О РАЗВИТИИ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПОРИСТЫМИ СТЕНКАМИ

Н. А. Слезкин

(Москва)

Известно, что с задачами о пограничном слое связаны и задачи о развитии течения в трубах. За последние годы опубликован ряд работ (например [1]), в которых вопрос о пограничном слое рассматривается с учетом вдувания дополнительного воздуха через поры стенки. Представляется возможным и некоторые задачи о развитии течения жидкости рассмотреть также с учетом пористости стенок. Такого рода задачи могут представлять и самостоятельный интерес для изучения течения воздуха в тканевых шлангах, течений ручейков в грунтах и пр. Задачи о течениях жидкости в пористых трубах впервые решались гидравлическими методами в работе Л. С. Лейбензона [2]. Задачи о развитии течения жидкости в трубах и диффузорах подробно изучены С. М. Таргом [3] на основе приближенных уравнений, учитывающих слагаемые от ускорения и от вязкости лишь частично. На основе тех же уравнений такого рода задачи о развитии можно решать и для случая пористых стенок.

Рассмотрим самую простую задачу о развитии течения между параллельными пористыми стенками методом операционного исчисления. Если предполагать вязкую жидкость несжимаемой, а ее движение установившимся и плоско-параллельным, то приближенные уравнения с частичным учетом слагаемых от ускорения и вязкости будут представляться в виде

$$U\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\qquad \frac{\partial p}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{1}$$

где U — средняя скорость по сечению. Пусть расстояние между стенками будет $2h$, тогда граничные условия для задачи о развитии течения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} &u=U, && p=p_0 && \text{при } x=0,\ |y|<h \\ &\frac{\partial u}{\partial y}=0, && v=0 && \text{при } x>0,\ y=0 \end{aligned} \tag{2}$$

$$u=0,\qquad v=\alpha(p-p_c)\qquad \text{при } x>0,\ y=h \tag{3}$$

где α — коэффициент проницаемости стенок и p_c — постоянное давление в среде, окружающей стенки, и при этом $p_c<p_0$. В начальном сечении скорость распределена равномерно.

Если воспользоваться функциональным преобразованием Лапласа, т. е. положить

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}u\,dx=\frac{u^*}{\lambda},\qquad \int_0^\infty e^{-\lambda x}v\,dx=\frac{v^*}{\lambda},\qquad \int_0^\infty e^{-\lambda x}(p-p_c)\,dx=\frac{p^*}{\lambda}$$

то из (1), (2) и (3) получим

$$\frac{d^2u^*}{dy^2}-\frac{\lambda U}{\nu}u^*=\frac{\lambda}{\mu}(p^*-p_0+p_c-\rho U^2),\qquad \frac{dv^*}{dy}=\lambda(U-u^*) \tag{4}$$

$$\frac{du^*}{dy}=0,\quad v^*=0\quad \text{при } y=0;\quad u^*=0,\quad v^*=\alpha p^*\quad \text{при } y=h \tag{5}$$

Решения уравнений (4) при граничных условиях (5) будут представляться в виде

$$u^*=\frac{U-(\alpha/\lambda h)(p_0-p_c+\rho U^2)}{1-(\alpha\rho U/\lambda h)-(thkh)/kh}\left(1-\frac{\operatorname{ch}ky}{\operatorname{ch}kh}\right) \tag{6}$$

$$p^*-p_\nu+p_c=\frac{(\alpha\rho U/\lambda h)(p_0-p_c)-\rho U^2(\operatorname{th}kh/kh)}{1-\alpha\rho U/\lambda h-(\operatorname{th}kh/kh)},\qquad k^2=\frac{\lambda U}{\nu} \tag{7}$$

Полагая в (6) и (7) коэффициент α нулю, получим известные решения задачи о развитии течения между непроницаемыми стенками:

$$(u^*)_{\alpha=0}=\frac{U(1-\operatorname{ch} ky/\operatorname{ch} kh)}{1-(\operatorname{th} kh)/kh}, \quad (p^*-p_0+p_c)_{\alpha=0}=-\rho U^2\frac{\operatorname{th} kh}{kh-\operatorname{th} kh} \tag{8}$$

Чтобы получить значения оригиналов на бесконечном удалении от входа, необходимо в (8) подставить

$$\operatorname{th}\gamma\approx\gamma-\frac{1}{3}\gamma^3+\frac{2}{15}\gamma^5 \tag{9}$$

Тогда получим

$$(u)_{\substack{\alpha=0\\ x\to\infty}}\to\frac{3}{2}U\left(1-\frac{y^2}{h^2}\right), \quad (p-p_0)_{\substack{\alpha=0\\ x\to\infty}}\to-\rho U^2\left(\frac{3\nu}{Uh^2}x+\frac{1}{5}\right) \tag{10}$$

Если подставить два члена разложения (10) в (6) и (7), то получим следующие приближенные выражения изображений:

$$\frac{u^*}{\lambda}=\frac{3}{2}U\left(1-\frac{y^2}{h^2}\right)\frac{\lambda Uh-\alpha(p_0-p_c+\rho U^2)}{Uh(\lambda^2-3\alpha\mu/h^3)}\quad \frac{p^*}{\lambda}=$$
$$=\frac{(p_0-p_c+\rho U^2)\lambda-3U\mu/h^3}{\lambda^2-3\mu\alpha/h^3} \tag{11}$$

Отсюда для оригиналов на достаточно большом удалении от входа получим

$$u=\frac{3}{2}U\left(1-\frac{y^2}{h^2}\right)\left[\operatorname{ch}\lambda_1 x-\frac{\alpha}{\lambda_1 Uh}(p_0-p_c+\rho U^2)\operatorname{sh}\lambda_1 x\right]\quad \left(\lambda_1{}^2=\frac{3\mu\alpha}{h^3}\right)$$
$$p-p_c=(p_0-p_c+\rho U^2)\operatorname{ch}\lambda_1 x-\frac{3U\mu}{\lambda_1 h^2}\operatorname{sh}\lambda_1 x \tag{12}$$

Если в (12) коэффициент α положить нулю, то получим первые слагаемые равенств (10). Обозначим через l длину участка просачивания, на котором давление p больше p_c. Для этой длины l из (12) получим следующее приближенное значение:

$$\operatorname{th}\lambda_1 l=\frac{\lambda_1 h^2(p_0-p_c+\rho U^2)}{3\mu U} \tag{13}$$

Обозначая через λ_1 значение, соответствующее двум действительным корням знаменателя (6) и (7), а через γ_m действительные корни уравнения

$$\operatorname{tg}\gamma=\gamma+\frac{\beta}{\gamma} \tag{14}$$

и полагая

$$\beta=\frac{\alpha\rho hU^2}{\nu}, \qquad \frac{Uh}{\nu}=R \tag{15}$$

обычным методом получим из (6) и (7) следующие выражения для оригиналов:

$$u=2Ue^{\lambda_1 x}\frac{\beta[1+(p_0-p_c)/\rho U^2]-\lambda_1 Uh^2/\nu}{(\lambda_1 Uh^2/\nu)^2-2\beta\lambda_1 Uh^2/\nu+\beta^2+\beta}\left(\frac{\operatorname{ch} y\sqrt{\lambda_1 U/\nu}}{\operatorname{ch} h\sqrt{\lambda_1 U/\nu}}-1\right)+$$
$$+2U\sum_{m=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{x}{Rh}\gamma_m{}^2\right)\frac{\gamma_m{}^2+\beta[1+(p_0-p_c)/\rho U^2]}{\gamma_m{}^4+2\beta\gamma_m{}^2+\beta+\beta^2}\left(\frac{\cos\gamma_m y/h}{\cos\gamma_m}-1\right) \tag{16}$$

$$p-p_c=2\rho U^2 e^{\lambda_1 x}\frac{\beta[1+(p_0-p_c)/\rho U^2]-\lambda_1 Uh^2/\nu}{(\lambda_1 Uh^2/\nu)^2-2\beta\lambda_1 Uh^2/\nu+\beta^2+\beta}+$$
$$+2\rho U^2\sum_{m=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{x}{Rh}\gamma_m{}^2\right)\frac{\gamma_m{}^2+\beta[1+(p_0-p_c)/\rho U^2]}{\gamma_m{}^4+2\beta\gamma_m{}^2+\beta+\beta^2} \tag{17}$$

При дифференцировании (18) по x мы получим выражение, в котором второе слагаемое будет отрицательным и по модулю оно будет убывать с возрастанием x, а первое слагаемое по модулю будет возрастать. Чтобы давление в канале только убывало, необходимо потребовать выполнения неравенства

$$\beta\left(1+\frac{p_0-p_c}{\rho U^2}\right)-\lambda_1\frac{Uh^2}{\nu}<0 \tag{18}$$

Если положить в (17) $x=l$, $p-p_c=0$, то получим уточненную формулу для длины участка просачивания.

Поступила 19 III 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Wuest W. Asymptotische Absaugegrenzschichten an längsangeströmten zylindrischen Körpern. Ing. Arch., 23, № 3, 1955.
2. Лейбензон Л. С. О движении нефтей и газов по каналам с проницаемыми стенками. Собр. трудов, т. II, 1953, стр. 107.
3. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. ГИТТЛ, 1951.

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ ОДНОГО ЧАСТНОГО ВИДА

$\boxed{\text{В. Я. Натанзон}}$

Пусть задано уравнение

$$(A-\lambda E)X=0 \tag{1}$$

в котором элементы квадратной матрицы $A=(a_{ik})_1^n$ удовлетворяют условию:

$$a_{ik}=0 \quad \text{при} \quad i-k>1 \tag{2}$$

Требуется найти собственные значения и векторы матрицы A. Обозначим через

$$C=A-\lambda E=(c_{1k})_1^n$$

и выведем формулы, удобные для вычисления определителя:

$$C=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12}\ldots c_{1s-1}\ldots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}\ldots c_{2s-1}\ldots c_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 & 0\ \ldots c_{ss-1}\ldots c_{sn} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 & 0\ \ldots\ 0\ \ldots c_{n-1n} \\ 0 & 0\ \ldots\ 0\ \ldots c_{nn} \end{vmatrix} \tag{3}$$

Рассмотрим минор s-го порядка:

$$D\begin{pmatrix}1, 2, \ldots, s-1, s \\ 1, 2, \ldots, s-1, r\end{pmatrix} \qquad (s\leqslant r\leqslant n) \tag{4}$$

В скобках в верхней строке указаны номера строк, в нижней строке — номера столбцов данного минора.

Каждый такой минор в последней строке s содержит два элемента, не равные нулю в силу (2). Разлагая (4) по элементам последней строки, получим формулу

$$D\begin{pmatrix}1, 2, \ldots, s-1, s \\ 1, 2, \ldots, s-1, r\end{pmatrix}=c_{sr}D\begin{pmatrix}1, 2, \ldots, s-1 \\ 1, 2, \ldots, s-1\end{pmatrix}-c_{ss-1}D\begin{pmatrix}1, 2, \ldots, s-2, s-1 \\ 1, 2, \ldots, s-2, r\end{pmatrix} \tag{5}$$

В правой части этой формулы стоят миноры s первого порядка такого же типа, как (4). Введем сокращенное обозначение для главных миноров:

$$D\begin{pmatrix}1, 2, \ldots, s \\ 1, 2, \ldots, s\end{pmatrix}=D_s \tag{6}$$