а первое слагаемое по модулю будет возрастать. Чтобы давление в канале только убывало, необходимо потребовать выполнения неравенства

$$\beta\left(1+\frac{p_0-p_c}{\rho U^2}\right)-\lambda_1\frac{Uh^2}{\nu}<0 \tag{18}$$

Если положить в (17) $x=l$, $p-p_c=0$, то получим уточненную формулу для длины участка просачивания.

Поступила 19 III 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Wuest W. Asymptotische Absaugegrenzschichten an längsangeströmten zylindrischen Körpern. Ing. Arch., 23, № 3, 1955.
2. Лейбензон Л. С. О движении нефтей и газов по каналам с проницаемыми стенками. Собр. трудов, т. II, 1953, стр. 107.
3. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. ГИТТЛ, 1951.

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ ОДНОГО ЧАСТНОГО ВИДА

В. Я. Натанзон

Пусть задано уравнение

$$(A-\lambda E)X=0 \tag{1}$$

в котором элементы квадратной матрицы $A=(a_{ik})_1^n$ удовлетворяют условию:

$$a_{ik}=0 \quad \text{при} \quad i-k>1 \tag{2}$$

Требуется найти собственные значения и векторы матрицы A. Обозначим через

$$C=A-\lambda E=(c_{1k})_1^n$$

и выведем формулы, удобные для вычисления определителя:

$$C=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12}\ldots c_{1s-1}\ldots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}\ldots c_{2s-1}\ldots c_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ 0 & 0\ \ldots c_{ss-1}\ldots c_{sn} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ 0 & 0\ \ldots 0\ \ldots c_{n-1n} \\ 0 & 0\ \ldots\ 0\ \ldots c_{nn} \end{vmatrix} \tag{3}$$

Рассмотрим минор s-го порядка:

$$D\begin{pmatrix}1, 2, \ldots, s-1, s \\ 1, 2, \ldots, s-1, r\end{pmatrix} \qquad (s\leqslant r\leqslant n) \tag{4}$$

В скобках в верхней строке указаны номера строк, в нижней строке — номера столбцов данного минора.

Каждый такой минор в последней строке s содержит два элемента, не равные нулю в силу (2). Разлагая (4) по элементам последней строки, получим формулу

$$D\begin{pmatrix}1, 2, \ldots, s-1, s \\ 1, 2, \ldots, s-1, r\end{pmatrix}=c_{sr}D\begin{pmatrix}1, 2, \ldots, s-1 \\ 1, 2, \ldots, s-1\end{pmatrix}-c_{ss-1}D\begin{pmatrix}1, 2, \ldots, s-2, s-1 \\ 1, 2, \ldots, s-2, r\end{pmatrix} \tag{5}$$

В правой части этой формулы стоят миноры s первого порядка такого же типа, как (4). Введем сокращенное обозначение для главных миноров:

$$D\begin{pmatrix}1, 2, \ldots, s \\ 1, 2, \ldots, s\end{pmatrix}=D_s \tag{6}$$

Положим в формуле (5) $s=r=k$, $s=k-1$, $r=k, \dots$ $s=1$. В результате получим последовательность формул:

$$D_k = c_{kk}D_{k-1} - c_{k,k-1}D\begin{pmatrix}1, 2, \dots, k-2, k-1\\ 1, 2, \dots, k-2, k\end{pmatrix}$$

$$D\begin{pmatrix}1, 2, \dots, k-2, k-1\\ 1, 2, \dots, k-2, k\end{pmatrix} = c_{k-1,k}D_{k-2} - c_{k-1,k-2}D\begin{pmatrix}1, 2, \dots, k-3, k-2\\ 1, 2, \dots, k-3, k\end{pmatrix}$$

$$D\begin{pmatrix}1, 2, \dots, k-3, k-2\\ 1, 2, \dots, k-3, k\end{pmatrix} = c_{k-2,k}D_{k-3} - c_{k-2,k-3}D\begin{pmatrix}1, 2, \dots, k-4, k-3\\ 1, 2, \dots, k-4, k\end{pmatrix} \qquad (7)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$D\begin{pmatrix}1, 2\\ 1, k\end{pmatrix} = c_{2k}c_{11} - c_{21}D\begin{pmatrix}1\\ k\end{pmatrix}, \qquad D\begin{pmatrix}1\\ k\end{pmatrix} = c_{1k}D_0, \qquad D_0 = 1$$

Этот ряд формул позволяет, исключая последовательно неглавные миноры, получить такую формулу для главного минора k-го порядка:

$$D_k = c_{kk}D_{k-1} - c_{k,k-1}c_{k-1,k}D_{k-2} + c_{k,k-1}c_{k-1,k-2}c_{k-2,k}D_{k-3} -$$
$$- c_{k,k-1}c_{k-1,k-2}c_{k-2,k-3}c_{k-3k,k}D_{k-4} + \dots \pm c_{k,k-1}c_{k-1,k-2}\dots c_{21}c_{1k}D_0 \qquad (8)$$
$$(k=1, 2, \dots, n)$$

Для упрощения введем обозначение $b_{s,s-r} = c_{s,s-1}c_{s-1,s-2}\dots c_{s-r+1,s-r}$ тогда формула (8) запишется сокращенно так:

$$D_k = c_{kk}D_{k-1} - b_{k,k-1}c_{k-1,k}D_{k-2} + b_{k,k-2}c_{k-2,k}D_{k-3} - \dots \pm b_{k1}c_{1k}D_0$$

Эта формула представляет собой обобщение формулы

$$D_k = c_{kk}D_{k-1} - c_{k,k-1}c_{k-1,k}D_{k-2}$$

для главных миноров матрицы C, удовлетворяющей условию (см. [1], стр. 82).

$$c_{ik} = 0 \qquad |i-k| > 1$$

Формула (8) позволяет вычислить определитель D_n и, следовательно, путем подбора собственные значения[1] матрицы A.

Выпишем вторую серию формул, аналогичных (8), для главных миноров:

$$D\begin{pmatrix}p, p+1, \dots n\\ p, p+1, \dots n\end{pmatrix} = K_{n-p+1}$$

Эти формулы имеют вид:

$$K_{n-k+1} = c_{kk}K_{n-k} - c_{k+1,k}c_{k,k+1}K_{n-k-1} + c_{k+1,k}c_{k+2,k+1}c_{k,k+2}K_{n-k-2} - \dots$$
$$\pm c_{k+1,k}c_{k+2,k+1}\dots c_{n,n-1}c_{kn}K_0 \qquad (k=1, \dots, n) \qquad (9)$$

Формулы (8) переходят в формулы (9), если матрицу определителя C транспонировать относительно второй диагонали. Формулы (9), как и формулы (8), позволяют вычислить определитель $C=K_n$.

Когда известно какое-нибудь некратное собственное значение λ, то по формулам (8) и (11) можно получить все миноры D_k и K_k $(k=1, 2, \dots, n-1)$. Это позволяет определить компоненты собственных векторов уравнения (1) и сопряженного ему уравнения. Действительно, компонента x_k собственного вектора X уравнения (1) может быть определена из равенства

$$K_{n-k} = (-1)^k c_{n,n-1}c_{n-1,n-2}\dots c_{k+1,k}x_k \qquad (10)$$

Чтобы проверить это, запишем k-е скалярное уравнение системы $CX=0$:

$$c_{k,k-1}x_{k-1} + c_{k,k}x_k + c_{k,k+1}x_{k+1} + \dots + c_{kn}x_n = 0 \qquad (11)$$

затем подставим выражения K, взятые по формуле (10), в формулу (9) и сократим на $c_{n,n-1}c_{n-1,n-2}\dots c_{k+1,k}$. Получим (11).

[1] Для определения собственных значений автор, очевидно, предполагает по точкам построить кривую $D_n(\lambda)$ и найти ее точки пересечения с осью абсцисс. (*Ред.*)

Аналогично компонента x_k° собственного вектора $\mathbf{X}^\circ$ сопряженного уравнения определяется из формул

$$D_k = (-1)^k c_{21} c_{32} \ldots c_{k+1,\,k} x_{k+1}^\circ \qquad (12)$$

Чтобы воспользоваться описанным способом определения собственных значений и векторов для произвольной несимметричной матрицы A, нужно привести ее к виду, удовлетворяющему условиям (2), что всегда можно сделать путем ряда элементарных преобразований.

Рассмотрим пример

$$c = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 3 & 5 \\ 7 & 6-\lambda & 5 \\ 0 & 2 & 8-\lambda \end{vmatrix}$$

Для миноров D имеем

$$D_0 = 1, \quad D_1 = c_{11} D_0, \quad D_2 = c_{22} D_1 - c_{21} c_{12} D_0, \quad D_3 = c_{33} D_2 - c_{32} c_{23} D_1 + c_{32} c_{21} c_{13} D^0$$

Подбором находим собственное значение $\lambda = 2$ и отсюда

$$D_0 = 1, \qquad D_1 = 4, \qquad D_2 = -5, \qquad D_3 = 0$$

Далее для компонентов вектора $\hat{X}$ имеем

$$x_1^\circ = -1, \qquad x_2^\circ = -\frac{D_1}{c_{21}} = -\frac{4}{7}, \qquad x_3^\circ = \frac{D_2}{c_{21} c_{32}} = -\frac{5}{14}$$

Формулы для миноров K имеют вид:

$$K_0 = 1, \qquad K_1 = c_{33} K_0, \qquad K_2 = c_{22} K_1 - c_{32} c_{23} K_0$$

$$K_3 = c_{11} K_2 - c_{21} c_{12} K_1 + c_{21} c_{32} c_{13} K_0$$

Отсюда $K_0 = 1$, $K_1 = 6$, $K_2 = 14$, $K_3 = 0$. Для вектора $\mathbf{X}$ имеем

$$x_1 = -\frac{K_2}{c_{32} c_{21}} = -1, \qquad x_2 = \frac{K_1}{c_{32}} = 3, \qquad x_3 = -1$$

Поступила 24 I 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра. ГИТТЛ, М.—Л., 1950.

ЗАМЕЧАНИЯ К СТАТЬЕ Л. Н. СРЕТЕНСКОГО

«О НАПРАВЛЕННОМ ИЗЛУЧЕНИИ ВОЛН ИЗ ОБЛАСТИ, ПОДВЕРЖЕННОЙ ВНЕШНЕМУ ДАВЛЕНИЮ», ПММ, т. XX, вып. 3, 1956

В вычислениях, приведенных в моей статье, я обнаружил несколько ошибок, которые следует исправить.

Прежде всего перед знаками квадратур в формулах стр. 354, определяющих s_2'' и s_2''', должны стоять не множители $2\pi g$ и $-2\pi g$, а $2\pi g / \omega^2$ и $-2\pi g / \omega^2$ соответственно.

Таким образом, верное значение, например, s_2'' будет

$$s_2'' = \frac{2\pi g}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \sin ma \frac{\cos mx}{\omega^2 - gm} \cos\left(y \sqrt{\frac{\omega^4}{g^2} - m^2}\right) \exp\left(-ib \sqrt{\frac{\omega^4}{g^2} - m^2}\right) dm$$