношения (4.10), сходятся. Подынтегральные выражения поверхностных интегралов в этом случае не имеют особенностей.

Если же точка M лежит вне области пластических деформаций, подынтегральные выражения поверхностного и объемного интеграла, не зависящего от $\sigma'_{(j)}$, аналитических особенностей не содержат.

Если точка M находится на поверхности области пластических деформаций, то объемные интегралы будут сходящимися на основании свойств подынтегральных выражений, отмеченных выше. Поверхностные интегралы также будут сходящимися, так как смещения $\mathbf{u}''_{(k)}(Q, M)$ возрастают по модулю при $Q \to N$, как $(QM)^{-1}$.

Заметим, наконец, что при непрерывном изменении касательной к графику (τ', γ') поверхностный интеграл в правой части функциональных уравнений (4.10) отсутствует.

Подводя итоги сказанному, приходим к выводу, что функциональные уравнения (4.10) не содержат выражений, лишенных аналитического смысла.

§ 5. Приближенное решение уравнений (4.10). Уравнения (4.10) можно представить в следующем виде:

$$u'_{(j)k}(M, N) = u''_{(k)j}(N, M) + \lambda L_{(j)k}(\mathbf{u}'_{(j)}, \mathbf{u}''_{(k)}) \tag{5.1}$$

Здесь

$$L_{(j)k}(\mathbf{u}'_{(j)}, \mathbf{u}''_{(k)}) = u'_{(j)k}(M, N) + \iint\limits_{(S)} \mathbf{F}'_{(j)n}(Q, N)\cdot \mathbf{u}''_{(k)}(Q, M)\, dS_Q -$$

$$- \iiint\limits_{(V)} \sigma'_{(j)}(Q, N)\, D''_{(k)}(Q, M)\, dV_Q - \tau_0' \iiint\limits_{(V)} \tau_{(j)}'^{\alpha\beta}(Q, N)\, D''^{(\varepsilon)}_{(k)\alpha\beta}(Q, M)\, dV_Q \tag{5.2}$$

$$\lambda = \frac{G - G_1}{G} \tag{5.3}$$

Очевидно, что $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Предельные значения λ соответствуют идеально упругому $(G_1 = G)$ и идеально пластическому $(G_1 = 0)$ состояниям вещества.

В равенстве (5.1) член, содержащий λ, определяет изменение, вызванное в поле упругих смещений появлением области пластичности вещества.

Будем рассматривать соотношения (5.1) как систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с неизвестными компонентами вектора $\mathbf{u}'_{(j)}(M, N)$. Из физических соображений можно заключить, что система (5.1) имеет решение в области достаточно малых значений параметра λ, т. е. при слабо выраженной пластичности.

Не приводя подробностей вычислений, укажем один из методов решения систем уравнения (5.1). Будем искать решение в форме разложений $u'_{(j)k}(M, N)$ по возрастающим степеням λ:

$$u'_{(j)k}(M, N) = u''_{(j)k}(M, N) + \lambda\varphi^{(1)}_{(j)k}(M, N) + \lambda^2\varphi^{(2)}_{(j)k}(M, N) + \ldots \tag{5.4}$$

Чтобы упростить обозначения, временно положим

$$u'_{(j)k}(M, N) = u_k, \qquad u''_{(j)k}(M, N) = v_k \tag{5.5}$$

Разложение (5.4) представим в следующем виде:

$$u_k = v_k + \lambda\varphi_k^{(1)} + \lambda^2\varphi_k^{(2)} + \cdots \tag{5.6}$$

Оператор $L_{(j)k}$ будем обозначать так:

$$L_{(j)k}(\mathbf{u}_{(j)}', \mathbf{u}_{(k)}'') = L_k\left(u_\rho, \frac{\partial u_\varkappa}{\partial x_\sigma}, v_\mu, \frac{\partial v_\nu}{\partial x_\tau}\right) \tag{5.7}$$

Принимая во внимание (5.6) и разлагая оператор L_k в ряд Маклонера по возрастающим степеням λ, найдем

$$\begin{aligned} L_k\left(u_\rho, \frac{\partial u_\varkappa}{\partial x_\sigma}, v_\mu, \frac{\partial v_\nu}{\partial x_\tau}\right) &= L_k\left(v_\rho, \frac{\partial v_\varkappa}{\partial x_\sigma}, v_\mu, \frac{\partial v_\nu}{\partial x_\tau}\right) + \\ &+ \lambda\left[\sum_{\rho=1}^{3} \frac{\partial L_k}{\partial u_\rho}\varphi_\rho^{(1)} + \sum_{\varkappa,\sigma}^{3} \frac{\partial L_k}{\partial(\partial u_\varkappa/\partial x_\sigma)} \frac{\partial \varphi_\varkappa^{(1)}}{\partial x_\sigma}\right]_{\lambda=0} + \cdots \end{aligned} \tag{5.8}$$

Введенная здесь символика имеет условный смысл, так как L_k является не функцией $u_\rho, \ldots, \partial v_\nu / \partial x_\tau$, а оператором. Эта символика позволяет лишь установить алгорифмическую последовательность в вычислении функций $\varphi_k^{(i)}$, как это видно из дальнейшего.

Подставляя разложения (5.6) и (5.8) в уравнения (5.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ в левых и правых частях равенств, полученных после этой подстановки, найдем систему рекуррентных зависимостей, определяющих функции $\varphi_k^{(i)}$:

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(1)} &= L_k\left(v_\rho, \frac{\partial v_\varkappa}{\partial x_\sigma}, v_\mu, \frac{\partial v_\nu}{\partial x_\tau}\right) \\ \varphi_k^{(2)} &= \sum_{\rho=1}^{3} \left.\frac{\partial L_k}{\partial u_\rho}\right|_{\lambda=0} \varphi_\rho^{(1)} + \sum_{\varkappa,\sigma}^{3} \left.\frac{\partial L_k}{\partial(\partial u_\varkappa / \partial x_\sigma)}\right|_{\lambda=0} \frac{\partial \varphi_\varkappa^{(1)}}{\partial x_\sigma} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{5.9}$$

Как видно из равенств (5.6) и (5.9), первые два члена разложения (5.5) соответствуют методу «упругих решений», выдвинутому А. А. Ильюшиным [4]. Связь дальнейших членов разложения (5.6) с методом «упругих решений» не очевидна, и более подробно этот вопрос мы анализировать не будем.

Выражение (5.6) является рядом, оно определяет u_k как функцию λ. Будем временно рассматривать λ как комплексную величину. Если при $\lambda = \lambda_0$, где $|\lambda_0| < 1$, эта функция имеет полюс или существенно особую точку, указанное значение λ_0 определяет радиус сходимости ряда (5.6).

Если u_k — мероморфная функция λ, можно найти простыми методами [6] аналитическое продолжение u_k в области, внешней по отношению к кругу $\rho = |\lambda_0|$.

Физические сооображения приводят к выводу, что функции u_k ограничены для всех значений G_1, за исключением случая $G_1 = 0$, соответствующего идеальной пластичности вещества, поэтому мы имеем основания полагать, что разложения вида (5.6) сходятся для всех значений λ, ограниченных неравенством $|\lambda| < 1$.

Конечно, это предположение нуждается в более подробном исследовании, но такое исследование выходит за рамки настоящей статьи.

Здесь рекуррентный процесс вычисления функций $\varphi_k^{(i)}$ рассматривается как способ получения некоторого приближенного решения функциональных уравнений (5.1).

Так как система функциональных уравнений (4.1) нелинейна, решение определяет одну из действительных ветвей многозначного решения этой системы. При достаточно малых значениях λ это решение близко к упругому решению и при $\lambda = 0$ с ним совпадает.

Из соотношений (5.4) и (5.9) видно, что искомые смещения $u'_{(j)k}(M, N)$ имеют в окрестности точки N и на бесконечности аналитические особенности, аналогичные особенностям упругих смещений $u''_{(j)k}(M, N)$.

Все перечисленные свойства функций $u'_{(j)k}(M, N)$ подтверждают физическую значимость полученного решения. Фактическое проведение вычислений согласно равенствам (5.6) и (5.9) сопряжено с большими техническими трудностями. Значительное усложнение вносит необходимость повторных определений размеров и формы области пластичности при переходе от вычисления функции $\varphi_k^{(i)}$ к вычислению функции $\varphi_k^{(i+1)}$.

Функции $u'_{(j)k}(M, N)$ образуют тензор Грина в упруго-пластической среде. Рассмотренный нами метод их построения иллюстрирует одно из применений обобщенной теоремы о взаимности работ.

Тензорные свойства системы функций $u'_{(j)k}(M, N)$ в случае диаграммы (τ', γ''), составленной из прямолинейных отрезков, аналогичны свойствам функций $u''_{(j)k}(M, N)$. Свойства компонент тензора Грина $u''_{(j)k}(M, N)$ упругой среды подробно исследованы в работе [7].

Поступила 28 XII 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Л я в А. Математическая теория упругости. ОНТИ, 1935.
2. М а й з е л ь В. М. Температурная задача теории упругости. Изд. АН УССР, 1951.
3. К и л ь ч е в с к и й Н. А. Исследование некоторых вопросов теории упругости. Изв. КПИ, т. XV, 1954.
4. И л ь ю ш и н А. А. Пластичность. Гостехиздат, 1948.
5. К а ч а н о в Л. М. Основы теории пластичности. Гостехиздат, 1956.
6. К а н т о р о в и ч Л. В., К р ы л о в В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, 1950.
7. К і л ь ч е в с ь к и й М. О. Основні рівняння рівноваги пружних оболонок і деякі методи їх інтегрування, ч. III. Збірник праць Інституту математики Академії наук УРСР, № 6, 1940.