

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ
 К ЗАДАЧАМ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

В. В. Лунев

(Москва)

Решаются уравнения ламинарного пограничного слоя сжимаемого газа с малыми градиентами давлений, с произвольной зависимостью вязкости от температуры и с переменным числом Прандтля. Диссоциация воздуха не вносит изменений в метод решения. Результаты применимы к сверхзвуковому ламинарному пограничному слою на тонких телах, на телах, мало отличающихся от клина или конуса, и т. д.

§ 1. Основные уравнения. Будем исходить из системы в форме Крокко^[1,2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau}{\partial u^2} + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho \mu}{\tau} \right) + \rho_{\infty} u_{\infty} u_{\infty}' \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\mu}{\tau} \right) &= 0 \\ \tau^2 \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial i}{\partial u} \right) + \tau \frac{\partial \tau}{\partial u} \frac{\partial i}{\partial u} \left(\frac{1}{\sigma} - 1 \right) + \tau^2 - \\ - \rho \mu u \frac{\partial i}{\partial x} - \rho_{\infty} \mu u_{\infty} u_{\infty}' \left(\frac{\partial i}{\partial u} + u \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь i — энтальпия, σ — число Прандтля, $\tau = \mu \partial u / \partial y$.

Вывод этой системы при постоянном σ приведен в^[2] и почти полностью переносится на случай переменного $\sigma = \sigma(i, p)$.

Эту систему будем рассматривать при граничных условиях

$$\begin{aligned} \tau \frac{\partial \tau}{\partial u} &= -\rho_{\infty} \mu_w u_{\infty} u_{\infty}', \quad i_w = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{\partial i}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad u = 0 \\ \tau &= 0, \quad i = i_{\infty} \quad \text{при} \quad u = u_{\infty} \end{aligned}$$

Первое условие для τ получается из уравнения Прандтля в его обычной форме и из условия прилипания; второе условие для асимптотического пограничного слоя вытекает из формулы обращения

$$y(x, u) = \int_0^u \frac{\mu(x, u) du}{\tau(x, u)}$$

Здесь вследствие конечного промежутка интегрирования τ должно исчезать при $y \rightarrow \infty$. Кроме того, должно удовлетворяться условие $\tau_w \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$. Введем безразмерные величины

$$\begin{aligned} \tau^0 &= \frac{\tau}{\rho_{0\infty} u_{0\infty}^2}, \quad i^0 = \frac{i}{i_{0\infty}}, \quad x^0 = \frac{\rho_{0\infty} u_{0\infty}^x}{\mu_{0\infty}}, \quad u^0 = \frac{u}{u_{0\infty}}, \quad p^0 = \frac{p}{p_{0\infty}} \\ \mu^0 &= \frac{\mu}{\mu_{0\infty}}, \quad \rho^0 = \frac{\rho}{\rho_{0\infty}}, \quad \rho \mu = \rho_{0\infty} \mu_{0\infty} F(i^0, i_{0\infty}, p_{0\infty}, p^0), \quad c = \frac{u_{0\infty}^2}{i_{0\infty}} \\ q^0 &= \frac{q}{\rho_{0\infty} u_{0\infty} i_{0\infty}} \end{aligned}$$

Здесь $u_{0\infty}$, $i_{0\infty}$ и т. д. — значения соответствующих величин в некоторой точке внешней границы. Для воздуха в обычном состоянии

$$F = f(i) p^0 \quad \left(f(i) = \frac{T_\infty + s}{T + s} \sqrt{\frac{T}{T_\infty}} \right)$$

В случае равновесной диссоциации необходимые данные для вычисления F содержатся в работе [3]. В обоих случаях F — медленно меняющаяся функция от i . Впредь для общности записи будем обозначать $\partial F(i, p) / \partial p = f$; через q обозначены тепловые потоки $q = -(\tau / \sigma)(\partial i / \partial u)$.

Кроме того, от переменных (x, u) перейдем к новым переменным $(x, \eta (u, x) = u / u_\infty)^1$. Тогда наши уравнения и граничные условия (с опущенными индексами ⁰) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau}{\partial \eta^2} + u_\infty^3 \eta \frac{\partial'}{\partial x} \frac{F}{\tau} + \rho_\infty u_\infty^2 u_\infty' \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\mu}{\tau} - \eta^2 u_\infty' u_\infty^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{F}{\tau} &= 0 \\ \tau^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial i}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{1}{\sigma} - 1 \right) \tau \frac{\partial \tau}{\partial \eta} \frac{\partial i}{\partial \eta} + c \tau^2 u_\infty^2 - \eta F u_\infty^3 \frac{\partial i}{\partial x} + \\ + u_\infty' u_\infty^2 (F \eta^2 - \rho_\infty \mu) \frac{\partial i}{\partial \eta} - c \rho_\infty u_\infty' u_\infty^4 \mu \eta &= 0 \quad (1.2) \\ \tau \frac{\partial \tau}{\partial \eta} = -\rho_\infty \mu_w u_\infty^2 u_\infty', \quad i_w = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{\partial i}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0 \\ \tau = 0, \quad i = i_\infty \quad \text{при} \quad \eta = 1 \end{aligned}$$

§ 2. Решение системы (1.2) в случае малых градиентов давлений при постоянном числе Прандтля. Пусть $u_\infty = 1 + \varepsilon_1 v + o(\varepsilon_1^2)$. Используя уравнение Бернулли в безразмерной форме $1/2 c + 1 = 1/2 c u_\infty^2 + i_\infty$ и уравнение изэнтропы, получим для остальных величин на внешней границе

$$i_\infty = 1 - \varepsilon_1 c v + o(\varepsilon_1^2), \quad \rho_\infty = 1 + o(\varepsilon_1), \quad p = 1 - \varepsilon_1 \alpha c v + o(\varepsilon_1^2)$$

Здесь $\alpha = \partial p(i, S) / \partial i$, где S — энтропия; для политропического на внешней границе газа $\alpha = \kappa / (\kappa - 1)$, $c = (\kappa - 1) M_{0\infty}^2$.

Введем в уравнения еще один малый параметр [4], ε_2 , заменяя $F(i, p)$ разложением

$$F(i, p) = F(i, 1) - \varepsilon_1 f \alpha c v + o(\varepsilon_1^2) = F_0 (1 + \varepsilon_2 \Delta - \varepsilon_1 f_0 \alpha c v) + o(\varepsilon_2)$$

Здесь

$$\Delta = 2 \frac{F(i, 1) - F_0}{F_{\max} - F_{\min}}, \quad F_0 = \frac{1}{2} (F_{\max} + F_{\min})$$

$$\varepsilon_2 = \frac{F_{\max} - F_{\min}}{F_{\max} + F_{\min}}, \quad f_0 = \frac{f}{F_0}$$

¹ Такая замена вызвана необходимостью вследствие сингулярности решения при $u = u_\infty$ удовлетворять граничным условиям при разложении решения по степеням малого параметра точно при $u = u_\infty$.

Решение задачи будем искать в виде

$$\tau = \sqrt{F_0} (\tau_0 + \varepsilon_1 \tau_1 + \varepsilon_2 \tau_2) + o(\varepsilon^2), \quad i = i_0 + \varepsilon_1 i_1 + \varepsilon_2 i_2 + o(\varepsilon^2) \quad (2.1)$$

$$q = \sqrt{F_0} (q_0 + \varepsilon_1 q_1 + \varepsilon_2 q_2) + o(\varepsilon^2)$$

$$\mu(i, p) = F_0 \mu(i_0, 1) + o(\varepsilon) \quad (\mu(i_0, 1) = 1, \text{ если } i_0 = 1)$$

В последующем будем учитывать в решении лишь члены со степенями ε_1 и ε_2 не выше первой. Величина F_0 определится после нахождения нулевого приближения, в которое она не входит. Если диссоциация отсутствует, то

$$f = F(i, 1) = F_0 (1 + \varepsilon_2 \Delta), \quad \mu = fT = i_0 + o(\varepsilon)$$

(вообще говоря, последнее ε не является комбинацией ε_1 и ε_2 , а обусловлено еще и малым изменением c_p).

Подставляя (2.1) в (1.2), собирая члены, не содержащие ε , и приравнявая их сумму к нулю, получим обычную [2,4] для пластины при $F = 1$ систему уравнений и граничных условий, решение которой имеет вид: $\tau_0 = g_0(\eta) / \sqrt{2x}$ и $i_0 = i_0(\eta)$, где

$$g_0 g_0'' = -\eta \quad (g_0'(0) = g_0(1) = 0), \quad i_0 = 1 + c\sigma J_1(\eta) + e J_2(\eta)$$

$$J_1(\eta) = \int_{\eta}^1 g_0^{\sigma-1} \int_0^{\eta} g_0^{1-\sigma} d\eta d\eta, \quad J_2(\eta) = \int_{\eta}^1 g_0^{\sigma-1} d\eta, \quad e = \frac{i_w - i_e}{J_2(0)}$$

При этом $-q_0 = g_0 i_0' / \sigma \sqrt{2x}$. Здесь $i_e = 1 + c\sigma J_1'(0)$ — энтальпия на стенке при отсутствии теплопередачи. Таблицы функций $J_1(\eta)$ и $J_2(\eta)$ для различных σ даны в книге [2]. Функции g и g_0' приведены в табл. 1.

Приравнявая коэффициент при ε_2 нулю, получим систему

$$g_0^2 \frac{\partial^2 \tau_2}{\partial \eta^2} - \eta \frac{\partial}{\partial x} (2x \tau_2) = - \frac{\eta g_0 \Delta(i_0)}{\sqrt{2x}} \quad (2.2)$$

$$\frac{g_0^2}{2x} \frac{\partial^2 i_2}{\partial \eta^2} + (1 - \sigma) \frac{g_0 g_0'}{2x} \frac{\partial i_2}{\partial \eta} - \sigma \eta \frac{\partial i_2}{\partial x} = (1 - \sigma) \frac{i_0'}{\sqrt{2x}} \left(-g_0 \frac{\partial \tau_2}{\partial \eta} + g_0' \tau_2 \right)$$

при граничных условиях

$$\frac{\partial \tau}{\partial \eta} = 0, \quad i_2 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial i_2}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при } \eta = 0$$

$$\tau_2 = 0, \quad i_2 = 0 \quad \text{при } \eta = 1$$

Решение этой системы имеет вид: $\tau_2 = g_2(\eta) / \sqrt{2x}$ и $i_2 = j_2(\eta)$, где g_2 и j_2 удовлетворяют уравнениям

$$g_0^2 g_0'' - \eta g_2 = -\eta g_0 \Delta, \quad q_2 = (g_0 j_2' + g_2 i_0') / \sqrt{2x} \sigma$$

$$g_0^2 j_2''' + (1 - \sigma) g_0 g_0' j_2' = (1 - \sigma) i_0' (g_2 g_0' - g_0 g_2') \quad (2.3)$$

Решение первого уравнения системы (2.3) проведено в [4]. Там же показано, что решение таким способом задачи о пластине даже при больших изменениях $F(i, 1)$ дает высокую точность¹. Решение второго уравнения выражается в квадратурах [2], но решать его не нужно, так

¹ Для уравнения $g_0 g_0'' = -\eta f(\eta)$ можно показать, что g_0 выражается сходящимся при $f_{\min} \geq 1/2 f_{\max}$ рядом по степеням ε_2 .

как расчеты показали [2,4], что влияние вида $F(i)$ на зависимость энтальпии от η пренебрежимо мало.

Приравнявая нулю коэффициент при ε_1 , получим систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial \eta^2} - \frac{\eta}{g_0^2} \frac{\partial}{\partial x} (2x\tau_2) &= \frac{\alpha c f_0 \eta}{g_0} \frac{d}{dx} (\sqrt{2xv}) - \\ &- \frac{3v\eta}{g_0 \sqrt{2x}} - \sqrt{2x} v' \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\mu}{g_0} - \eta^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{g_0} \right] \\ \frac{g_0^2}{2x} \frac{\partial^2 i_1}{\partial \eta^2} + (1 - \sigma) \frac{g_0 g_0'}{2x} \frac{\partial i_1}{\partial \eta} - \sigma \eta \frac{\partial i_1}{\partial x} &= \\ = \frac{(1 - \sigma)}{\sqrt{2x}} i_0' \left(g_0' \tau_1 - g_0 \frac{\partial \tau_1}{\partial \eta} \right) - \frac{c \sigma g_0^2 v}{x} + \sigma v' [c \eta \mu + (\mu - \eta^2) i_0'] \end{aligned} \quad (2.4)$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} g_0 \frac{\partial \tau_1}{\partial \eta} &= -\sqrt{2x} v' \mu, \quad i_1 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial i_1}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0 \\ \tau_1 &= 0, \quad i_1 = -c v \quad \text{при} \quad \eta = 1 \end{aligned}$$

Разрешить эту систему при произвольных v не представляется возможным, но если v имеет частный вид:

$$v = B_n x^n \quad (B_n = \text{const})$$

то решение системы (2.4) можно искать в виде

$$\tau_{1n} = [B_n x^n g_{1n}(\eta)] / \sqrt{2x}, \quad i_{1n} = B_n x^n (j_{1n}(\eta) - c + 2c\sigma J_1(\eta))$$

при этом задача приводится к системе уравнений

$$\begin{aligned} g_0^2 g_{1n}'' - (2n + 1) \eta g_{1n} &= (2n + 1) \alpha c f_0 g_0 \eta - 3g_0 \eta + \\ &+ 2n(\mu - \eta^2) g_0' - 2n g_0 i_0' \frac{d\mu}{d\eta} = \varphi_n \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} g_0^2 j_{1n}'' + (1 - \sigma) g_0 g_0' j_{1n}' - 2n\sigma \eta j_{1n} &= (1 - \sigma) (g_0' g_{1n} - g_0 g_{1n}') i_0' + \\ &+ 4nc\sigma^2 \eta J_1 + 2nc\sigma \eta (\mu - 1) + 2n\sigma (\mu - \eta^2) i_0' = \psi_n \end{aligned}$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} g_0 g_{1n} &= -2n\mu, \quad j_{1n} = c(1 - 2\sigma J_1(0)) \quad \text{или} \quad j_{1n}' = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0 \\ g_{1n} &= j_{1n} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 1 \end{aligned}$$

Так как всегда можно с точностью до величины порядка ε_1 представить v полиномом¹, то решение системы (2.4) представится как сумма решений указанного выше частного вида. Существенно, что первое уравнение системы (2.5) решается независимо от второго.

Пусть g_n^* и j_n^* — решения первого и второго однородных уравнений, соответствующих системе (2.5), и при $\eta = 0$ удовлетворяют условиям $g_n^* = j_n^* = 1$, $g_n^{*'} = j_n^{*'} = 0$. Эти решения могут быть получены численным интегрированием, они не зависят от конкретной задачи и являются универсальными функциями (см. табл. 1, при $\sigma = 0.725$). Тогда решения

¹ При полете тонкого профиля $v \sim dy/dx$, поэтому задача будет решена, если задать форму профиля в виде $y = y_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$.

уравнений (2.5) выразятся через квадратуры:

$$g_{1n} = -g_n^* \int_{\eta}^1 \frac{1}{g_n^{*2}} \left(\int_0^{\eta} \frac{\varphi_n g_n^*}{g_0^2} d\eta - \frac{2n\mu_w}{g_{0w}} \right) d\eta \quad (2.6)$$

$$j_{1n} = -j_n^* \int_{\eta}^1 \frac{g_0^{\sigma-1}}{j_n^{*2}} \left(\int_0^{\eta} \frac{\psi_n j_n^* d\eta}{g_0^{1+\sigma}} - C_1 \right) d\eta \quad (2.7)$$

Непосредственной подстановкой в уравнения нетрудно убедиться, что выписанные формулы действительно являются решениями и удовлетворяют граничным условиям при $\eta = 0$.

Таблица 1

η	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
g_0	0.4697	0.4693	0.4668	0.4600	0.4467	0.4244	0.3903	0.3406	0.2701
$-g_0'$	0	0.0115	0.0436	0.0976	0.1749	0.2783	0.4138	0.5925	0.8410
g_1^*	1.000	1.002	1.010	1.033	1.101	1.277	1.604	2.126	3.054
g_2^*	1	1.004	1.030	1.104	1.253	1.515	1.99	2.87	4.68
g_3^*	1	1.005	1.042	1.146	1.361	1.747	2.47	3.92	7.16
j_1^*	1	1.000	1.006	1.026	1.066	1.139	1.261	1.46	1.75
j_2^*	1	1.002	1.014	1.054	1.13	1.29	1.55	1.99	2.70
j_3^*	1	1.003	1.024	1.087	1.22	1.47	1.93	2.72	4.11

η	0.85	0.90	0.950	0.97	0.98	0.99	0.995	0.999
g_0	0.2243	0.1689	0.0997	0.0660	0.0471	0.0260	0.0142	0.00333
$-g_0'$	1.007	1.230	1.584	1.82	2.00	2.28	2.54	3.06
g_1^*	3.842	5.18	7.91	10.39	12.51	16.30	21.0	33
g_2^*	6.40	9.67	17.29	25.4	33.0	47.9	70.7	138
g_3^*	10.51	17.71	36.70	59.5	82.4	130.9	21.5	504
j_1^*	1.99	2.37	3.07	3.46	3.82	4.48		
j_2^*	3.35	4.45	6.76	8.35	10.0	13.2		
j_3^*	5.45	7.90	13.4	18.6	23.8	34.8		

Точка $\eta = 1$ — особая для всех рассматриваемых уравнений. В окрестности ее имеем

$$g_0 g_0'' = -1, \quad g_0' = -\sqrt{-2 \ln a g_0} \quad (a = 2.8) \quad (2.8)$$

$$g_0^2 g_n^{*''} - (2n + 1) g_n^* = 0$$

$$g_0^2 j_n^{*''} + (1 - \sigma) g_0 g_0' j_n^{*'} - 2\sigma n j_n^* = 0 \quad (2.9)$$

Из (2.8) и теоремы Коши о среднем следует, что J_2 и $(1 - \eta)$ убывают¹ при $\eta \rightarrow 1$, как $g_0^\sigma / (-g_0')$ и $g_0 / (-g_0')$ соответственно (J_1 и J_2 при $\sigma < 2$ пропорциональны друг другу при $\eta \geq 0.98$, причем $J_1 = 0.745 J_2$ для $\sigma = 0.725$).

¹ Функции J_2 и $1 - \eta$ подстановкой $t = -\sqrt{-\sigma \ln g_0}$ и $t = -\sqrt{-\ln g_0}$ соответственно сводятся к вероятностному интегралу.

Переходом к новой независимой переменной $y = -g_0'$ в первом уравнении (2.9) и $y = -\sqrt{\sigma}g_0'$ во втором эти уравнения приводятся к одному и тому же виду:

$$\frac{d^2z}{dy^2} + y \frac{dz}{dy} - mz = 0 \quad (y \rightarrow \infty \text{ при } \eta \rightarrow 1) \quad (2.10)$$

$$z = g_n^* \quad \text{при } m = 2n + 1, \quad z = j_n^* \quad \text{при } m = 2n$$

Неограниченное слагаемое решения (2.10) есть полином

$$z_1 = A \left(y^m + \frac{m(m-1)}{2} y^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 4} y^{m-4} + \dots \right) \quad (2.11)$$

$$A = \text{const}$$

Исходя из этого, можно доказать, что $\varphi_n, g_{1n}, \psi_n$ и j_{1n} убывают при $\eta \rightarrow 1$ не медленней, чем соответственно ¹

$$\begin{array}{llll} g_0^\sigma, & g_0^\sigma / (g_0')^2, & g_0^{2\sigma-1} / (-g_0'), & g_0^{2\sigma-1} / (-g_0')^3 & \text{при } \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1 \\ g_0, & g_0 / (g_0')^2, & g_0^\sigma / (-g_0'), & g_0^\sigma / (-g_0')^3 & \text{при } 2 > \sigma \geq 1 \end{array}$$

Таким образом, формулы (2.6) и (2.7) дают решение системы (2.5), удовлетворяющее при $\sigma > 1/2$ всем граничным условиям. То же самое будет справедливо и при $\sigma \geq 2$, но этот случай для газов неинтересен, так же как и случай $\sigma \leq 1/2$. Большинство интегралов, на которые разбиваются формулы (2.6) и (2.7) при $\sigma < 1$ не собственные, но быстро сходящиеся.

Величина q_1 представится в виде

$$\sigma \sqrt{2x} q_1 = \sum B_n x_n q_{1n}, \quad q_{1n} = g_0 (j_{1n}' + 2c\sigma J_1') + g_{1n} i_0' - g_0 i_0'$$

Если воздух находится в обычном состоянии, то, как указывалось, в (2.5) следует положить $f_0 = 1, \mu = i_0$.

В этом случае

$$g_{1n} = \frac{3 - \alpha c (2n + 1)}{2(n + 1)} g_0 + 2n g_{1n1} + 2nc\sigma g_{1n2} + 2neg_{1n3}$$

$$j_{1n} = 2nc\sigma j_{1n1} + 2nc^2\sigma^2 j_{1n2} + 2nc\sigma e j_{1n3} + 2ne^2 j_{1n4} + 2nc\sigma e j_{1n5} + C_1 j_{1n6}$$

Здесь g_{1ni} и j_{1ni} получаются из формул (2.6) и (2.7) и зависят, как от параметра, лишь от σ .

Величины j_{1n1} и j_{1n2} столь малы, что первыми двумя членами в выражении для j_{1n} можно пренебречь.

Расчеты показывают, что даже небольшие изменения внешней скорости могут играть существенную роль, что можно видеть из распределения трения вдоль поверхности тонкой дужки окружности.

¹ Это утверждение можно проверить непосредственно, пользуясь правилом Лопиталя.

В этом случае по линейной теории

$$\varepsilon_1 v = -\beta_0 / \sqrt{M_{0\infty}^2 - 1} + x / (R \sqrt{M_{0\infty}^2 - 1}) \quad (2.12)$$

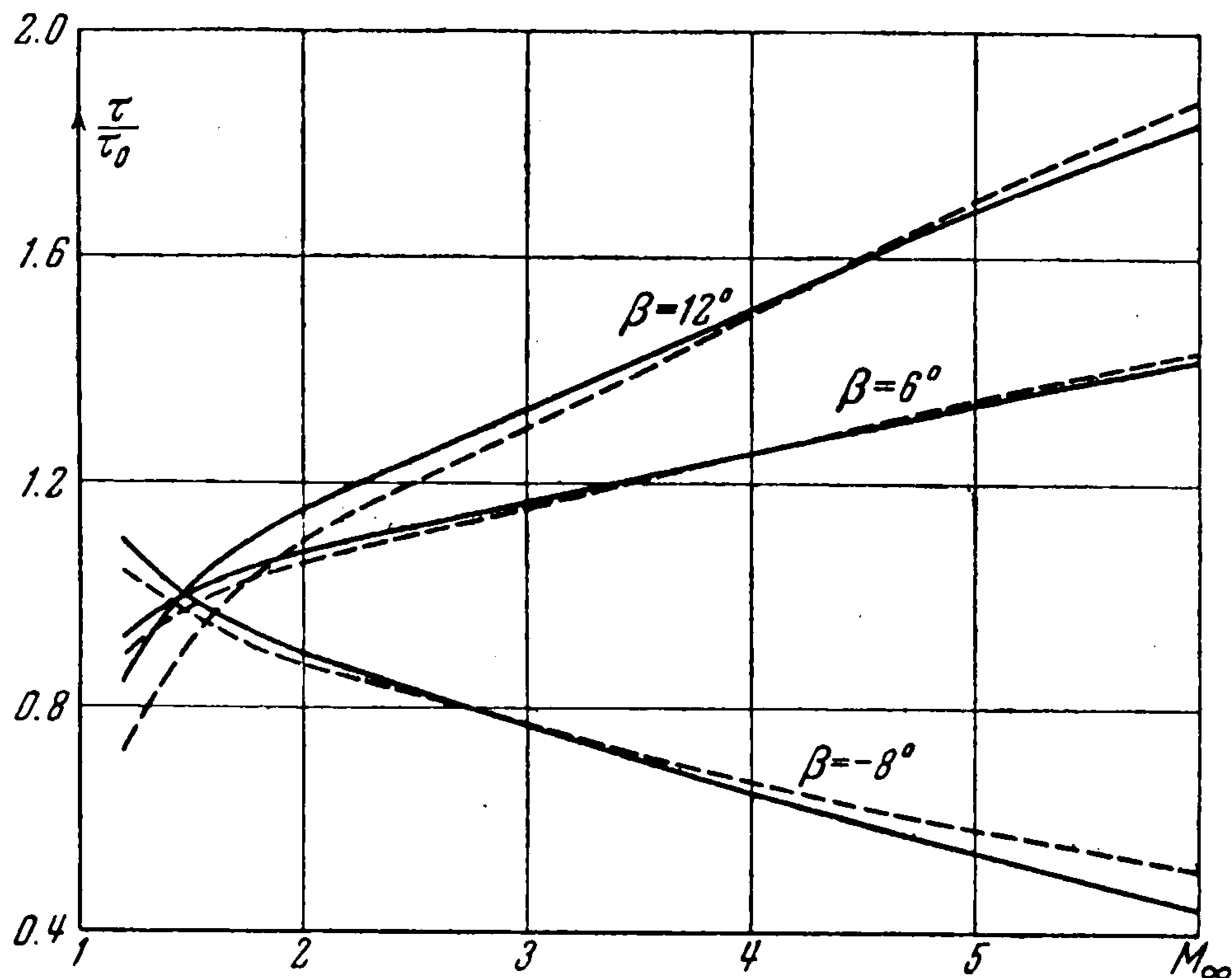
$$\begin{aligned} \tau / \tau_0 = & 1 + g_2 / g_0 + x [6.27 - (1.98 - 1.23x) M_{0\infty}^2 + \\ & + 3.76 (i_w - i_{0e})] / (R \sqrt{M_{0\infty}^2 - 1}) + (x M_{0\infty}^2 - 3) \beta_0 / 2 \sqrt{M_{0\infty}^2 - 1} \end{aligned}$$

где R — радиус, β_0 — угол дужки с направлением потока в $x = 0$, τ_0 и i_0 относятся к пластинке, параллельной невозмущенному потоку, $\sigma = 0.725$. В то же время вследствие малости величин j_{1n1} , j_{1n2} и $(1 - 2\sigma J_1(0))$ температура изолированного тонкого профиля практически не отличается от температуры изолированной пластины, параллельной потоку. (При $\sigma = 1$ это справедливо строго при любых изменениях внешней скорости.)

Таблица 2

n	$g_{1n1}^{(0)}$	$g_{1n2}^{(0)}$	$g_{1n3}^{(0)}$	$j_{1n3}^{(0)}$	$j_{1n4}^{(0)}$	$j_{1n5}^{(0)}$	$j_{1n6}^{(0)}$
1	1.30	0.645	1.27	0.857	1.69	1.57	0.856
2	1.08	0.553	1.06	0.590	1.23	1.11	0.705
3	0.969	0.503	0.982	0.457	0.949	0.859	0.613

Данные, приведенные в табл. 2, позволяют сразу выписать формулы вида (2.12) для трения и теплопередачи на тонком профиле, форма которого описывается полиномом 4-й степени. Вычисления приведены для $\sigma = 0.725$



Фиг. 1

Некоторой иллюстрацией точности предлагаемого метода может служить фиг. 1, где пунктиром показаны кривые трения на тонком клине, рассчитанные точно, как для пластины с параметрами, имеющими место за головной волной, и сплошной линией — приближенно изложенным методом

§ 3. Случай переменного числа Прандтля. Если σ меняется в зависимости от температуры и давления, но эти изменения невелики¹, то уравнения (1.2) с прежними граничными условиями могут быть решены тем же методом. Для этого представим число Прандтля в виде суммы

$$\sigma = \sigma_0 + \varepsilon_3 \sigma_1, \quad \varepsilon_3 = \sigma_{\max} - \sigma_0, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}), \quad \sigma_1 = \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_{\max} - \sigma_0}$$

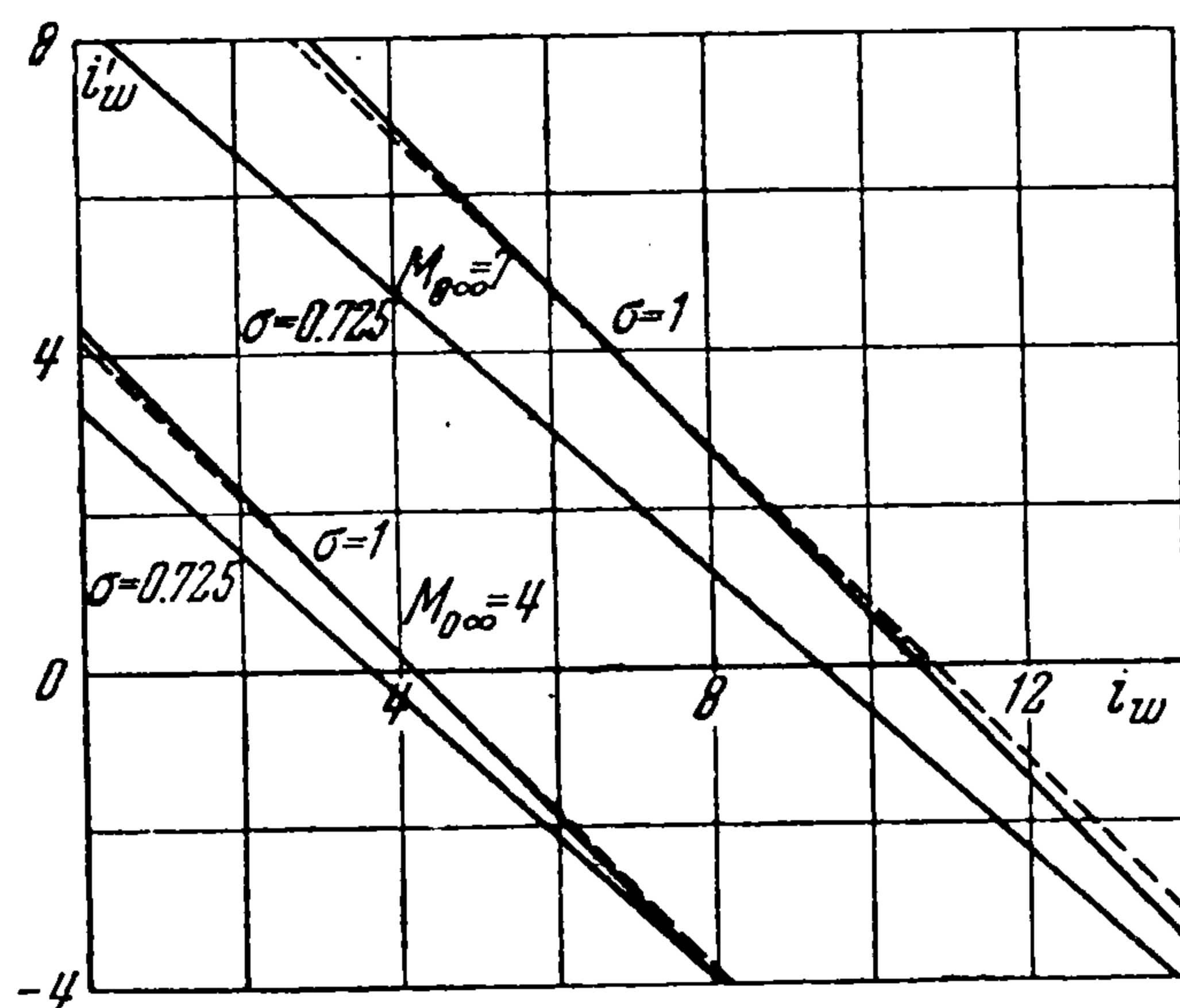
после чего в уравнения наряду с ε_1 и ε_2 войдет еще малый параметр ε_3 . Добавляя в (2.1) члены $\varepsilon_3 \tau_3$ и $\varepsilon_3 i_3$ соответственно, подставляя новые уже разложения τ и i в (1.2) и производя те же операции, что и в § 2, придем, кроме полученных в § 2, к уравнениям для τ_3 и i_3 , из которых следует $\tau_3 = 0$, а

$$i_3 = - \int_{\eta}^1 g_0^{\sigma_0-1} \int_0^{\eta} \left(\sigma_1 i_0' \frac{g_0'}{g_0} - c \sigma_1 \right) g_0^{1-\sigma_0} d\eta d\eta_1 - \\ - \frac{1}{\sigma_0} \int_{\eta}^1 g_0^{\sigma_0-1} \int_0^{\eta} i_0'^2 g_0^{1-\sigma_0} \sigma_1'(i_0) d\eta d\eta + C_2 J_2 \quad (3.1)$$

При $\eta \approx 1$ и при $\sigma < 2$ подынтегральное выражение первого интеграла в (3.1) и сам интеграл имеют соответственно вид:

$$h_1 g_0^{\sigma_0-1} (\ln g_0 + h_2), \quad \frac{h_1}{\sigma} \frac{g_0^{\sigma_0}}{(-g_0')} \left(\ln g_0 + h_2 - \frac{1}{\sigma} \right) \left(1 - \frac{1}{\sigma_0 g_0'^2} \right)$$

а остальные интегралы ранее рассмотренного типа.



Фиг. 2

Для оценки точности метода были проведены расчеты пластины при $\sigma_0 = 0.725$ и при постоянном $\Delta\sigma = \varepsilon_3 \sigma_1 = 0.275$; полученные результаты сравнивались с точным решением при $\sigma = 1$. При отсутствии теплообмена значения i_e в обоих случаях совпадают с точностью до 0.05%; на фиг. 2 дано сравнение величин i_w' при заданных значениях i_w , определенных точно (пунктирные линии) и приближенно изложенным методом (сплошные линии). При $\sigma_0 = 0.725$ и любом постоянном $\Delta\sigma$ справедливы формулы

$$\varepsilon_3 i_{3w} = 0.262 c \Delta\sigma, \quad \text{если } i_w' = 0 \\ \varepsilon_3 i_{3w}' = - [0.565 (i_w - 1) - 0.475c] \Delta\sigma, \quad \text{если } i_w = \text{const}$$

¹ Как показано в [5], для воздуха при диссоциации σ не превышает единицы.

§ 4. Распределение температуры вдоль стенки. В случае $i_w = i_w(x)$ при $F = \text{const}$ решение задачи о пластине дано в [5]. При наличии градиентов давлений или переменном F такая задача может быть решена лишь в предположении малых изменений i_w по x .

Вводя аналогично предыдущему в (1.2) малый параметр ε_4 и представляя температуру стенки в виде $i_w = i_{0w} + b_1x + \dots + b_nx^n$, получим, проводя операции, аналогичные § 2, 3:

$$\begin{aligned} \tau_4 = 0, \quad \varepsilon_4 i_{4n} = b_n x^n j_{4n}(\eta), \quad g_0^2 j_{4n}'' + (1 - \sigma) g_0 g_0' j_{4n}' - 2n\sigma\eta j_{4n} = 0 \\ j_{4n} = 0 \quad \text{при } \eta = 1, \quad j_{4n} = 1 \quad \text{при } \eta = 0 \end{aligned}$$

К этому же уравнению придем, если будем решать задачу с краевым условием при $\eta = 0$, соответствующим излучающей стенке $(\partial i / \partial y) = \varepsilon_4 \sqrt{x} T_w^4$, если, конечно, вызываемые изменения температуры малы.

В этом случае

$$\varepsilon_4 = \frac{\sqrt{2} k \omega \sigma T_{0\infty}^3}{i_{0\infty} c_p \rho_{0\infty} u_{0\infty} \sqrt{F_0 g_{0w}}}, \quad n = \frac{1}{2}, \quad i_4 = \sqrt{x} j_{1/2}(\eta)$$

Здесь ω — постоянная излучения, k — степень черноты, $j_{1/2}(0) = 0.867$, если $j_{1/2}'(0) = 1$.

Замечание. Вообще говоря, слабая зависимость решений от вида функции F показана [4] лишь для пластины. Уравнения (1.2) в случае малых градиентов давлений можно свести к обыкновенным, не накладывая ограничений на величину изменения функций $F(i, p)$ и $\sigma(i, p)$. Нулевое приближение для этого случая рассмотрено ранее [4]. Первое приближение, как и в § 2, сводится к группе систем уравнений вида (2.5), однако решения этих уравнений уже не будут содержать граничных условий в виде коэффициентов.

Решение этих уравнений будет в большей степени зависеть от вида $F(i, p)$, чем нулевое приближение, поэтому при достаточно больших перепадах температур введение ε_2 в уравнения (1.2), как это сделано в § 2, вообще говоря, незаконно.

Поступила 22 X 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. С г о с с о. Atti di [Guidonia, XVII, 7, 118, 1939.
2. Современное состояние аэродинамики больших скоростей, т. 1, под редакцией Хоурта. ИЛ, М., 1955.
3. М у р. Решение уравнений ламинарного пограничного слоя для сжимаемого газа. Механика, № 4, М., 1950. Сб. переводов иностранной периодики.
4. Л у н е в В. В. Ламинарный пограничный слой сжимаемого газа на пластине при больших перепадах температур. ПММ, т. XX, вып. 3, 1956.
5. Н а n s e n. Note on the Prandtle Number for Dissociated Air. JAS, № 11, 1953.
6. Ч е п м е н, Р у б е з и н. Пограничный слой на пластине с распределением температуры вдоль поверхности. Механика, № 4, М., 1950. Сб. переводов иностранной периодики.