Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

УРАВНЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ К НИМ В СЛУЧАЕ ДВИЖЕНИЯ В СЛАБО РАЗРЕЖЕННОМ ГАЗЕ СО СВЕРХЗВУКОВЫМИ СКОРОСТЯМИ

Ю. П. Лунькин
(Ленинград)

При движении со сверхзвуковыми скоростями на больших высотах длина свободного пробега молекул l будет порядка размеров движущегося тела L. Газ, в котором длина l мала, но сравнима с L, будем называть слабо разреженным газом.

Следуя теории Прандтля, получены уравнения пограничного слоя в слабо разреженном газе, которые отличаются от обычных уравнений Прандтля наличием дополнительных членов, содержащих более высокие производные скорости и температуры; в полученных уравнениях нормальный градиент давления отличен от нуля и выражается через дополнительные члены. Граничные условия к этим уравнениям найдены при помощи кинетической теории; они являются обобщением условий Максвелла [1] и Смолуховского [2] на случай движения со сверхзвуковыми скоростями. Указаны границы применимости полученных уравнений по скоростям и высотам.

§ 1. Уравнения пограничного слоя слабо разреженных газов. Для дальнейших расчетов удобно воспользоваться уравнениями разреженных газов, записанными в форме, которая была предложена Чепменом [3]; заметим, однако, что при вычислении тензора вязких напряжений во втором приближении P_2 Чепмен допустил ошибку[1].

Используем правильное выражение для P_2 и распишем подробно уравнение движения разреженного газа, ограничиваясь случаем плоско-парал-

---

[1] В окончательном выражении для $p^{(2)}$ (см. формулу (6) на стр. 265) второй член справа следует писать так:

$$k_2 \frac{\mu^2}{p}\left[\overline{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(F_j-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j}\right)}-\overline{\frac{\partial u_k \partial u_j}{\partial x_i \partial k_k}}-\overline{2e_{ik}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}}\right] \qquad (1)$$

где тензор $\overline{\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(F_j-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x_j}\right)}$ с чертой над ним имеет следующее значение:

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(F_j-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j}\right)}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(F_j-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(F_i-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)\right]-$$
$$-\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(F_k-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_k}\right)\delta_{ij}$$

Тзян [4], приводя окончательный результат Чепмена для $p^{[2]}$, не заметил его ошибку; кроме того, в работе Тзяна содержится еще одна ошибка: второй член в выражении (8) он записывает без черты сверху.

При переводе статьи Тзяна не только не исправлены указанные ошибки, но и добавлена новая: в уравнении (11) для τ_{ij} в члене при k_3 опущена черта сверху.

Авторы, пользовавшиеся уравнениями Чепмена [3], обычно заимствованными из работы [4], естественно, получали ошибочные результаты, которые не бросались в глаза лишь потому, что они решали общие задачи; получали, например, безразмерную форму этих уравнений [5], интегралы одноразмерного движения [6] и т. п.

лельного потока (двухмерный случай) и отсутствия внешних сил. Тогда получим два уравнения:

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} + \rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} \tag{1.1}$$

$$\rho \frac{\partial u_y}{\partial t} + \rho u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial P_{yy}}{\partial y}. \tag{1.2}$$

В этих уравнениях P_{xx}, P_{xy} и P_{yy} даются выражениями

$$\begin{aligned} P_{xx} = &-\frac{2}{3}\mu\left(2\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) + \frac{\mu^2}{p}\left[\frac{\vartheta_1}{3}\left(2\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x \partial u_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u_y \partial u_y}{\partial y \partial x}\right) - \right.\\ &- \frac{\vartheta_3}{3}\left(6\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - 3\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{14}{3}\frac{\partial u_x \partial u_x}{\partial x \partial x} - 2\frac{\partial u_x \partial u_y}{\partial x \partial y} + \right.\\ &\left. + 2\frac{\partial u_x \partial u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u_y \partial u_y}{\partial x \partial x} - \frac{\partial u_x \partial u_x}{\partial y \partial y} - \frac{7}{3}\frac{\partial u_y \partial u_y}{\partial x \partial x}\right) + \\ &+ \frac{\vartheta_6}{3}\left(\frac{7}{9}\frac{\partial u_x \partial u_x}{\partial x \partial x} - \frac{2}{9}\frac{\partial u_y \partial u_y}{\partial x \partial y} + \frac{1}{4}\frac{\partial u_x \partial u_x}{\partial y \partial y} + \frac{1}{4}\frac{\partial u_y \partial u_y}{\partial x \partial x} + \right.\\ &\left.\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial u_x \partial u_y}{\partial y \partial x}\right)\right] + \vartheta_3\frac{\mu^2}{3\rho T}\left(2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + \vartheta_4\frac{\mu^2}{3p\rho T}\left(2\frac{\partial p \partial T}{\partial x \partial x} - \right.\\ &\left. - \frac{\partial p \partial T}{\partial y \partial y}\right) + \vartheta_5\frac{\mu^2}{3\rho T^2}\left[2\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} P_{xy} = &-\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) + \frac{\mu^2}{p}\left[\frac{\vartheta_2}{2}\left(\frac{\partial u_x \partial u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u_x \partial u_y}{\partial x \partial x} + \frac{\partial u_x \partial u_y}{\partial y \partial y} + \right.\right.\\ &\left. + \frac{\partial u_y \partial u_y}{\partial x \partial y}\right) - \frac{\vartheta_2}{3}\left(\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + 4\frac{\partial u_x \partial u_x}{\partial x \partial y} + \right.\\ &\left. + 4\frac{\partial u_y \partial u_y}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial u_x \partial u_y}{\partial x \partial x} + 2\frac{\partial u_x \partial u_y}{\partial y \partial y}\right) + \frac{\vartheta_6}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial y} + \right.\\ &\left.\left. + \frac{\partial u_x \partial u_y}{\partial y \partial y} + \frac{\partial u_x \partial u_y}{\partial x \partial x} + \frac{\partial u_y \partial u_y}{\partial x \partial y}\right)\right] + \vartheta_3\frac{\mu^2}{\rho T}\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \\ &+ \vartheta_4\frac{\mu^2}{2p\rho T}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \vartheta_5\frac{\mu^2}{\rho T^2}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Выражение для P_{yy} легко получается из уравнения (1.3) заменой x на y и u_x на u_y. ϑ_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ являются постоянными величинами для определенных моделей молекулярного взаимодействия. Для максвелловских молекул

$$\vartheta_1 = \frac{4}{3}\left(\frac{7}{2} - \frac{T}{\mu}\frac{d\mu}{dT}\right), \qquad \vartheta_2 = 2, \qquad \vartheta_3 = 3 \tag{1.5}$$

$$\vartheta_4 = 0, \qquad \vartheta_5 = \frac{3T}{\mu}\frac{d\mu}{dT}, \qquad \vartheta_6 = 8$$

Для молекул в виде твердых эластичных сфер

$$\vartheta_1 = 1.014\,\frac{4}{3}\left(\frac{7}{2} - \frac{T}{\mu}\frac{d\mu}{dT}\right), \qquad \vartheta_2 = 1.014\cdot 2, \qquad \vartheta_3 = 0.806\cdot 3$$

$$\vartheta_4 = 0.681, \qquad \vartheta_5 = 0.806\,\frac{3T}{\mu}\frac{d\mu}{dT} - 0.990, \qquad \vartheta_6 = 0.982\cdot 8 \tag{1.6}$$

Уравнение энергии разреженного газа для случая двухмерного потока запишется

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_x\frac{\partial}{\partial x}+u_y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{u_x^2}{2}+\frac{u_y^2}{2}+C_pT\right)=\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{\partial q_x}{\partial x}-\frac{\partial q_y}{\partial y}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}(P_{xx}u_x+P_{xy}u_y)-\frac{\partial}{\partial y}(P_{xy}u_x+P_{yy}u_y) \tag{1.7}$$

где P_{xx}, P_{xy}, P_{yy} определены уравнениями (1.3) и (1.4), а q_x дается выражением

$$q_x=-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}+\theta_2\frac{\mu^2}{\rho T}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\frac{\partial T}{\partial x}+$$

$$+\theta_2\frac{\mu^2}{\rho T}\left\{\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left[T\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\right]+2\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right\}+$$

$$+\left(\vartheta_2\frac{\mu^2}{\rho p}\frac{\partial p}{\partial x}+\theta_4\frac{\mu^2}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}+\theta_5\frac{\mu^2}{\rho T}\frac{\partial T}{\partial x}\right)\left(\frac{2}{3}\frac{\partial u_x}{\partial x}-\frac{1}{3}\frac{\partial y_y}{\partial y}\right)+$$

$$+\left(\theta_3\frac{\mu^2}{\rho T}\frac{\partial p}{\partial y}+\theta_4\frac{\mu^2}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}+\theta_5\frac{\mu^2}{\rho T}\frac{\partial T}{\partial y}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \tag{1.8}$$

Выражение q_y получается из уравнения (1.8) простой заменой x на y и u_x на u_y, θ_i $(i=1,2,3,4,5)$ — постоянные величины, заданные соотношениями

$$\theta_1=\frac{15}{4}\left(\frac{7}{\mu}-\frac{T}{\mu}\frac{d\mu}{dT}\right),\qquad \theta_2=\frac{45}{8},\qquad \theta_3=-3 \tag{1.9}$$

$$\theta_4=3,\qquad \theta_5=\frac{3}{2}\left(5-\frac{T}{\mu}\frac{d\mu}{dT}\right)$$

Для максвелловских молекул $\mu\sim T$, для молекул в виде твердых эластичных сфер $\mu\sim\sqrt{T}$, для воздуха $\mu\sim T^{0.76}$.

Система уравнений (1.1) — (1.4), (1.7), (1.8) служит основой для получения уравнений пограничного слоя слабо разреженных газов. Воспользуемся методом Прандтля.

Будем считать, что толщина пограничного слоя δ мала в сравнении с размерами тела L и что силы вязкости и инерции в пограничном слое одного порядка. Тогда, производя оценку величины всех членов в уравнениях движения и энергии и пренебрегая членами, отношение которых к оставшимся членам порядка $(\delta/L)^2\ll 1$, получим

$$\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial P_{xx}}{\partial x}-\frac{\partial P_{xy}}{\partial y} \tag{1.10}$$

$$0=-\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial P_{yy}}{\partial y} \tag{1.11}$$

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_x\frac{\partial}{\partial x}+u_y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{u_x^2}{2}+C_pT\right)=\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{\partial q_x}{\partial x}-\frac{\partial q_y}{\partial y}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}(u_xP_{xx})-\frac{\partial}{\partial y}(u_xP_{xy}+u_yP_{yy}) \tag{1.12}$$

где

$$P_{xx}=\frac{\mu^2}{p}\left(\frac{\vartheta_6}{12}-\frac{2\vartheta_3}{3}\right)\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2-\frac{\vartheta_5}{3}\frac{\mu^2}{\rho T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 \tag{1.13}$$

$$P_{xy} = -\mu \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\mu^2}{p}\left[\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial y}\left(\frac{\vartheta_1}{2} + \frac{\vartheta_6}{2} - \frac{2\vartheta_2}{3}\right) + \right. \tag{1.14}$$

$$\left. + \frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{\partial u_y}{\partial y}\left(\frac{\vartheta_1}{2} + \frac{\vartheta_6}{2} - \frac{5\vartheta_6}{3}\right) - \frac{\vartheta_2}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right] +$$

$$+ \vartheta_3 \frac{\mu^2}{\rho T}\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + v_4 \frac{\mu^2}{2p\rho T}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y} + \vartheta_5 \frac{\mu^2}{\rho T^2}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y}$$

$$P_{yy} = \frac{\mu^2}{p}\left(\frac{\vartheta_6}{12} - \frac{2\vartheta_2}{3}\right)\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 + \frac{2\vartheta_3}{\rho T}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{2\vartheta_5}{3\rho T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 \tag{1.15}$$

$$q_x = \theta_4 \frac{\mu^2}{2\rho}\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \theta_5 \frac{\mu^2}{2\rho T}\frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y} \tag{1.16}$$

$$q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \theta_1 \frac{\mu^2}{\rho T}\frac{\partial T}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) + \theta_2 \frac{2\mu^2}{3\rho T}\left[\frac{\partial T}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + 4\frac{\partial u_y}{\partial y}\right) + \right.$$

$$\left. + T\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\right] + \theta_3 \frac{\mu^2}{2p\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial y} + \theta_4 \frac{\mu^2}{6\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + 4\frac{\partial u_y}{\partial y}\right) +$$

$$+ \theta_5 \frac{\mu^2}{\rho T}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{3}\frac{\partial T}{\partial y}\left(2\frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)\right] \tag{1.17}$$

Полученная система (1.10)—(1.17) является неполной; дополняем ее уравнением неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) = 0 \tag{1.18}$$

и уравнением состояния в форме закона Клапейрона

$$p = \rho R T \tag{1.19}$$

Система уравнений (1.10)—(1.19) пограничного слоя слабо разреженных газов отличается от обычных уравнений Прандтля некоторыми добавочными членами, кроме того, в этой задаче нормальный градиент давления не равен нулю. Происхождение этого можно пояснить следующим образом: в обычных уравнениях Прандтля порядок членов в уравнении, содержащем $\partial p / \partial y$, равен $\rho u_0^2 \delta / L^2$, а в уравнении, содержащем $\partial p / \partial x$, равен $\rho u_0^2 / L$; их отношение равно $\delta / L \ll 1$; но это значит, что градиент давления по нормали к поверхности обтекаемого тела мал по сравнению с продольным градиентом давления и можно с достаточной точностью написать $\partial p / \partial y = 0$. В случае разреженных газов порядок $\partial p / \partial y$ определяется добавочными членами Барнетта-Чепмена, которые, вообще говоря, могут иметь порядок, близкий к порядку главных членов в уравнении для $\partial p / \partial x$ (ниже произведена сравнительная оценка этих членов), поэтому уравнение для $\partial p / \partial y$ записывается в виде (1.11).

Следовательно, влияние разреженности приводит также и к тому, что давление внутри пограничного слоя меняется вдоль нормали к поверхности тела и, естественно, отличается от давления, которое имеется на внешней границе пограничного слоя.

Отметим, что независимо от нас аналогичный метод упрощения уравнений, сходных с уравнениями Барнетта-Чепмена, применил недавно Кшивоблоцкий [7]. Взятые им за основу уравнения получены в работе Ван-Чанга и Уленбека [8], с которой, к сожалению, мы не имели возможности ознакомиться. Кшивоблоцкий сохранял члены не только порядка единицы, но и порядка толщины пограничного слоя. Полученные им уравнения значительно сложнее системы (1.10)—(1.17). Позднее Кшивоблоцкий пытался решить свои уравнения [9], однако приведенные им общие соотношения нуждаются еще в дополнительном исследовании.

§ 2. Область применимости полученных уравнений. Произведем сравнение добавочно учтенных членов в уравнениях движения и энергии с главными членами, а также с членами, отбрасываемыми в уравнении Навье-Стокса при переходе к уравнениям пограничного слоя. Порядок отношения добавочного члена к главному будет

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mu^2}{p}\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial y} : \frac{\partial}{\partial y}\mu\frac{\partial u_x}{\partial y} \sim \frac{\mu u_0}{pL} \sim \frac{\rho v_{\text{тепл}} l u_0}{\rho v^2_{\text{тепл}} L} \sim M\frac{l}{L} \tag{2.1}$$

здесь $M \equiv u_0 / a$ (a — скорость звука, $a \sim v_{\text{тепл}}$).

Порядок отношения добавочного члена к отбрасываемому члену будет

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mu^2}{p}\left[\frac{\partial u_x}{\partial y}\right] : \frac{\partial}{\partial y}\mu\frac{\partial u_y}{\partial y} \sim \frac{\mu u_0 L}{p\delta^2} \sim \frac{lL}{\delta^2}M \sim M^2 \tag{2.2}$$

Здесь учитывалось, что внутри пограничного слоя силы вязкости и инерции имеют одинаковый порядок и, следовательно,

$$\rho u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} \sim \frac{\partial}{\partial y}\mu\frac{\partial u_x}{\partial y}, \qquad \frac{l^2}{\delta^2} \sim M\frac{l}{L} \tag{2.3}$$

Итак, отношение добавочных членов к главным порядка Ml/L, а к членам, отбрасываемым по теории пограничного слоя, M^2. Учитывая еще, что согласно (2.3)

$$Ml / L < 1 \tag{2.4}$$

так как $l/\delta < 1$ (в противном случае нет смысла говорить о пограничном слое), можно сказать, что полученные уравнения пограничного слоя слабо разреженных газов применимы лишь при $M > 1$, т. е. для сверхзвуковых потоков, и что дополнительно учтенные члены меньше основных прандтлевских.

Приведенные оценки добавочных членов позволяют выделить область пригодности найденных уравнений по высотам и числам M. Нижняя граница для M дается неравенством $M > 1$, а верхняя $M < 10$, ибо при $M \geqslant 10$ в пограничном слое возникает высокая температура, что приводит к диссоциации молекул газа, которая не учитывается в полученных уравнениях.

Оценку по высотам можно произвести следующим образом: порядок отношения добавочных членов к главным Ml/L; согласно (2.3) величина Ml/L должна быть по крайней мере на порядок меньше единицы, но вместе с тем, если это отношение меньше 1%, то нет смысла учитывать добавочные члены. Такие соображения приводят к неравенствам

$$0.01 < M\frac{l}{L} < 0.1 \tag{2.5}$$

Если воспользоваться зависимостью длины свободного пробега молекул l от высоты H, заимствованной из работ (10) и (11), то при заданных M и L получим следующую область высот:

при $L = 100$ *см*

$M =$	1	2	3	4	5	7	10
H *км* $=$	87—100,	78—94	70—92,	66—91,	65—90,	64—89,	63—83

при $L = 1000$ *см*

$M =$	1	2	3	4	5	7	10
H *км* —	100—114,	94—112,	92—108,	91=105,	90—103,	89—101,	83—100

Отсюда видно, что при больших числах M добавочные члены начинают сказываться на меньших высотах.

Конечно, границы области применимости, полученные на основе приведенных выше соображений, очень условны, и критерием их справедливости может быть лишь опыт.

§ 3. Граничные условия в слабо разреженном газе. Обычные граничные условия прилипания в разреженном газе не имеют места; многочисленные теоретические и экспериментальные работы указывают на наличие в этом случае скольжения газа по поверхности тела. Найдем граничные условия с учетом этого скольжения.

Воспользуемся кинетическим методом Максвелла, согласно которому сложная картина взаимодействия молекул газа с поверхностью заменяется упрощенной моделью, использующей в своей основе два предположения.

Первое предположение состоит в том, что молекулы газа, обладающие, кроме поступательной скорости в направлении потока, еще и хаотической тепловой скоростью, могут ударяться о поверхность тела. Причем часть α всех падающих молекул адсорбируется поверхностью и в результате нескольких соударений с молекулами тела приобретает скорость, соответствующую скоростям в покоящемся газе при температуре тела, а затем с такими скоростями испаряется в произвольном направлении относительно поверхности, а часть $1-\alpha$ отражается от поверхности зеркально, т. е. с сохранением тангенциальной составляющей скорости и изменением знака нормальной составляющей.

Второе предположение состоит в том, что функция распределения скоростей молекул вблизи стенки принимается такой же, как и вдали от нее. Несовершенство этого предположения понимал и сам Максвелл, указывавший, что вблизи стенки должны существовать какие-то разрывные условия для функции распределения.

Эти предположения приводят к следующим граничным условиям.

Для скорости

$$(1-\alpha)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dv_x \int\limits_{-\infty}^{\infty} dv_z \int\limits_{-\infty}^{0} v_x v_y f dv_y + \int\limits_{-\infty}^{\infty} dv_x \int\limits_{-\infty}^{\infty} dv_z \int\limits_{0}^{\infty} v_x v_y f dv_y =$$

$$= -u\left[(1-\alpha)\int\limits_{-\infty}^{\infty} dv_x \int\limits_{-\infty}^{\infty} dv_z \int\limits_{-\infty}^{0} v_y f dv_y + \int\limits_{-\infty}^{\infty} dv_x \int\limits_{-\infty}^{\infty} dv_z \int\limits_{0}^{\infty} v_y f dv_y\right] \quad (3.1)$$

где u — скорость поверхности относительно газа, находящегося в контакте с ней, f — функция распределения, v_x, v_y, v_z — составляющие тепловой хаотической скорости молекул.

Для температуры

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dv_x \int\limits_{-\infty}^{\infty} dv_z \int\limits_{0}^{\infty} v_y f v^2 dv_y + (1-\alpha)\int\limits_{-\infty}^{\infty} dv_x \int\limits_{-\infty}^{\infty} dv_z \int\limits_{-\infty}^{0} v_y f v^2 dv_y =$$

$$= \frac{6kT_w}{m}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} dv_x \int\limits_{-\infty}^{\infty} dv_z \int\limits_{0}^{\infty} v_y f dv_y + (1-\alpha)\int\limits_{-\infty}^{\infty} dv_x \int\limits_{-\infty}^{\infty} dv_z \int\limits_{-\infty}^{0} v_y f dv_y\right\} \quad (3.2)$$

где T_w — температура поверхности, k — постоянная Больцмана, m — масса молекул газа.

Единственной неизвестной величиной, входящей в уравнения (3.1) и (3.2), является функция распределения f. Задавая ее в том или ином приближении, получим явный вид выражения скорости и температуры через гидродинамические характеристики потока.

Подстановка функции распределения равновесного состояния дает обычные граничные условия

$$u = 0, \qquad T = T_w \qquad \text{при } y = 0 \tag{3.3}$$

Если в качестве функции распределения подставить в уравнения (3.1) и (3.2) функцию, характеризующую слабое отклонение от равновесного состояния, то граничные условия для скорости и температуры после некоторых преобразований запишутся

$$u_x = \frac{2-\alpha}{\alpha}\,\frac{\mu}{2}\left(\frac{2\pi}{p\rho}\right)^{1/2}\frac{\partial u_x}{\partial y} \qquad \text{при } y = 0 \tag{3.4}$$

$$T - T_w = \frac{2-\alpha}{\alpha}\,\frac{\mu}{2}\left(\frac{2\pi}{p\rho}\right)^{1/2}\frac{15}{8}\,\frac{\partial T}{\partial y} \qquad \text{при } y = 0 \tag{3.5}$$

Отметим попутно, что множитель $\mu/\sqrt{p\rho}$ пропорционален длине свободного пробега молекул газа.

Результаты экспериментальных работ подтверждают справедливость (3.4) и (3.5) при движении в разреженных газах с дозвуковыми скоростями.

Чтобы получить граничные условия для движения в разреженном газе при $M > 1$, воспользуемся тем, что вывод соответствующих уравнений движения и энергии разреженного газа связан с привлечением функции распределения в третьем приближении; развивая указанный выше метод Максвелла, подставим в уравнения (3.1) и (3.2) f_3.

Ввиду того, что функция f_3 ни в одной работе не приводится в явном виде, позволим себе выписать ее здесь полностью:

$$\begin{aligned} f = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\frac{-mv^2}{2kT}\Big\{1 - \frac{3\mu}{2pT}\left(\frac{mv^2}{2kT} - \frac{5}{2}\right)\left(v_x\frac{\partial T}{\partial x} + v_y\frac{\partial T}{\partial y} + v_z\frac{\partial T}{\partial z}\right) - \\ - \frac{\mu m}{2pkT}\Big\{v_xv_y\left[2\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) - Q_{12}\right] + v_xv_z\left[2\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) - Q_{13}\right] + \\ + v_yv_z\left[2\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) - Q_{23}\right] + v_x^2\left[\frac{2}{3}\left(2\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) - Q_{11}\right] + \\ + v_y^2\left[\frac{2}{3}\left(2\frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) - Q_{22}\right] + \\ + v_z^2\left[\frac{2}{3}\left(2\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) - Q_{33}\right]\Big\}\Big\} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Здесь n — число молекул в единице объема, Q_{ik} являются функциями вторых производных температуры и средней (макроскопической или гидродинамической) скорости и произведений их первых производных вида

$$\begin{aligned} Q_{12} = k_1 2\frac{d}{dt}\,\frac{\mu}{p}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) - k_1\frac{2\mu}{p}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\,\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\,\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\,\frac{\partial u_z}{\partial y} - \right. \\ \left. - \frac{\partial u_x}{\partial x}\,\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\,\frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{\partial u_x}{\partial z}\,\frac{\partial u_y}{\partial z}\right) + k_2\frac{3\mu}{\rho pT}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\,\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial y}\,\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \end{aligned}$$

$$+ k_3 \frac{3}{\rho T}\left(\frac{\partial}{\partial y}\mu\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\mu\frac{\partial T}{\partial y}\right) - k_4\frac{6\mu}{\rho T^2}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y} + k_5\frac{2\mu}{3p}\Big[3\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) - 2\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\left(2\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\Big] \tag{3.7}$$

Q_{13} и Q_{23} получаются из Q_{12} заменой x на z и т. п.

$$Q_{11} = k_1\frac{2}{3}\frac{d}{dt}\frac{\mu}{p}\left(2\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) - k_1\frac{\mu}{p}\left[\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)^2\right] + k_2\frac{\mu}{p\rho T}\left(2\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial z}\right) +$$
$$+ k_3\frac{1}{\rho T}\left(2\frac{\partial}{\partial x}\mu\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\mu\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\mu\frac{\partial T}{\partial z}\right) - k_4\frac{\mu}{\rho T^2}\left[2\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2\right] + k_5\frac{\mu}{9p}\left[2\left(2\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2 + 3\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + 3\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2 - 6\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right)^2 - 6\left(\frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2\right] \tag{3.8}$$

Q_{22} и Q_{33} легко получаются из (3.8) заменой x на y и т. п.

Здесь k_i — постоянные величины, различные для разных моделей молекулярного взаимодействия; для максвелловских молекул

$$k_1 = k_3 = k_5 = 1, \qquad k_2 = k_4 = 0 \tag{3.9}$$

для молекул в виде твердых эластичных сфер

$$K_1 = 1.014,\ K_2 = 0.227,\ K_3 = 0.806,\ K_4 = 0.330,\ K_5 = 0.842 \tag{3.10}$$

После вычисления ряда интегралов и соответствующих преобразований находим

$$u_x = \frac{2-\alpha}{\alpha}\frac{\mu}{2}\left(\frac{2\pi}{p\rho}\right)^{1/2}\frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{1}{A} \qquad \text{при } y = 0 \tag{3.11}$$

$$T\frac{3A-1}{2A} = T_w + \frac{2-\alpha}{\alpha}\frac{\mu}{2}\left(\frac{2\pi}{p\rho}\right)^{1/2}\frac{15}{8}\frac{\partial T}{\partial y}\frac{1}{A} \qquad \text{при } y = 0 \tag{3.12}$$

Здесь

$$A = 1 + \left(\frac{1}{3}k_5 - k_1\right)\frac{\mu^2}{p^2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 + k_3\frac{\mu}{p\rho T}\frac{\partial}{\partial y}\mu\frac{\partial T}{\partial y} - k_4\frac{\mu^2}{p\rho T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 \tag{3.13}$$

Видно, что соотношения (3.12) и (3.13) при $A = 1$ переходят соответственно в уравнения (3.4) и (3.5).

Представляет известный интерес выяснить, насколько же A отличается от единицы. Для этого воспользуемся выражением для нормального градиента давления (1.11) и напишем его для случая максвелловских молекул; тогда согласно (1.11), (1.15) и (1.5)

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}2\mu^2\left\{\frac{1}{3p}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{\rho T}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2\right\} \tag{3.14}$$

Интегрируя (3.14) и используя уравнение состояния $p = \rho RT$, получим

$$p - p_0 = \frac{2\mu^2}{p}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 - R\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{R}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2\right] \tag{3.15}$$

Теперь напишем выражение для A в случае максвелловских молекул; подставим в (3.13) (3.9) и используем уравнение состояния, тогда

$$A = 1 - \frac{\mu^2}{p^2}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 - R\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{R}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2\right] \tag{3.16}$$

Сравнивая (3.15) и (3.16), находим

$$A = 0.5\,(1 + p_0/p) \tag{3.17}$$

т. е. $A = 1$ при $p = p_0$ и $A = 0.5$ при $p \gg p_0$, следовательно, в случае справедливости уравнения (1.11) значение A близко к единице и меняется в сравнительно узких пределах. Можно ожидать, что A будет мало отличаться от единицы и для реальных газов, ибо модель максвелловских молекул удовлетворительно описывает их поведение.

Решение уравнений движения и энергии при граничных условиях (3.11) и (3.12) является очень сложным делом, тем более, что наперед надо знать распределение скорости и температуры вблизи поверхности тела. Можно указать следующий метод последовательных приближений: решаем уравнения (1.10)—(1.17) при граничных условиях (3.4), (3.5), получаем профили скорости и температуры; используя их, находим A; вновь решаем уравнения (1.10)—(1.17), но при граничных условиях (3.11), (3.12). Находим более точные значения скорости и температуры, подставляем их в A и т. д. Однако практически это очень трудоемкая работа, которая вряд ли целесообразна; гораздо разумнее пользоваться более простыми граничными условиями, учитывая, что $A = 1$.

В заключение считаю своим приятным долгом поблагодарить А. И. Губанова за постановку данной задачи и ценные замечания, высказанные при ее решении.

Поступила 1 X 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Maxwell I. C. On Stresses in Rarefied Gases arising from Ineqalities of Temperature. The Scientific Papers, vol. 11, 681, 1890.
2. Smoluchowski P. Weitere Studien über den Temperatursprung in Qasen. Wiener Berichte, Bd. 108, Abt. 11a, 1899.
3. Chapman S. and Cowling T. G. The Mathematikal Theory of non-uniform Gases. Cambridge, 1939.
4. Tsien H. The superaerodynamics. J. of the Aeronautical Sciences (Перевод: Газовая динамика, Сборник статей, ИЛ, М., 1950, стр. 310).
5. Попов С. Г. Подобие в аэромеханике разреженных газов. Вестник Московского университета, № 8, стр. 13, 1949.
6. Попов С. Г. Об интеграле одноразмерного движения по 3-му приближению. Вестник Московского университета, № 2, стр. 7, 1950.
7. Krzywoblocki M. Z. On the two-dimensional laminar boundary layer equations for hypersonic flow in continium and in rarefied gases. J. Aeronaut. Soc. India, vol. 5, No 1, p. 1—13, 1953.
8. Wang-Chang C. S., Uhlenbeck G. E. On Transport Phenomena in Rarefield Gases. Dept. Eng. Res., Univ. Michigan, App. Phys. Labor., Rep. NO APL/JHU CM-443, UMN-3, February, 1948.
9. Krzywoblocki M. Z. The possible partikular solutions of the laminar boundary lauer on flat plate for hypersonic flow in continuum and in rarefied gases. J. Aeronaut. Soc. India, vol. 5, No 2, p. 23—35, 1953.
10. Goody R. M. The Physics of Stratosphere. Cambridge, 1954.
11. В. М. Давление, плотность и температура земной атмосферы, на высотах до 160 *км*. Успехи физич. наук, т. 48, вып. 4, стр. 609, 1952.