О ПОДСАСЫВАЮЩЕЙ СИЛЕ КОЛЕБЛЮЩЕГОСЯ КРЫЛА В ДОЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

М. Д. Хаскинд

(Одесса)

В последние годы метод построения точного решения задачи о вибрациях тонкого крыла в плоском дозвуковом потоке, развитый автором [1] 1 и затем Рейснером [4], получил конкретное применение в расчетах аэродинамических сил, действующих на колеблющееся крыло [5–7]. Тем самым внесена полная ясность в дискуссию, связанную с различными и многочисленными приближенными решениями, основанными на рассмотрении интегрального уравнения Поссио.

Учитывая, что в настоящее время основные величины, входящие в конструкцию точного решения, затабулированы, становится возможным исследовать ряд других свойств колеблющегося крыла в дозвуковом потоке.

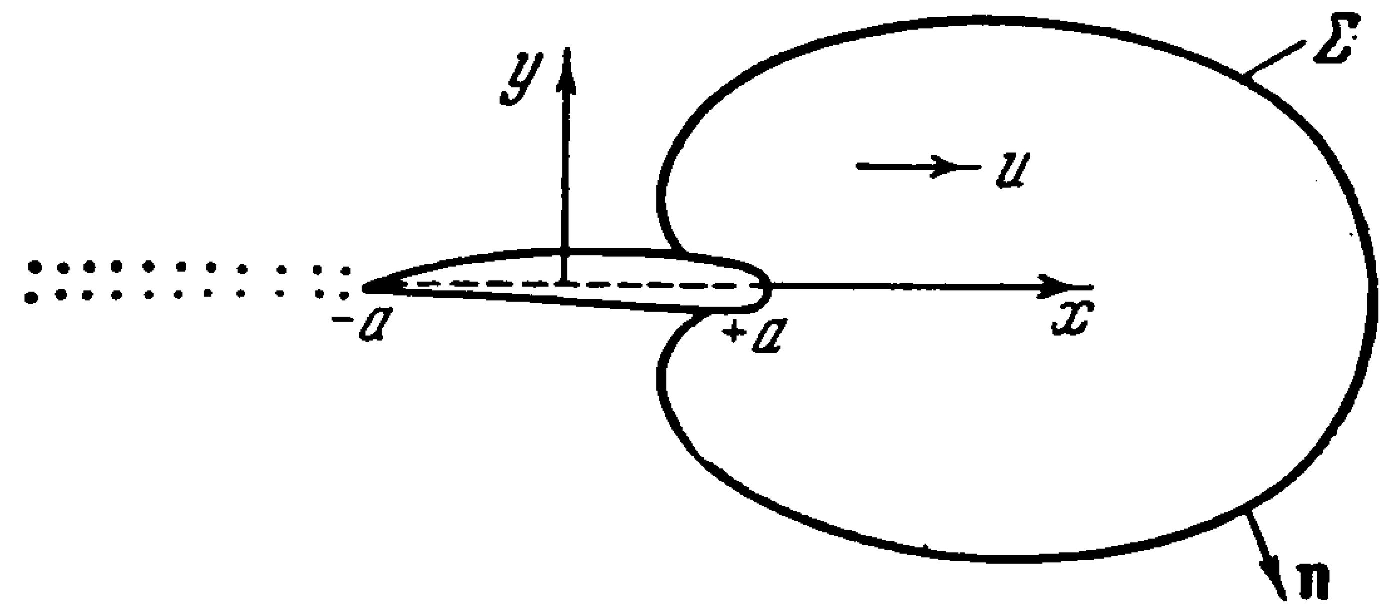
В предлагаемой заметке дается строгий вывод формулы для подсасывающей силы, что, в свою очередь, позволяет рассчитать энергетические характеристики колеблющегося крыла, как то: полную и полезную мощность колеблющегося крыла, поток энергии излучения, коэффициент полезного действия тяги и поток энергии в вихревом слое.

Для доказательства существования и определения сконцентрированной в передней кромке крыла подсасывающей силы применим теорему о количестве движения жидкости в области S, ограниченной произвольным контуром Σ и содержащей носик крыла (фиг. 1). Имеем

$$-\mathbf{F}_\Pi = \frac{d\mathbf{K}}{dt} + \int_\Sigma p\mathbf{n}\, dl \qquad (1)$$

где $\mathbf{F}_\Pi$ — подсасывающая сила, p — давление, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали и $\mathbf{K}$ — главный вектор количества движения, определяемый соотношением

$$\mathbf{K} = \iint_S \rho \mathbf{V}\, dS = \iint_S \rho \nabla\Phi\, dS$$



Фиг. 1

Здесь ρ — плотность жидкости и Φ — потенциал скорости $\mathbf{V}$.

В дальнейшем будем вычислять только средние значения величин, входящих в формулу (1), за период колебаний $T = 2\pi / k$. Поэтому, учитывая неизменную связанность контура Σ с подвижной системой координат и пользуясь данными статьи [1], приведшими к формуле (3.8°), 2 найдем

$$\left(\frac{d\mathbf{K}}{dt}\right)^* = \left\{ \int_\Sigma \rho \mathbf{V} \left(V_n - u \cos(n, x)\right) dl \right\}^* \qquad \left(B^* = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} B(t)\, dt\right)$$

На этом основании среднее значение подсасывающей силы

$$\mathbf{F}_\Pi^* = -\left\{ \int_\Sigma \left[\rho \mathbf{V} \left(V_n - u \cos(n, x)\right) + p\mathbf{n}\right] dl \right\}^* \qquad (2)$$

Вычислим величину $\mathbf{F}_\Pi^*$ с точностью до квадратичных членов включительно. Воспользуемся формулами (3.12°), (3.16°) и (3.15°), из которых имеем (3)

$$\frac{p}{\rho_0} = -\frac{\partial_a \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2}\left[V^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial_a \Phi}{\partial t}\right)^2\right], \qquad \rho = \rho_0 \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial_a \Phi}{\partial t}\right) \qquad \left(\frac{\partial_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

Здесь ρ_0 и c — плотность и скорость звука в невозмущенной жидкости.

---

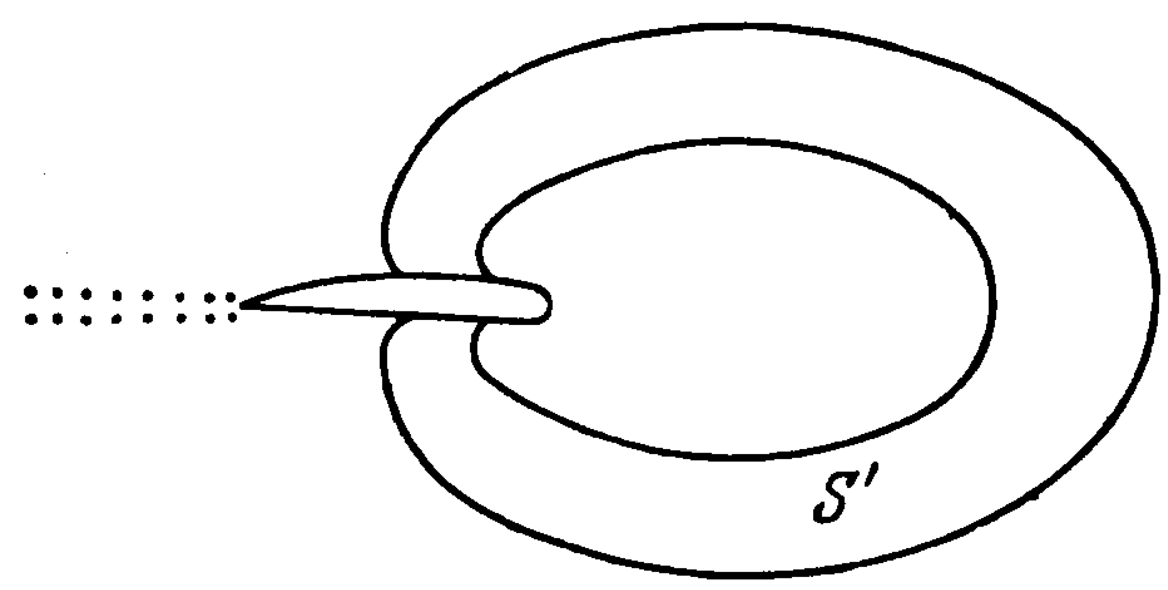
1 Подробное содержание статьи [1] изложено также в монографиях [2, 3].

2 Здесь и дальше формулы статьи [1] обозначаются с нулем наверху.

Из формул (2) и (3) с указанной точностью получаем

$$\mathbf{F}_\text{п}{}^* = \rho_0 \left\{ \int\limits_\Sigma \left[\frac{1}{2}\left(V^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial_a \Phi}{\partial t}\right)^2\right)\mathbf{n} + \frac{\partial_a \Phi}{\partial t}\,\mathbf{n} - \mathbf{V}V_n + \mathbf{V}u\cos(n,\,x) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{u}{c^2}\mathbf{V}\frac{\partial_a \Phi}{\partial t}\cos(n,\,x)\right] dl \right\}^* \tag{4}$$

Покажем теперь, что Σ можно трансформировать в произвольный контур, окружающий носик крыла. Для этого воспользуемся уравнением непрерывности (1.1°) и применим обобщенную теорему Остроградского к области S', ограниченной контуром L (фиг. 2). Имеем [f — подынтегральное выражение в (4)]



Фиг. 2

$$\int\limits_L f dl = \frac{\partial}{\partial t}\left[\iint\limits_{S'} \mathbf{V}\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial_a \Phi}{\partial t}\right) dS\right]$$

Следовательно, среднее значение интеграла по контуру L обращается в нуль и поэтому Σ можно заменить бесконечно малым контуром σ, окружающим носик крыла[1]. Осуществив указанную трансформацию и отбрасывая члены, обращающиеся в нуль при $\sigma \to 0$, получим

$$X_\text{п}{}^* = -\frac{1}{2}\rho_0 \lim_{\sigma\to 0}\left\{\int\limits_\sigma \left(M'^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right)\cos(n,\,x) + 2\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\cos(n,\,y)\right]dl\right\}^*$$
$$Y_\text{п}{}^* = -\frac{1}{2}\rho_0 \lim_{\sigma\to 0}\left\{\int\limits_\sigma \left[\left(\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 - M'^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\right)\cos(n,\,y) + 2M'^2\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\cos(n,\,x)\right]dl\right\}^* \tag{5}$$

$$\left(M' = \sqrt{1 - M^2},\quad M = \frac{u}{c}\right)$$

где $X_\text{п}{}^*$ и $Y_\text{п}{}^*$ — проекции вектора $\mathbf{F}_\text{п}{}^*$ на оси координат.

Для дальнейших вычислений перейдем к переменным x° и y° по формулам (1.11°) и в преобразованной плоскости возьмем за σ окружность малого радиуса r с центром в точке $y^\circ = 0$ и $x^\circ = +1$. Далее воспользуемся соотношениями (θ — полярный угол)

$$\cos(n,\,x)\,dl = dy = \frac{a}{M'}\quad dy^\circ = \frac{a}{M'}\,r\cos\theta d\theta$$

$$\cos(n,\,y)\,dl = -dx = -adx^\circ = ar\sin\theta d\theta$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{1}{a}\frac{\partial\Phi}{\partial x^\circ},\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{M'}{a}\frac{\partial\Phi}{\partial y^\circ}$$

Тогда формулы (5) примут вид

$$X_\text{п}{}^* = -\frac{\rho_0 M'}{2a}\lim_{r\to 0}\left\{\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left[\left(\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right)\cos\theta + 2\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\sin\theta\right]r d\theta\right\}^*$$
$$Y_\text{п}{}^* = -\frac{\rho_0 M'^2}{2a}\lim_{r\to 0}\left\{\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left[\left(\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\right)\sin\theta + 2\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\cos\theta\right]r d\theta\right\}^* \tag{6}$$

Здесь и в дальнейшем опущены черточки над новыми независимыми переменными x° и y°.

---

[1] Справедливость этой замены имеет также место и для точной формулы (2). В этом можно убедиться на основании теоремы Остроградского, уравнений Эйлера и точного уравнения непрерывности.

Установим связь между полярными (r и θ) и эллиптическими координатами ξ и η. Из соотношений $x-1=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $x=\operatorname{ch}\xi\cos\eta$, $y=\operatorname{sh}\xi\sin\eta$ имеем

$$r=\operatorname{ch}\xi-\cos\eta,\qquad \cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{2}{r}}\operatorname{sh}\frac{\xi}{2}\cos\frac{\eta}{2},\qquad \sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{2}{r}}\operatorname{ch}\frac{\xi}{2}\sin\frac{\eta}{2} \tag{7}$$

Примем во внимание конечность производных $\partial\Phi/\partial\xi$ и $\partial\Phi/\partial\eta$ при $\xi=\eta=0$, т. е. в точке (1.0), и учтем преобразование (1.8°). Тогда на основании (2.7°) имеем следующие выражения для $\partial\Phi/\partial x$ и $\partial\Phi/\partial y$ в окрестности точки (1.0):

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial x}&=\frac{1}{\sqrt{2r}}\left(\Phi_\xi{}^\circ\cos\frac{\theta}{2}-\Phi_\eta{}^\circ\sin\frac{\theta}{2}\right)e^{i(kt-\lambda)}\\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}&=\frac{1}{\sqrt{2r}}\left(\Phi_\xi{}^\circ\sin\frac{\theta}{2}+\Phi_\eta{}^\circ\cos\frac{\theta}{2}\right)e^{i(kt-\lambda)}\end{aligned}\qquad \left(\Phi_\xi{}^\circ=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)_{\xi=\eta=0},\ \Phi_\eta{}^\circ=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)_{\xi=\eta=0}\right) \tag{8}$$

Вычислим величину подсасывающей силы, обусловленную вибрациями крыла. Из соотношения (2.11°) имеем[1]

$$\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\xi}\right)_{\xi=\eta=0}=0,\qquad \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\eta}\right)_{\xi=\eta=0}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^0\frac{Se_n(0)}{Se_n'(0)}se_n'(0) \tag{9}$$

Далее из (2.18°) и (2.33°) следует, что с точностью до конечных членов в окрестности точки (1.0) справедливы равенства

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial W}{\partial y},\qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}=-\frac{\partial W}{\partial x} \tag{10}$$

причем согласно (2.22°)

$$\left(\frac{\partial W}{\partial\xi}\right)_{\xi=\eta=0}=\sum_{n=0}^{\infty}b_n{}^0\frac{Ce_n'(0)}{Ce_n(0)}ce_n(0),\qquad \left(\frac{\partial W}{\partial\eta}\right)_{\xi=\eta=0}=0 \tag{11}$$

Таким образом формулы (8)—(11) приводят к выражениям для производных $\partial\Phi/\partial x$ и $\partial\Phi/\partial y$ в окрестности точки (1.0):

$$\begin{gathered}\frac{\partial\Phi}{\partial x}=-\frac{\Lambda\sin{}^1\!/_2\theta}{\sqrt{2r}}e^{i(kt-\lambda)},\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\Lambda\cos{}^1\!/_2\theta}{\sqrt{2r}}e^{i(kt-\lambda)}\\ \Lambda=\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^0\frac{Se_n(0)}{Se_n'(0)}se_n'(0)-\sum_{n=0}^{\infty}b_n{}^0\frac{Ce_n'(0)}{Ce_n(0)}ce_n(0)\end{gathered} \tag{12}$$

Подставив (12) в (7), найдем

$$X_{\text{п}}^*=\frac{\pi\rho_0\sqrt{1-M^2}}{2a}\{[\Lambda e^{i(kt-\lambda)}]^2\}^*,\qquad Y_{\text{п}}^*=0 \tag{13}$$

Отсюда следует, что, как и для несжимаемой жидкости, подсасывающая сила совпадает по направлению с поступательной скоростью u движения крыла. Пользуясь правилом определения среднего значения произведения двух величин, изменяющихся со временем по гармоническому закону [1], окончательно имеем[2]

$$X_{\text{п}}^*=\frac{\pi\rho_0\sqrt{1-M^2}}{4a}\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^0\frac{Se_n(0)}{Se_n'(0)}se_n'(0)-\sum_{n=0}^{\infty}b_n{}^0\frac{Ce_n'(0)}{Ce_n(0)}ce_n(0)\right|^2 \tag{14}$$

Покажем, что из формулы (14) как частный случай вытекает соответствующее выражение для подсасывающей силы в несжимаемом потоке. Для этого случая функции φ_0 и W определяются через переменные ξ и η следующим образом [3]:

$$\varphi_0=\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^0\frac{e^{-n\xi}}{(-n)}\sin n\eta,\qquad W=\frac{q_0-q_1}{2}[(1-C(\mu))e^{-\xi}\cos\eta+C(\mu)\xi] \tag{15}$$

$$a_n{}^0=\tfrac{1}{2}(q_{n-1}-q_{n+1}),\qquad q_n=\frac{a}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}v_n(a\cos\eta)\cos n\eta\,d\eta,\qquad C(\mu)=\frac{H_1^{(2)}(\mu)}{H_1^{(2)}(\mu)+iH_0^{(2)}(\mu)}$$

---

[1] Коэффициенты $a_n{}^0$ и $b_n{}^0$ связаны с коэффициентами a_n и b_n статьи [1] соотношениями

$$a_n{}^0=Se_n'(0)\,a_n,\qquad b_n{}^0=Ce_n(0)\,b_n$$

[2] Формула (14) получена в 1948 г. и приведена без вывода в монографии [3].

Здесь v_n — нормальная составляющая скорости тонкого крыла, $H_0^{(2)}(\mu)$ и $H_1^{(2)}(\mu)$ — функции Ганкеля и $\mu = ka/u$. Из формул (8), (10) и (15) находим $\Delta = -q_1 - C(\mu)(q_0 - q_1)$. Пользуясь этим и формулой (13) и возвращаясь к переменной $x = a\cos\eta$, получаем выражение для подсасывающей силы в форме, установленной Л. И. Седовым [3]:

$$X_{\text{П}}{}^* = \frac{2\rho a}{\pi}\left\{\left[-\int_{-a}^{+a}\frac{v_n(x,\,t)}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx + \frac{Y_3}{2\rho a u}\right]^2\right\}^* \tag{16}$$

$$Y_3 = -2\rho u\int_{-a}^{+a}[C(\mu)-1]\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,v_n(x,\,t)\,dx \tag{17}$$

Определив $X_{\text{П}}{}^*$, в общем случае можно также найти среднее значение полной горизонтальной силы ($y(x,\,t)$ — уравнение поверхности крыла):

$$X^* = X_{\text{П}}{}^* + 2\rho_0\left[\int_{-a}^{+a}\left(\frac{\partial_a\Phi}{\partial t}\right)_{y=-0}\frac{\partial y}{\partial x}\,dx\right]^* \tag{18}$$

Для некоторых режимов колебаний $X^* > 0$, т. е. X^* является тягой крыла, и, следовательно, развиваемая полезная мощность равна $Q = X^* u$. Для среднего значения мощности, затрачиваемой на образование колебаний крыла, имеем

$$R = 2\rho_0\left[\int_{-a}^{+a}\left(\frac{\partial_a\Phi}{\partial t}\right)_{y=-0}\left(v_n + u\,\frac{\partial y}{\partial x}\right)dx\right]^* \tag{19}$$

Для поступательных и вращательных колебаний крыла R выражается через подъемную силу и момент при помощи простой формулы (3.19°). Проведенный анализ [1] показывает, что $R = Q + \Pi + N$, где Π — средний поток энергии в вихревом слое, определяемый формулой (3.9°), а N — средний поток энергии, идущий на излучение волн в сжимаемой жидкости. Для несжимаемой жидкости $N = 0$, а при отсутствии поступательной скорости ($u = 0$) поток энергии, идущей на излучение, полностью обусловливает демпфирующие силы, действующие на колеблющееся крыло в сжимаемой жидкости [8].

Полученные здесь и в статье [1] формулы позволяют рассчитать все энергетические характеристики колеблющегося крыла в дозвуковом потоке, в том числе коэффициент полезного действия тяги $\eta_0 = Q\,/\,R$.

Поступила 12 I 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаскинд М. Д. Колебания крыла в дозвуковом потоке газа. ПММ, т. 11, вып. 1, 1947; Translation No A9—T—22, Air Material Command and Brown University.
2. Франкль Ф. И., Карпович Е. А. Газодинамика тонких тел. Гостехиздат, 1948.
3. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Гостехиздат, 1950.
4. Reissner E. Nat. Advis. Comm. Aeronaut., Techn. Note N 2363, 1951, May.
5. Blanch G. Tables of Lift and Moment Coefficient for Oscillating airfoils in subsonic compressible Flow. Nat. Bureau Stand. Rept. N 2260, Febr. 6,1953.
6. Fettis H. E. Regarding the Computation of Unsteady Air Forces by Means of Mathien Functions. Journal of the Aeronautical Sciences, vol. 20, No. 6, 1953 (437—438).
7. Blanch G. and Fettis H. E. Subsonic Oscillatory Aerodynamic Coefficients Computed by the Method of Reissner and Haskind Journal of the Aeronautical Sciences, vol. 20, No. 12, 1953 (851—853); РЖ «Механика» № 3, 1955, реферат № 2237.
8. Хаскинд М. Д. Акустическое излучение колеблющихся тел в сжимаемой жидкости. ЖЭТФ, т. 16, вып. 7, 1946.