К ПОСТРОЕНИЮ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

А. П. Проскуряков

(Москва)

К числу хорошо известных приближенных методов построения периодических решений нелинейных систем принадлежит метод Ван дер Поля [1]. Основными характерными особенностями этого метода являются следующие.

1. Введение новых зависимых переменных, которое равносильно переходу к новой, вращающейся с постоянной угловой скоростью, системе координат.

2. Усреднение по времени правых частей дифференциальных уравнений в новых переменных.

По методу Ван дер Поля можно найти амплитуду в нулевом приближении и поправку к периоду колебаний в первом приближении. Именно усреднение уравнений ограничивает возможности метода Ван дер Поля и делает этот метод в некоторых случаях грубо приближенным.

В данной статье периодические решения строятся при помощи метода малого параметра с использованием переменных Ван дер Поля. Усреднение уравнений не применяется. Таким образом, излагаемый здесь метод является сочетанием метода малого параметра с методом Ван дер Поля. Получены формулы для вычислений трех приближений для амплитуды и для поправки к периоду колебаний. Вопрос о радиусе сходимости полученных разложений не исследуется.

Рассмотрим нелинейную колебательную систему с одной степенью свободы

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = \mu f\left(x, \frac{dx}{dt}, \mu\right) \tag{1}$$

Функцию $f(x, dx/dt, \mu)$ будем считать аналитической от своих аргументов, а величину μ — малым параметром.

В уравнение (1) время не входит в явном виде, поэтому система принадлежит к классу так называемых автономных систем. Известно [2], что для автономных систем период колебаний является неизвестной величиной и может быть представлен в виде степенного ряда по малому параметру μ:

$$T = \frac{2\pi}{k}(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \ldots) \tag{2}$$

Для построения периодических решений с периодом 2π уравнения (1) используется следующая замена независимого переменного

$$t = \frac{\tau}{k}(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \ldots) \tag{3}$$

Если ввести обозначение

$$h = 1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \ldots \tag{4}$$

то после замены независимого переменного уравнение (1) примет вид:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + h^2x = \mu\frac{h^2}{k^2} f\left(x, \frac{k}{h}\frac{dx}{d\tau}, \mu\right) \tag{5}$$

По методу малого параметра периодическое решение уравнения (5) следует искать в виде степенного ряда по параметру μ:

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \mu^2 x_2(\tau) + \ldots \tag{6}$$

коэффициенты которого являются периодическими функциями от τ с периодом, равным 2π. При этом в качестве начального условия без ограничения общности может быть принято условие

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)_{\tau=0} = 0 \tag{7}$$

Следуя методу Ван дер Поля, заменим уравнение (5) системой двух уравнений

$$\frac{dx}{d\tau} = y, \qquad \frac{dy}{d\tau} = -h^2x + \mu\frac{h^2}{k^2} f\left(x, \frac{k}{h}y, \mu\right) \tag{8}$$

Далее введем переменные Ван дер Поля по формулам

$$x(\tau) = a(\tau)\cos\tau + b(\tau)\sin\tau, \qquad y(\tau) = -a(\tau)\sin\tau + b(\tau)\cos\tau \tag{9}$$

Функции $a(\tau)$ и $b(\tau)$ также будут периодическими функциями τ с периодом, равным 2π. В новых переменных уравнения (8) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= (h^2-1)(a\cos\tau + b\sin\tau)\sin\tau - \\ &- \mu\frac{h^2}{k^2} f\left[a\cos\tau + b\sin\tau,\ \frac{k}{h}(-a\sin\tau + b\cos\tau),\ \mu\right]\sin\tau \\ \frac{db}{d\tau} &= -(h^2-1)(a\cos\tau + b\sin\tau)\cos\tau + \\ &+ \mu\frac{h^2}{k^2} f\left[a\cos\tau + b\sin\tau,\ \frac{k}{h}(-a\sin\tau + b\cos\tau),\ \mu\right]\cos\tau \end{aligned} \tag{10}$$

Будем искать периодическое решение этих уравнений в виде рядов

$$a(\tau) = a_0(\tau) + \mu a_1(\tau) + \mu^2 a_2(\tau) + \ldots, \qquad b(\tau) = b_0(\tau) + \mu b_1(\tau) + \mu^2 b_2(\tau) + \ldots \tag{11}$$

Из условия (7) вытекает, что $b(0) = 0$, следовательно, все

$$b_n(0) = 0 \tag{12}$$

Для дальнейшего введем обозначение

$$a_n(0) = A_n \tag{13}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} h^2 - 1 &= 2h_1\mu + (h_1^2 + 2h_2)\mu^2 + 2(h_1h_2 + h_3)\mu^3 + \ldots \\ \frac{1}{h} &= 1 - h_1\mu + (h_1^2 - h_2)\mu^2 + \ldots \end{aligned} \tag{14}$$

Легко видеть, что $a_0(\tau) = A_0$, $b_0(\tau) = 0$; следовательно,

$$x_0(\tau) = A_0\cos\tau \tag{15}$$

Введем обозначения

$$F(\tau, \mu) = f(x, y^*, \mu), \qquad y^* = \frac{k}{h}y \tag{16}$$

Тогда

$$F(\tau, 0) = f(A_0\cos\tau, -kA_0\sin\tau, 0) \tag{17}$$

В дальнейшем будут необходимы значения первых и вторых частных производных от функции $F(\tau, \mu)$ по параметру μ при $\mu = 0$. Имеем

$$F_\mu'(\tau, 0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y^*}\right)_0 k(y_1 - h_1y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial \mu}\right)_0 \tag{18}$$

$$\begin{aligned} F_{\mu\mu}''(\tau, 0) &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 x_1^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^{*2}}\right)_0 k^2(y_1 - h_1y_0)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2}\right)_0 + \\ &+ 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y^*}\right)_0 kx_1(y_1 - h_1y_0) + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial \mu}\right)_0 x_1 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^*\partial \mu}\right)_0 k(y_1 - h_1y_0) + \\ &+ 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 x_2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial y^*}\right)_0 k[y_2 - h_1y_1 + (h_1^2 - h_2)y_0] \end{aligned} \tag{19}$$

Круглые скобки с индексом нуль внизу означают, что в производные от функции f вместо величин x, y^*, μ подставлено $A_0\cos\tau$, $-kA_0\sin\tau$, 0 соответственно.

Для функций $a_1(\tau)$ и $b_1(\tau)$ имеем уравнения

$$\begin{aligned}\frac{da_1}{d\tau} &= 2h_1A_0\cos\tau\sin\tau - \frac{1}{k^2}F(\tau,\mu)\sin\tau\\ \frac{db_1}{d\tau} &= -2h_1A_0\cos^2\tau + \frac{1}{k^2}F(\tau,\mu)\cos\tau\end{aligned} \tag{20}$$

Интегрируя уравнения (20) в пределах от 0 до τ, получим с учетом начальных условий

$$a_1(\tau) = h_1A_0\sin^2\tau - \frac{1}{k^2}\int_0^\tau F(\tau',0)\sin\tau'd\tau' + A_1$$

$$b_1(\tau) = -h_1A_0(\tau+\cos\tau\sin\tau) + \frac{1}{k^2}\int_0^\tau F(\tau',0)\cos\tau'd\tau'$$

Для того чтобы функции $a_1(\tau)$ и $b_1(\tau)$ были периодическими с периодом 2π, необходимо

$$\int_0^{2\pi} F(\tau,0)\sin\tau d\tau = 0 \tag{21}$$

$$2\pi h_1A_0 - \frac{1}{k^2}\int_0^{2\pi} F(\tau,0)\cos\tau d\tau = 0 \tag{22}$$

Условие (21) является уравнением для определения величины A_0. Пусть A_0 — простой и не равный нулю корень уравнения (21). Тогда из условия (22) можно определить коэффициент h_1. Следует заметить, что уравнения (21) и (22) совпадают с уравнениями, получаемыми по методу Ван дер Поля, из которых в этом методе определяются амплитуда колебаний и поправка к периоду.

Функция $x_1(\tau)$ может быть найдена по формуле

$$x_1(\tau) = A_1\cos\tau - h_1A_0\tau\sin\tau +$$

$$+\frac{1}{k^2}\left[\sin\tau\int_0^\tau F(\tau',0)\cos\tau'd\tau' - \cos\tau\int_0^\tau F(\tau',0)\sin\tau'd\tau'\right] \tag{23}$$

причем коэффициент A_1 остается пока неизвестным.

Составляем уравнения для $a_2(\tau)$ и $b_2(\tau)$:

$$\frac{da_2}{d\tau} = (h_1^2+2h_2)A_0\cos\tau\sin\tau + 2h_1(a_1\cos\tau + b_1\sin\tau)\sin\tau -$$

$$-\frac{2h_1}{k^2}F(\tau,0)\sin\tau - \frac{1}{k^2}F_\mu'(\tau,0)\sin\tau$$

$$\frac{db_2}{d\tau} = -(h_1^2+2h_2)A_0\cos^2\tau - 2h_1(a_1\cos\tau + b_1\sin\tau)\cos\tau +$$

$$+\frac{2h_1}{k^2}F(\tau,0)\cos\tau + \frac{1}{k^2}F_\mu'(\tau,0)\cos\tau$$

Интегрируя с учетом начальных условий, получаем

$$a_2(\tau) = \frac{1}{2}(h_1^2+2h_2)A_0\sin^2\tau + 2h_1\int_0^\tau(a_1\cos\tau' + b_1\sin\tau')\sin\tau'd\tau' -$$

$$-\frac{2h_1}{k^2}\int_0^\tau F(\tau',0)\sin\tau'd\tau' - \frac{1}{k^2}\int_0^\tau F_\mu'(\tau',0)\sin\tau'd\tau' + A_2$$

$$b_2(\tau) = -\frac{1}{2}(h_1^2 + 2h_2) A_0 (\tau + \cos\tau \sin\tau) - 2h_1 \int_0^\tau (a_1 \cos\tau' + b_1 \sin\tau') \cos\tau' d\tau' +$$

$$+ \frac{2h_1}{k^2} \int_0^\tau F(\tau', 0) \cos\tau' d\tau' + \frac{1}{k^2} \int_0^\tau F_\mu'(\tau', 0) \cos\tau' d\tau'$$

Имеем формулы

$$\int_0^{2\pi} (a_1 \cos\tau + b_1 \sin\tau) \cos\tau d\tau = \frac{1}{2}\pi h_1 A_0 + \pi A_1 + \frac{1}{2k^2} \int_0^{2\pi} F(\tau, 0) \sin\tau d\tau \tag{24}$$

$$\int_0^{2\pi} (a_1 \cos\tau + b_1 \sin\tau) \sin\tau d\tau = \pi^2 h_1 A_0 - \frac{1}{2k^2} \int_0^{2\pi} \tau F(\tau, 0) \cos\tau d\tau \tag{25}$$

Из условий периодичности для функции $a_2(\tau)$ и $b_2(\tau)$ получаем с учетом формул (21), (22), (24), (25) уравнения

$$2\pi^2 h_1^2 A_0 - \frac{h_1}{k^2} \int_0^{2\pi} \tau F(\tau, 0) \cos\tau d\tau - \frac{1}{k^2} \int_0^{2\pi} F_\mu'(\tau, 0) \sin\tau d\tau = 0 \tag{26}$$

$$2\pi h_1^2 A_0 - 2\pi h_2 A_0 - 2\pi h_1 A_1 - \frac{h_1}{k^2} \int_0^{2\pi} \tau F(\tau, 0) \sin\tau d\tau + \frac{1}{k^2} \int_0^{2\pi} F_\mu'(\tau, 0) \cos\tau d\tau = 0 \tag{27}$$

Из уравнения (26) можно определить A_1, а из уравнения (27) коэффициент h_2.

Заметим, что константа A_1 содержится только в последнем члене уравнения (26). При этом согласно формулам (18) и (23) константа A_1 входит в уравнение линейно с коэффициентом, равным

$$-\frac{1}{k^2} \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos\tau - k\left(\frac{\partial f}{\partial y^*}\right)_0 \sin\tau\right] \sin\tau d\tau$$

Если обозначить $P(A_0) = \int_0^{2\pi} F(\tau, 0) \sin\tau d\tau$, то

$$\frac{dP}{dA_0} = \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos\tau - k\left(\frac{\partial f}{\partial y^*}\right)_0 \sin\tau\right] \sin\tau\, d\tau$$

Отсюда становится понятным необходимость условия некратности корня уравнения (21), которое было сформулировано ранее.

Константы $A_2, A_3, \ldots$ также входят линейно в определяющие их уравнения, притом с тем же коэффициентом, как и A_1.

Далее определяется функция $x_2(\tau)$ по формуле

$$x_2(\tau) = A_2 \cos\tau - 2h_1 A_1 \cos\tau + \left(\frac{3}{2} h_1^2 - h_2\right) A_0 \tau \sin\tau +$$

$$+ 2h_1 x_1(\tau) - 2h_1 \left[\sin\tau \int_0^\tau x_1(\tau') \cos\tau' d\tau' - \cos\tau \int_0^\tau x_1(\tau') \sin\tau' d\tau'\right] +$$

$$+ \frac{1}{k^2} \left[\sin\tau \int_0^\tau F_\mu'(\tau', 0) \cos\tau' d\tau' - \cos\tau \int_0^\tau F_\mu'(\tau', 0) \sin\tau' d\tau'\right] \tag{28}$$

Уравнения для функций $a_3(\tau)$ и $b_3(\tau)$ будут

$$\frac{da_3}{d\tau} = 2(h_1h_2 + h_3)A_0 \cos\tau \sin\tau + (h_1^2 + 2h_2)(a_1 \cos\tau + b_1 \sin\tau)\sin\tau + 2h_1(a_2 \cos\tau + b_2 \sin\tau)\sin\tau - \frac{h_1^2 + 2h_2}{k^2} F(\tau, 0)\sin\tau - \frac{2h_1}{k^2} F'_\mu(\tau, 0)\sin\tau - \frac{1}{2k^2} F''_{\mu\mu}(\tau, 0)\sin\tau$$

$$\frac{db_3}{d\tau} = -2(h_1h_2 + h_3)A_0 \cos^2\tau - (h_1^2 + 2h_2)(a_1 \cos\tau + b_1 \sin\tau)\cos\tau - 2h_1(a_2 \cos\tau + b_2 \sin\tau)\cos\tau + \frac{h_1^2 + 2h_2}{k^2} F(\tau, 0)\cos\tau + \frac{2h_1}{k^2} F'_\mu(\tau, 0)\cos\tau + \frac{1}{2k^2} F''_{\mu\mu}(\tau, 0)\cos\tau$$

Имеем формулы

$$\int_0^{2\pi} (a_2 \cos\tau + b_2 \sin\tau)\cos\tau\, d\tau = -\frac{1}{4}\pi\left(1 + \frac{8}{3}\pi^2\right) h_1^2 A_0 + \frac{1}{2}\pi h_2 A_0 + \frac{1}{2}\pi h_1 A_1 + \pi A_2 + \frac{h_1}{4k^2}\int_0^{2\pi} \tau^2 F(\tau, 0)\cos\tau\, d\tau + \frac{3h_1}{4k^2}\int_0^{2\pi} \tau F(\tau, 0)\sin\tau\, d\tau + \frac{1}{2k^2}\int_0^{2\pi} \tau F_\mu'(\tau, 0)\sin\tau\, d\tau \tag{29}$$

$$\int_0^{2\pi} (a_2 \cos\tau + b_2 \sin\tau)\sin\tau\, d\tau = \frac{1}{2}\pi^2 h_1^2 A_0 + \pi^2 h_2 A_0 + \pi^2 h_1 A_1 + \frac{h_1}{4k^2}\int_0^{2\pi} \tau^2 F(\tau, 0)\sin\tau\, d\tau - \frac{3h_1}{4k^2}\int_0^{2\pi} \tau F(\tau, 0)\cos\tau\, d\tau - \frac{1}{2k^2}\int_0^{2\pi} \tau F_\mu'(\tau, 0)\cos\tau\, d\tau \tag{30}$$

Условия периодичности для функций $a_3(\tau)$ и $b_3(\tau)$ приводят после довольно громоздких преобразований к следующим уравнениям:

$$2\pi^2 h_1(2h_2 - h_1^2)A_0 + 2\pi^2 h_1^2 A_1 + \frac{h_1^2}{2k^2}\int_0^{2\pi} \tau^2 F(\tau, 0)\sin\tau\, d\tau - \frac{h_2}{k^2}\int_0^{2\pi} \tau F(\tau, 0)\cos\tau\, d\tau - \frac{h_1}{k^2}\int_0^{2\pi} \tau F_\mu'(\tau, 0)\cos\tau\, d\tau - \frac{1}{2k^2}\int_0^{2\pi} F''_{\mu\mu}(\tau, 0)\sin\tau\, d\tau = 0 \tag{31}$$

$$2\pi\left(\frac{2}{3}\pi^2 - 1\right) h_1^3 A_0 + 4\pi h_1 h_2 A_0 - 2\pi h_3 A_0 + 2\pi(h_1^2 - h_2)A_1 - 2\pi h_1 A_2 - \frac{h_1^2}{2k^2}\int_0^{2\pi} \tau^2 F(\tau, 0)\cos\tau\, d\tau - \frac{h_2}{k^2}\int_0^{2\pi} \tau F(\tau, 0)\sin\tau\, d\tau - \frac{h_1}{k^2}\int_0^{2\pi} \tau F_\mu'(\tau, 0)\sin\tau\, d\tau + \frac{1}{2k^2}\int_0^{2\pi} F''_{\mu\mu}(\tau, 0)\cos\tau\, d\tau = 0 \tag{32}$$

Из уравнения (31) можно определить A_2, а из уравнения (32) коэффициент h_3. Таким образом, определены константы A_0, A_1 и A_2 и найдены коэффициенты h_1, h_2 и h_3 ряда в формуле (2) для периода колебаний. Зная константы A_0, A_1 и A_2, можно определить функции $x_0(\tau)$, $x_1(\tau)$ и $x_2(\tau)$ по формулам (15), (23) и (28).

Для упрощения вычислений заметим, что если некоторая периодическая функция $\varphi(\tau)$ является четной функцией, то существует соотношение

$$\int_0^{2\pi} \tau\varphi(\tau)\, d\tau = \pi\int_0^{2\pi} \varphi(\tau)\, d\tau \tag{33}$$

В качестве примера рассмотрим колебания напряжения сетки в ламповом генераторе с характеристикой мягкого режима. Имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=\mu(\alpha-\beta x^2)\frac{dx}{dt} \qquad (\alpha>0,\quad \beta>0) \tag{34}$$

После преобразования независимого переменного получим

$$f(x,\ y^*)=(\alpha-\beta x^2)\,y^*$$

Функция $F(\tau,\ 0)$ равна

$$F(\tau,\ 0)=-kA_0(\alpha-\beta A_0^2\cos^2\tau)\sin\tau$$

Из условия (21) получаем уравнение

$$A_0\left(\alpha-\frac{1}{4}\beta A_0^2\right)=0$$

Откуда, отбрасывая нулевой корень, находим

$$A_0^2=\frac{4\alpha}{\beta}$$

Из условия (22) получаем $h_1=0$. Вычисляем функцию $x_1(\tau)$ по формуле (23):

$$x_1(\tau)=A_1\cos\tau+\frac{\alpha A_0}{2k}\sin^3\tau$$

Затем вычисляем функцию $F_\mu'(\tau,0)$ по формуле (18):

$$F_\mu'(\tau,\ 0)=k\alpha A_1(12\cos^2\tau-1)\sin\tau+\alpha^2A_0\left(10\sin^4\tau-\frac{9}{2}\sin^2\tau\right)\cos\tau$$

Из уравнений (26) и (27) находим

$$A_1=0, \qquad h_2=\frac{1}{16}\frac{\alpha^2}{k^2}$$

Вычисляем функцию $x_2(\tau)$ по формуле (28):

$$x_2(\tau)=A_2\cos\tau-\frac{\alpha^2A_0}{k^2}\left(\frac{5}{12}\cos^5\tau-\frac{43}{48}\cos^3\tau+\frac{23}{48}\cos\tau\right)$$

Функция $F''_{\mu\mu}(\tau,\ 0)$, вычисленная по формуле (19), будет иметь вид:

$$F''_{\mu\mu}(\tau,\ 0)=\frac{\alpha^3A_0}{k}\left(\frac{112}{3}\sin^7\tau-42\sin^5\tau+\frac{59}{8}\sin^3\tau+\frac{3}{8}\sin\tau\right)+$$
$$+k\alpha A_2(-24\sin^3\tau+22\sin\tau)$$

Из условий (31) и (32) получаем

$$A_2=\frac{1}{192}\frac{\alpha^2A_0}{k^2}, \qquad h_3=0$$

Итак, имеем решение с точностью до μ^2 включительно

$$x(\tau)=A_0\cos\tau+\frac{\alpha A_0}{8k}(3\sin\tau-\sin 3\tau)\,\mu+$$
$$+\frac{\alpha^2A_0}{16k^2}\left(-\cos\tau+\frac{3}{2}\cos 3\tau-\frac{5}{12}\cos 5\tau\right)\mu^2+\ldots \tag{35}$$

Период колебания определен с точностью до μ^3 включительно:

$$T=\frac{2\pi}{k}\left(1+\frac{1}{16}\frac{\alpha^2}{k^2}\mu^2+\ldots\right) \tag{36}$$

В заключение заметим, что все промежуточные вычисления удобно проводить непосредственно в функциях от $\cos\tau$ и $\sin\tau$, не переходя к кратным гармоникам, и только в окончательном результате ввести кратные гармоники.

Поступила 15 IV 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. ОНТИ СССР, 1937.
2. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1956.