Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛООБМЕНА СИСТЕМЫ ТЕЛ

Е. И. Ким

(Харьков)

В настоящей работе рассматривается задача теплообмена системы тел, находящихся между собой в тепловом контакте, когда теплообмен между соприкасающимися телами происходит таким образом, что температура и тепловой поток в окрестности границы соприкосновения изменяются непрерывным образом.

Одномерная задача рассматривалась в книгах Ф. Франка и Р. Мизеса [1], Х. С. Карслоу [2], Д. А. Лыкова [3] и в работах А. Б. Дацева [4–7], М. Е. Швеца [8], С. А. Усольцева [9], Е. М. Добрышмана [9] и др.

Многомерная задача также рассматривалась. Например, в книгах А. В. Лыкова [3] и Х. С. Карслоу [2] рассматриваются задачи, сводящиеся в конечном счете к одномерной задаче. К такого рода задачам относятся те задачи, когда граница соприкосновения двух тел — круговой цилиндр либо сфера.

В общем случае многомерная задача рассматривается в книге Г. Мюнца [11]. Решение задачи ищется в виде тепловых потенциалов простого и двойного слоев.

Используя граничные условия, Мюнц получает систему интегральных уравнений для плотностей тепловых потенциалов. Но к этой системе интегральных уравнений не применим метод последовательных приближений, хотя они внешне похожи на систему уравнений типа Вольтерра 2-го рода.

В недавней работе А. Б. Дацева [12] эта задача рассматривалась снова.

Автор ищет решение в виде теплового потенциала простого слоя для одной и другой сред и путем некоторых преобразований получает интегральное уравнение типа Вольтерра 2-го рода, которое вопреки утверждению автора нельзя решить методом последовательных приближений.

В свое время мы также рассматривали частный вид этой общей задачи, и нами была также допущена аналогичная ошибка [13].

Таким образом, многомерная задача теплообмена системы тел до сих пор не получила строгого решения.

В данной работе рассматривается плоская задача в случае, когда контур соприкосновения двух сред — прямая. Среди задач, связанных с теплообменом между соприкасающимися средами, эта частная задача займет, пожалуй, центральное место, так как остальные являются в какой-то мере обобщением этой.

§ 1. Постановка задачи. Требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2(x)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \qquad a^2(x) = \begin{cases} a_1^2 & \text{при } x < 0 \\ a_2^2 & \text{при } x > 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, y, t)\,|_{t=0} = f(x, y) \tag{1.2}$$

и условиям сопряжения

$$u(-0, y, t) = u(+0, y, t), \qquad k_1 u_x'(-0, y, t) = k_2 u_x'(+0, y, t) \tag{1.3}$$

где k_1, k_2 — положительные постоянные величины.

На функцию $f(x, y)$ наложим следующее ограничение:

$$|f(x, y)|, \quad |f_x'(x, y)|, \quad |f_y'(x, y)| \leqslant Me^{\delta^2 r^2}, \quad r^2 = x^2 + y^2 \tag{1.4}$$

где M, δ^2 — постоянные величины.

Будем искать решение в классе функций, удовлетворяющих неравенству

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant t_0} |u(x, y, t)| \leqslant M_0 e^{\delta_0^2 r^2} \tag{1.5}$$

где M_0 и δ_0^2 — также постоянные величины, определяемые M, δ^2 и t_0, а t_0 через δ^2 и $a_0 = \max(a_1, a_2)$. (На основании теоремы единственности А. Н. Тихонова это условие необходимо.)

§ 2. Интегральное представление решения. Решение поставленной задачи будем искать в следующем виде:

$$u(x, y, t) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(\eta, \tau)}{2\pi(t-\tau)} \exp\left[-\frac{x^2 + (y-\eta)^2}{4a_1^2(t-\tau)}\right] d\eta + \tag{2.1}$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \eta)}{4a_1^2 \pi t} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4a_1^2 t}\right] d\eta \qquad (\text{для } x < 0)$$

$$u(x, y, t) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\eta, \tau)\, x}{4\pi a_2^2 (t-\tau)^2} \exp\left[\frac{x^2 + (y-\eta)^2}{4a_2^2(t-\tau)}\right] d\eta + \tag{2.2}$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \eta)}{4a_2^2 \pi t} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4a_2^2 t}\right] d\eta \qquad (\text{для } x > 0) .$$

Совершенно очевидно, что эта функция удовлетворяет уравнению (1.1) и начальному условию, так как она выражается тепловыми потенциалами.

Нужно выбрать функции $\varphi(\eta, \tau)$ и $\psi(\eta, \tau)$ так, чтобы функция $u(x, y, t)$ удовлетворяла условиям сопряжения (1.3) и условию (1.5).

Непосредственной оценкой можно установить, что если функции φ, ψ удовлетворяют условиям

$$|\varphi(y, t)| \leqslant Me^{\delta^2 y^2}, \qquad |\varphi(y, t) - \varphi(y_2, t)| \leqslant Me^{\delta^2 n^2} |y_1 - y_2|^\alpha \tag{2.3}$$

$$|\psi(y, t)| \leqslant \frac{M}{\sqrt{t}} e^{\delta^2 y^2}, \qquad |\psi(y, t) - \psi(y_2, t)| \leqslant \frac{Me^{\delta^2 n^2}}{\sqrt{t}} |y_1 - y_2|^\alpha \tag{2.4}$$

где $n = \max(|y_1|, |y_2|)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, то при наличии условия (1.4) функция $u(x, y, t)$ удовлетворяет неравенству (1.5)[1]. При оценке мы видим, что мажорирующие интегралы в (2.1), (2.2) не сходятся для любого значения t. Для сходимости этих интегралов необходимо наложить условие

$$0 < t \leqslant t_0 < \frac{1}{4a_0^2 \delta^2} \tag{2.5}$$

[1] Условия типа Гельдера не требуются при доказательстве неравенства (1.5), но они необходимы для условий (1.3) (см. § 3).

Тогда δ_0^2 в (1.5) уже определяется формулой

$$\delta_0^2 = \frac{1}{1 - 4a_0^2 \delta^2 t_0} \tag{2.6}$$

Таким образом, в дальнейшем нам нужно искать функции φ, ψ в классе функций, удовлетворяющих неравенствам (2.3), (2.4).

§ 3. Сведение задачи к интегральному уравнению. Теперь перейдем к определению функций $\varphi(y, t)$ и $\psi(y, t)$ в формулах (2.1) и (2.2). При этом заметим, что первое слагаемое в (2.1) — тепловой потенциал простого слоя, а первое слагаемое в (2.2) — тепловой потенциал двойного слоя.

На основании условия (1.3) и свойства теплового потенциала двойного слоя имеем

$$\begin{aligned}\varphi(y, t) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(\eta, \tau)}{2\pi(t-\tau)} \exp\left[-\frac{(y-\eta)^2}{4a_1^2(t-\tau)}\right] d\eta + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \eta)}{4a_1^2 \pi t} \exp\left[-\frac{\xi^2 + (y+\eta)}{4a_1^2 t}\right] d\eta - \\ - \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \eta)}{4a_2^2 \pi t} \exp\left[-\frac{\xi^2 + (y-\eta)^2}{4a_2^2 t}\right] d\eta\end{aligned} \tag{31}$$

а на основании второго условия (1.3) и свойства нормальной производной теплового потенциала простого слоя получим

$$\begin{aligned}k_1 \psi(y, t) = k_2 \lim_{x \to 0} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\varphi(\eta, \tau)}{4a_2^2 \pi (t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{x^2 + (y-\eta)^2}{4a_2^2(t-\tau)}\right] d\eta + \\ + k_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi f(\xi, \eta)}{8a_2^4 \pi t^2} \exp\left[-\frac{\xi^2 + (y-\eta)^2}{4a_2^2 t}\right] d\eta - \\ - k_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi f(\xi, \eta)}{8a_1^4 \pi t^2} \exp\left[-\frac{\xi^2 + (y-\eta)^2}{4a_1^2 t}\right] d\eta\end{aligned} \tag{3.2}$$

Очевидно, что если функция $\psi(y, t)$ определена, то функция $\varphi(y, t)$ определяется формулой (3.1) и можно легко показать, что при неравенствах (2.4) следуют неравенства (2.3).

Таким образом, наша задача свелась к определению функции $\psi(y, t)$. Для определения этой функции исключим сперва из двух уравнений функцию $\varphi(\eta, \tau)$, а затем после перестановки интегралов и упрощения внутренних интегралов вычислим предел производной. При этом условие (2.4) обеспечивает существование предела.

В результате этих вычислений получим интегральное уравнение

$$\psi(y, t) = \frac{a_1 k_2 (a_1^2 - a_2^2)}{2\pi^{3/2}(a_1 k_2 + a_2 k_1)} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} k_0((y-\eta)^2, t-\tau)\, \psi(\eta, \tau)\, d\eta + F(y, t) \tag{3.3}$$

где

$$k_0((y-\eta)^2, t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} \int_0^\infty \rho(z) \left[1 - \frac{(y-\eta)^2}{2a^2(z)(t-\tau)}\right] \exp\left[-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(z)(t-\tau)}\right] dz \tag{3.4}$$

$$\rho(z) = (z^2 + a_1^2)^{-3/2}(z^2 + a_2^2)^{-1/2}, \qquad a^2(z) = a_2^2 \frac{z^2 + a_1^2}{z^2 + a_2^2} \tag{3.5}$$

а функция $F(y, t)$ определяется следующей формулой:

$$F(y,t) = \frac{k_2}{4\pi^{3/2} a_1^2 a_2 (a_1 k_2 + a_2 k_1) t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^\infty \sqrt{\frac{\xi^2 + 4a_1^2 tz^2}{\xi^2 + 4a_2^2 tz^2}} \exp\left[-z^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{(y-\eta)^2}{4a_1^2 t} \frac{\xi^2 + 4a_1^2 tz^2}{\xi^2 + 4a_2^2 tz^2}\right] dz \right) \xi f(\xi, \eta) \exp\left[-\frac{\xi^2}{4a_1^2 t}\right] d\eta +$$

$$+ \frac{k_2 (a_1^2 - a_2^2)}{4\pi^{3/2} a_1 (a_1 k_2 + a_2 k_1) t^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^\infty \rho(z) \left[1 - \frac{(y-\eta)^2}{2a^2(z)(t-\tau)}\right] \exp\left[-\frac{\xi^2 z^2}{4a_1^2 a_2^2 t} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{(y-\eta)^2}{4a^2(z) t}\right] dz \right) f(\xi, \eta) \exp\left[-\frac{\xi^2}{4a_1^2 t}\right] d\eta +$$

$$+ \frac{k_2}{8\pi a_2^3 (a_1 k_2 + a_2 k_1) t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi + |\xi|) f(\xi, \eta) \exp\left[-\frac{\xi^2 + (y-\eta)^2}{4a_2^2 t}\right] d\eta -$$

$$- \frac{a_2 k_1}{8\pi a_1^4 (a_1 k_2 + a_2 k_1) t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \xi f(\xi, \eta) \exp\left[-\frac{\xi^2 + (y-\eta)^2}{4a_1^2 t}\right] d\eta \tag{36}$$

В этой формуле производим замену $y - \eta = \eta_1$, $f(\xi, \eta) = f(\xi, y - \eta_1)$. При дифференцировании функции $F(y, t)$ по y вид правой части (3.6) не изменяется, а вместо $f(\xi, y - \eta_1)$ будет $f_y'(\xi, y - \eta_1)$. Поэтому если f и f_y' имеют одинаковую оценку, то $F(y, t)$ и $F_y'(y, t)$ также имеют одинаковую оценку. Непосредственным вычислением можно показать, что если функция $f(x, y)$ удовлетворяет неравенству (1.4), то существуют такие t_0, M_0, δ_0^2, что

$$|F(y, t)|, \quad |F_y'(y, t)| \leqslant \frac{M_0}{\sqrt{t}} e^{\delta_0^2 y^2} \quad \text{при } 0 < t \leqslant t_0 \tag{3.7}$$

§ 4. Решение интегрального уравнения. Рассмотрим интегральное уравнение (3.3) с параметром λ:

$$\psi(y, t) = \lambda \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} k_0((y-\eta)^2, t-\tau) \psi(\eta, \tau) d\eta + F(y, t) \tag{4.1}$$

где $k_0((y-\eta^2), t-\tau)$ определяется формулой (3.4).

Ядро этого интегрального уравнения имеет сильную существенную особенность при $\eta = y$ и $\tau = t$, так как оно удовлетворяет неравенству

$$|k_0((y-\eta)^2, t-\tau)| \leqslant \frac{M}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\delta^2 \frac{(y-\eta)^2}{t-\tau}\right] \tag{4.2}$$

где M и δ^2 — некоторые постоянные величины.

В силу этого интеграл в (4.1) не может сходиться абсолютно. Это обстоятельство вызывает некоторое затруднение в применении метода последовательных приближений, более того, мы увидим его непригодность для нашего уравнения, хотя уравнение (4.1) внешне похоже на уравнение Вольтерра 2-го рода.

Решение, получаемое методом последовательных приближений, выражается в виде степенного ряда относительно параметра λ. Следовательно, оно является целой функцией относительно λ либо существует ограниченный интервал сходимости, внутри которого оно определяется.

Покажем, что уравнение (4.1) для любого λ не имеет решения, а решение существует только при $\lambda < \lambda_0$, где λ_0 — вполне определенное число.

Отсюда видно, что метод последовательных приближений не дает решения для всех $\lambda < \lambda_0$ без привлечения аналитического продолжения. Метод последовательных приближений с привлечением аналитического продолжения практически трудно осуществить. Поэтому мы дадим более элементарный метод, а именно метод трансформации Фурье — Лапласа.

Сперва рассмотрим уравнение (4.1), когда функция принадлежит к классу функций, для которых применима трансформация Фурье относительно первого аргумента, а относительно второго — трансформация Лапласа. Будем искать решение в этом классе. Пусть

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y, t)\, e^{iuy}\, dy = f_1(u, t), \qquad \int_0^\infty e^{-pt} f_1(u, t)\, dt = \frac{f_2(u, p)}{p} \tag{4.3}$$

К уравнению (4.1) применим трансформацию Фурье. Тогда

$$\psi_1(u, t) = \lambda \int_0^t \psi_1(u, t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} k_0(\eta^2, t-\tau)\, e^{iu\eta}\, d\eta\right) d\tau + F_1(u, t) \tag{4.4}$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k_0(\eta^2, t-\tau)\, e^{iu\eta}\, d\eta = 4\sqrt{\pi}\, u^2 \int_0^\infty \rho(z)\, a^3(z) \exp\left[-u^2 a^2(z)(t-\tau)\right] dz \tag{4.5}$$

Таким образом, уравнение (4.4) принимает следующий вид:

$$\psi_1(u, t) = 4\sqrt{\pi} u^2 \lambda \int_0^t \psi_1(u, \tau) \left(\int_0^\infty \rho(z)\, a^3(z) \exp\left[-u^2 a^2(z)(t-\tau)\right] dz\right) d\tau + F_1(u, t)$$

Теперь применим трансформацию Лапласа. Тогда

$$\psi_2(u, p) = 4\sqrt{\pi}\lambda u^2 \psi_2(u, p) \int_0^\infty \frac{\rho(z)\, a^3(z)}{p + u^2 a^2(z)}\, dz + F_2(u, p) \tag{4.6}$$

Но

$$\int_0^\infty \frac{\rho(z)\, a^3(z)}{p + u^2 a^2(z)}\, dz = a_2^3 \int_0^\infty \frac{dz}{(z^2 + a_2^2)\left[(p + a_2^2 u^2) z^2 + (p + a_1^2 u^2)\right]} =$$

$$= \frac{\pi}{2(a_2^2 - a_1^2) u^2}\left[\sqrt{\frac{p + a_2^2 u^2}{p + a_1^2 u^2}} - 1\right] \tag{4.7}$$

Подставляя (4.7) в (4.6), определяем функцию

$$\psi_2(u, p) = \frac{\mu}{\nu + \sqrt{(p + a_2^2 u^2) / (p + a_1^2 u^2)}} F_2(u, p) \tag{4.8}$$

где

$$\mu = \frac{a_1^2 - a_2^2}{2\pi^{3/2}\lambda}, \qquad \nu = \frac{a_1^2 - a_2^2 - 2\pi^{3/2}\lambda}{2\pi^{3/2}\lambda} \tag{4.9}$$

Отсюда

$$\mu = \nu + 1, \qquad \lambda = \frac{a_1^2 - a_2^2}{2\pi^{3/2}(\nu + 1)} \tag{4.10}$$

Если $\nu = -1$, то $\lambda = \infty$. Поэтому при отыскании оригинала функции $\psi_2(u, p)$ будем предполагать, что $\nu \neq -1$. Функция $\psi_2(u, p)$ выражается в виде произведения двух множителей. Поэтому нужно искать оригинал каждого множителя и применять формулу свертки. Оригинал функции $F_2(u, p)$ известен. Следовательно требуется искать оригинал другого множителя. Нетрудно проверить следующую формулу:

$$\left(\nu + \sqrt{\frac{p + a_2^2 u^2}{p + a_1^2 u^2}}\right)^{-1} \doteq \frac{a_1}{a_1\nu + a_2} - \frac{(|\nu| - \nu)(a_1^2 - a_2^2)}{(\nu^2 - 1)(a_1^2\nu^2 - a_2^2)} e^{-d_0 u^2 t} -$$

$$- \frac{2a_2(a_1^2 - a_2^2)}{\pi} \int_0^\infty \frac{z^2 \exp[-a^2(z) u^2 t]}{(z^2 + a_1^2)(z^2 + a_2^2)(\nu^2 z^2 + a_2^2)} dz \tag{4.11}$$

где

$$d_0 = \frac{a_1^2 \nu^2 - a_2^2}{\nu^2 - 1}, \qquad \nu \neq \pm 1, \qquad \nu = \pm \frac{a_2}{a_1} \tag{4.12}$$

Из этой формулы, в частности при $\nu \geqslant 0$, следует

$$\left(\nu + \sqrt{\frac{p + a_2^2 u^2}{p + a_1^2 u^2}}\right)^{-1} \doteq \frac{a_1}{a_1\nu + a_2} - \frac{2a_2(a_1^2 - a_2^2)}{\pi} \int_0^\infty \frac{z^2 \exp[-a^2(z) u^2 t]\, dz}{(z^2 + a_1^2)(z^2 + a_2^2)(\nu^2 z^2 + a_2^2)} \tag{4.13}$$

Непосредственной проверкой можно установить, что последняя формула справедлива при $\nu = 1$ или $\nu = a_2/a_1$.

Непосредственной проверкой можно также установить формулу

$$\left(-\frac{a_2}{a_1} - \sqrt{\frac{p + a_2^2 u^2}{p + a_1^2 u^2}}\right)^{-1} \doteq \frac{3a_1^3 + a_1 a_2^2}{2a_2(a_1^2 - a_2^2)} + \frac{2a_1^3 a_2}{a_1^2 - a_2^2} u^2 t -$$

$$- \frac{2a_1^2(a_1^2 - a_2^2)}{\pi a_2} \int_0^\infty \frac{z^2 \exp[-u^2 a^2(z) t]}{(z^2 + a_1^2)^2 (z^2 + a_2^2)} dz \tag{4.14}$$

Последнюю можно получить из (4.11) при $\nu \to -a_2/a_1$. Таким образом, формулы для $\nu = 1$, a_2/a_1, $-a_2/a_1$ можно получить предельным переходом из (4.11). Применяя формулу свертки к равенству (4.8), получим оригинал функции $\psi_2(u, p)$:

$$\psi_1(u, t) = F_1(u, t) + \frac{\mu(|\nu| - \nu)(a_1^2 - a_2^2) d_0}{(\nu^2 - 1)(a_1^2\nu^2 - a_2^2)} \int_0^t F_1(u, \tau) u^2 e^{-d_0 u^2 (t - \tau)} d\tau +$$

$$+ \frac{2a_2\mu(a_1^2 - a_2^2)}{\pi} \int_0^t F_1(u, \tau) \left(\int_0^\infty \frac{z^2 a^2(z) u^2 \exp[-u^2 a^2(z)(t - \tau)]}{(z^2 + a_1^2)(z^2 + a_2^2)(\nu^2 z^2 + a_2^2)} dz \right) d\tau \tag{4.15}$$

Теперь из последней формулы найдем искомую функцию $\psi(y, t)$. Если в этой формуле $d_0 \leqslant 0$ и $\nu < 0$, то для любой функции $F_1(u, \tau)$ нельзя применять формулу обращения Фурье, так как во втором слагаемом функция $u^2 e^{-d_0 u^2 (t-\tau)}$ растет при возрастании u. Поэтому для существования обращения Фурье функции $\psi_1(u, t)$ для всех функций $F(y, t)$, к которым можно применять преобразования Фурье, необходимо и достаточно, чтобы $d_0 > 0$ или $\nu \geqslant 0$. Но d_0 и ν зависят от λ. Их зависимость устанавливают формулы (4.9) и (4.12). Переведя эти условия на λ, получим

$$\lambda < \frac{a_1(a_1^2 + a_2^2)}{2\pi^{3/2}} \tag{4.16}$$

Это и будет необходимое и достаточное условие для того, чтобы интегральное уравнение (4.1) было обратимо в класс функций, к которым можно применить преобразование Фурье и Лапласа.

Пусть $d_0 = b^2$. Применяя формулу обращения Фурье к (4.15), имеем

$$\psi(y, t) = F(y, t) +$$

$$+ \frac{\mu(|\nu| - \nu)(a_1^2 - a_2^2) b^2}{(\nu^2 - 1)(a_1^2\nu^2 - a_2^2)} \int_0^t \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-b^2u^2(t-\tau) - iyu} F_1(u, \tau)\, du \right) d\tau +$$

$$+ \frac{2a_2\mu(a_1^2 - a_2^2)}{\pi} \int_0^t d\tau \int_0^\infty \frac{z^2 a^2(z)}{(z^2 + a_1^2)(z^2 + a_2^2)(\nu^2 z^2 + a_2^2)} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\infty} u^2 e^{-a^2(z) u^2 (t-\tau) - iyu} F_1(u, \tau)\, du \right) dz \tag{4.17}$$

Но

$$F_1(u, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(y, \tau) e^{iuy_1} dy \tag{4.18}$$

Подставляя (4.18) в (4.17) и переставляя интегралы, получим

$$\psi(y, t) = F(y, t) + \frac{\mu(|\nu| - \nu)(a_1^2 - a_2^2) b^2}{(\nu^2 - 1)(a_1^2\nu^2 - a_2^2)} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} F(y, \tau) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-u^2 b^2 (t-\tau) - i(y-y_1)u} du \right) dy_1 +$$

$$+ \frac{2a_2\mu(a_1^2 - a_2^2)}{\pi} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} F(y, \tau) \left\{ \int_0^\infty \frac{z^2 a^2(z)}{(z^2 + a_1^2)(z^2 + a_2^2)(\nu^2 z^2 + a_2^2)} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-u^2 a^2(z)(t-\tau) - iu(y-y_1)} du \right) dz \right\} dy_1$$

После вычисления внутренних интегралов в каждом слагаемом имеем

$$\psi(y, t) = F(y, t) +$$

$$+ \frac{\mu(|\nu| - \nu)(a_1^2 - a_2^2)}{4\sqrt{\pi} b(\nu^2 - 1)(a_1^2\nu^2 - a_2^2)} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(y, \tau) \left[1 - \frac{(y - y_1)^2}{2b^2(t-\tau)} \right] \times$$

$$\times \exp\left[1 - \frac{(y - y_1)^2}{2b^2(t-\tau)} \right] dy_1 + \frac{\mu(a_1^2 - a_2^2)}{2\pi^{3/2}} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(y, \tau) \times$$

$$\times \left(\int_0^\infty \frac{z^2 \rho(z)}{\nu^2 z^2 + a_2^2} \left[1 - \frac{(y - y_1)^2}{2a^2(z)(t-\tau)} \right] \exp\left[\frac{(y - y_1)^2}{4a^2(z)(t-\tau)} \right] dz \right) dy$$

Упрощая коэффициенты, получим окончательную формулу:

$$\psi(y,t) = F(y,t) + \lambda \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} R((y-\eta)^2, t-\tau, \lambda) F(\eta,\tau)\, d\eta \qquad (4.19)$$

где

$$R((y-\eta)^2, t-\tau, \lambda) = \frac{\pi}{2} \frac{(|\nu|-\nu)}{(\nu-1)^2 b^3 (t-\tau)^{3/2}} \left[1 - \frac{(y-\eta)^2}{2b^2(t-\tau)}\right] \exp\left[-\frac{(y-\eta)^2}{4b^2(t-\tau)}\right] +$$

$$+ \frac{\mu^2}{(t-\tau)^{3/2}} \int_0^\infty \frac{z^2\rho(z)}{\nu^2 z^2 + a_2^2} \left[1 - \frac{(y-\eta)^2}{2a^2(z)(t-\tau)}\right] \exp\left[-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(z)(t-\tau)}\right] dz \qquad (4.20)$$

Эту функцию назовем резольвентой ядра.

§ 5. Интегральные уравнения резольвенты. Уравнения

$$R((y-\eta)^2, t-\tau, \lambda) = k_0((y-\eta)^2, t-\tau) + \qquad (5.1)$$

$$+ \lambda \int_\tau^t dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} k_0((y-y_1)^2, t-t_1) R((y_1-\eta)^2, t_1-\tau, \lambda)\, dy \quad .$$

$$R((y-\eta)^2, t-\tau, \lambda) = k_0((y-\eta)^2, t-\tau) + \qquad (5.2)$$

$$+ \lambda \int_\tau^t dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} R((y-y_1)^2, t-t_1, \lambda) k_0((y_1-\eta)^2, t_1-\tau)\, dy$$

называются интегральными уравнениями резольвенты.

Для их проверки достаточно подставить в обе части (5.1) и (5.2) $k_0((y-\eta)^2, t-\tau)$, $R((y-\eta)^2, t-t, \lambda)$, определяемые формулами (3.4) и (4.20). Ясно, что эти равенства справедливы только при условии (4.16).

Пусть $\gamma(y,t)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условиям (2.4). Обозначим через $Б\gamma$ функцию

$$Б\gamma(y,t) = \gamma(y,t) - \lambda \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} k((y-\eta)^2, t-\tau)\gamma(\eta,\tau)\, d\eta$$

Аналогично через $Б^{-1}\gamma(y,t)$ функцию

$$Б^{-1}\gamma(y,t) = \gamma(y,t) + \lambda \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} R((y-\eta)^2, t-\tau, \lambda)\gamma(\eta,\tau)\, d\eta$$

Вычислим функции $ББ^{-1}\gamma(y,t)$ и $Б^{-1}Б\gamma(y,t)$:

$$ББ^{-1}\gamma(y,t) = \left[\gamma(y,t) + \lambda \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} R((y-\eta)^2 t-\tau, \lambda)\gamma(\eta,\tau) d,\tau) d\eta\right] -$$

$$- \lambda \int_0^t dt \int_{-\infty}^{+\infty} k_0((y-y_1)^2, t-t_1) \Big[\gamma(y_1, t_1) +$$

$$+ \lambda \int_0^{t_1} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} R((y_1-\eta)^2, t_1-\tau, \lambda)\gamma(\eta,\tau)\, d\eta\Big]\, dy_1 = \qquad (5.3)$$

$$= \gamma(y,t) + \lambda \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} [R((y-\eta)^2, t-\tau, \lambda) - k_0((y-\eta)^2 t-\tau)]\gamma(\eta,\tau)\, d\eta -$$

$$- \lambda^2 \int_0^t dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} k_0((y-y_1)^2, t-t_1) \left[\int_0^{t_1} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} R((y_1-\eta)^2, t_1-\tau, \lambda)\gamma(\eta,\tau)\, d\eta\right] dy_1$$

Если справедливо равенство

$$\int_0^t dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} k_0((y-y_1)^2, t-t_1)\left[\int_0^{t_1} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} R((y_1-\eta)^2 t_1-\tau, \lambda)\,\gamma(\eta, \tau)\,d\eta\right] dy_1 =$$

$$= \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{\int_\tau^t dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} k_0((y-y_1)^2, t-t_1)\, R((y_1-\eta)^2 t_1-\tau, \lambda)\,dy_1\right\} \gamma(\eta, \tau)\,d\eta \tag{5.4}$$

то

$$ББ^{-1}\gamma(y, t) = \gamma(y, t) +$$

$$+\lambda \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} [R((y-\eta)^2, t-\tau, \lambda) - k_0((y-\eta)^2, t-\tau) -$$

$$-\lambda \int_\tau^t dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} k_0((y-y_1)^2, t-t_1)\, R(y_1-\eta, t_1-\tau, \lambda)\,dy_1\Big]\,\gamma(\eta, \tau)\,d\eta$$

В силу (5.1) будем иметь

$$ББ^{-1}\gamma(y, t) = \gamma(y, t) \tag{5.5}$$

Совершенно аналогично, если

$$\int_0^t dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} R((y-y_1)^2, t-t_1, \lambda)\left[\int_0^{t_1} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} k_0((y_1-\eta)^2, t-\tau)\,\gamma(\eta, \tau)\,d\eta\right] dy_1 =$$

$$= \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_\tau^t dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} R((y-y_1)^2, t-t_1, \lambda)\, k_0((y_1-\eta)^2, t_1-\tau)\,dy_1\right] \gamma(\eta, \tau)\,d\eta \tag{5.6}$$

то

$$Б^{-1}Б\gamma(y, t) = \gamma(y, t) \tag{5.7}$$

Формулы (5.4) и (5.6) дают возможность переставить интеграл. Вообще говоря, такие сингулярные интегралы нельзя переставить. При их перестановке выделяется дополнительное слагаемое аналогично формуле Пуанкаре-Бертрана. Но в нашем случае этого не произошло ввиду наличия двух легко проверяемых равенств:

$$\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} k_0((y-\eta)^2, t-\tau)\,d\eta = 0 \tag{5.8}$$

$$\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} R((y-\eta)^2, t-\tau, \lambda)\,d\eta = 0 \tag{5.9}$$

При помощи формул (5.5) и (5.7) легко можно проверить, что функция, определенная формулой (4.19), является единственным решением интегрального уравнения, если $F(y, t)$ удовлетворяет условию (3.7). Этим самым снимаются ограничения о применимости преобразования Фурье-Лапласа к функциям $\varphi(y, t)$ и $F(y, t)$.

Возникает вопрос, сохраняется ли при выходе из класса функций, к которым можно применить преобразование Фурье-Лапласа, условие (4.16)?

На этот вопрос можно ответить утвердительно. Более того, можно показать, что интегральное уравнение (4.1) всегда имеет решение в классе обобщенных функций, определяемых линейными непрерывными функционалами для всех значений λ. Но для того чтобы обобщенная функция была обычной функцией, необходимо и достаточно, чтобы λ удовлетворяла неравенству (4.16) [14].

Остается показать, что параметр λ для уравнения (3.3) удовлетворяет неравенству (4.16):

$$\lambda = \frac{a_1 k_2 (a_1^2 - a_2^2)}{2\pi^{3/2}(a_1 k_2 + a_2 k_1)} = \frac{a_1(a_1 + a_2)}{2\pi^{3/2}} \frac{k_2(a_1 - a_2)}{a_1 k_2 + a_2 k_1}$$

Если $a_2 > a_1$, то

$$\frac{k_2(a_1 - a_2)}{a_1 k_2 + a_2 k_1} < 0 < 1$$

Если же $a_2 < a_1$, то

$$\frac{k_2(a_1 - a_2)}{a_1 k_2 + a_2 k_1} < \frac{a_1 k_2}{a_1 k_2 + a_2 k_1} < 1$$

Следовательно,

$$\lambda = \frac{a_1 k_2 (a_1^2 - a_2^2)}{2\pi^{3/2}(a_1 k_2 + a_2 k_1)} < \frac{a_1(a_1 + a_2)}{2\pi^{3/2}}$$

Таким образом, интегральное уравнение (3.3) разрешимо. Этим самым мы доказали существование решения задачи на теплообмен системы тел.

Поступила 5 X 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. ОНТИ, 1937.
2. Карслоу Х. С. Теория теплопроводности. ОГИЗ, 1947.
3. Лыков В. А. Теория теплопроводности. ГИТЛ, 1952.
4. Дацев А. Б. К вопросу об охлаждении неоднородного стержня. ДАН СССР, т. LVIII, № 2, 1947.
5. Дацев А. Б. Об охлаждении стержня, состоящего из конечного числа однородных частей. ДАН СССР, т. LVI, № 3, 4, 1947.
6. Дацев А. Б. Об общей линейной задаче теплопроводности многослойной среды. Изв. АН СССР, серия геогр. № 2, 1948.
7. Дацев А. Б. О теплопроводности неоднородного стержня. ДАН СССР, т. XXVIII, № 6, 1952.
8. Швец Е. М. О нагревании неоднородного стержня. ПММ, т. XII, вып. 2, 1948.
9. Усольцев С. А. Уравнение теплопроводности с разрывным коэффициентом. Диссертация. Алма-Ата, Каз. Гос. университет, 1951.
10. Добрышман Е. М. Об одном частном случае задачи теплопроводности для двух сред. ПММ. т. XVIII, № 2, 1954.
11. Мюнц Г. Интегральные уравнения, т. 1, ГТТИ, 1934.
12. Дацев А. Б. О двухмерной многослойной задаче теплопроводности, ДАН СССР, т. CI, вып. 5—6, 1955.
13. Ким Е. И. Распространение тепла в бесконечном неоднородном теле в двух измерениях. ПММ, т. XVIII, № 2, 1953.
14. Ким Е. И. Об одном классе сингулярных интегральных уравнений, ДАН СССР, т. CXIII, вып. 2, 1957.