ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С МАЛЫМ МНОЖИТЕЛЕМ[1]

Б. С. Разумихин

(Москва)

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений возмущенного движения вида

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t)\, x_j \qquad (i = 1, \ldots, n-1), \qquad \mu \frac{dx_n}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_{nj}(t)\, x_j \tag{1}$$

где μ — малый множитель.

Коэффициенты $p_{ij}(t)$ предположим непрерывными и ограниченными вместе с их первыми производными функциями времени. Коэффициент $p_{nn}(t)$ предположим удовлетворяющим условию

$$|p_{nn}(t)| > \varepsilon > 0 \qquad \text{при } t \geqslant t_0 \tag{2}$$

где ε — фиксированное, достаточно малое положительное число.

При $\mu = 0$ последнее уравнение системы (1) становится конечным и с его помощью возможно в силу (2) исключить переменную x_n из первых $n-1$-го уравнений. Подставляя

$$x_n = -\sum_{j=1}^{n-1} \frac{p_{nj}(t)}{p_{nn}(t)}\, x_j \tag{3}$$

в первые $n-1$ уравнений, получим систему уравнений $n-1$-го порядка:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n-1} \left(p_{ij}(t) - p_{in}(t)\, \frac{p_{nj}(t)}{p_{nn}(t)} \right) x_j \tag{4}$$

которую будем называть вырожденной системой.

Целью работы является выяснение условий, при которых из асимптотической устойчивости вырожденной системы (4) следует устойчивость исходной системы (1).

Предположим, что для вырожденной системы найдена функция Ляпунова в виде определенно-положительной квадратичной формы $n-1$ переменных[2]

$$V_0 = \sum_{i,j=1}^{n-1} \alpha_{ij} x_i x_j$$

Введем вспомогательную квадратичную форму n переменных

$$V = V_0 + \mu\,(2\alpha_{1n} x_1 x_n + \ldots + 2\alpha_{n-1,n} x_{n-1} x_n + \alpha_{nn} x_n^2) \tag{5}$$

и выясним, возможно ли надлежащим выбором коэффициентов $\alpha_{1n}, \ldots, \alpha_{nn}$ получить квадратичную форму, которая будет функцией Ляпунова исходной системы (1).

Условимся в дальнейшем при помощи индексов μ и 0 обозначать производные квадратичных форм $(dV/dt)_\mu$ в силу исходной системы (1) и производные квадратичных форм $(dV/dt)_0$ в силу вырожденной системы (4).

Вычисляя производную квадратичной формы V в силу системы (1), получим

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_\mu = \left(\frac{dV_0}{dt}\right)_\mu + 2\mu \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d\alpha_{in}}{dt}\, x_i x_n + \mu\, \frac{d\alpha_{nn}}{dt}\, x_n^2 +$$
$$+ 2\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{in} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} p_{nj}(t)\, x_j\right) + 2\mu x_n \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{in} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t)\, x_j + 2\alpha_{nn} x_n \sum_{j=1}^{n} p_{nj}(t)\, x_j$$

Введем вместо x_n переменную y:

$$y = \sum_{j=1}^{n} p_{nj} x_j \tag{7}$$

---

[1] Кратко воспроизводятся некоторые результаты кандидатской диссертации автора. Институт механики АН СССР, Москва, сентябрь 1952 г.

[2] Это предположение не ограничивает общности, так как теорема об асимптотической устойчивости допускает обращение и доказана теорема о существовании в рассматриваемом случае функции Ляпунова в виде квадратичной формы [1].

Заменяя в правой части первых $n-1$ уравнений переменную x_n переменной y согласно (7):

$$x_n = \frac{1}{p_{nn}(t)} y - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{p_{nj}(t)}{p_{nn}(t)} x_j \tag{8}$$

Получим

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t)\, x_j = \sum_{j=1}^{n-1} \left(p_{ij}(t) - \frac{p_{in}(t)\, p_{nj}(t)}{p_{nn}(t)}\right) x_j + \frac{p_{in}(t)}{p_{nn}(t)} y \tag{9}$$

и, следовательно, на основании (4) и (9)

$$\left(\frac{dV_0}{dt}\right)_\mu = \left(\frac{dV_0}{dt}\right)_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial V_0}{\partial x_i} \frac{p_{in}(t)}{p_{nn}(t)} y = \left(\frac{dV_0}{dt}\right)_0 + 2 \sum_{i;\, j=1}^{n-1} a_{ij} x_j \frac{p_{in}(t)}{p_{nn}(t)} y \tag{10}$$

Пользуясь равенствами (8), (9) и (10), можно представить выражение (6) в следующем виде:

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_\mu = \left(\frac{dV_0}{dt}\right)_0 + 2 \sum_{i;\, j=1}^{n-1} a_{ij} \frac{p_{in}(t)}{p_{nn}(t)} x_j y +$$

$$+ \mu \left\{ 2 \left(\frac{1}{p_{nn}(t)} y - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{p_{nj}(t)}{p_{nn}(t)} x_j\right) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{da_{in}}{dt} x_i + \frac{da_{nn}}{dt} \left(\frac{1}{p_{nn}(t)} y - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{p_{nj}(t)}{p_{nn}(t)} x_j\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2 \left(\frac{1}{p_{nn}(t)} y - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{p_{nj}(t)}{p_{nn}(t)} x_j\right) \sum_{j=1}^{n-1} a_{in} \left[\sum_{j=1}^{n-1} \left(p_{ij} - \frac{p_{nj}(t)\, p_{in}(t)}{p_{nn}(t)}\right) x_j + \frac{p_{in}(t)}{p_{nn}(t)} y \right] \right\} +$$

$$+ 2y \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} x_i + 2a_{nn} \left(\frac{1}{p_{nn}(t)} y - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{p_{nj}(t)}{p_{nn}(t)} x_j\right) y$$

Обозначая

$$U = 2 \left(\frac{1}{p_{nn}(t)} y - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_{nj}(t)}{p_{nn}(t)} x_j\right) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{da_{in}}{dt} x_i + \frac{da_{nn}}{dt} \left(\frac{1}{p_{nn}(t)} y - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{p_{nj}(t)}{p_{nn}(t)} x_j\right)^2 +$$

$$+ \left(2 \frac{1}{p_{nn}(t)} y - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{p_{nj}(t)}{p_{nn}(t)} x_j\right) \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} \left(p_{ij}(t) - \frac{p_{nj}(t)\, p_{in}(t)}{p_{nn}(t)}\right) x_j + \frac{p_{in}(t)}{p_{nn}(t)} y \right\} \tag{11}$$

получим

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_\mu = \left(\frac{dV_0}{dt}\right)_0 + \mu U +$$

$$+ 2y \left[\sum_{i;\, j=1}^{n-1} a_{ij} \frac{p_{in}(t)}{p_{nn}(t)} x_j + \sum_{j=1}^{n-1} a_{jn} x_j - a_{nn} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{p_{nj}(t)}{p_{nn}(t)} x_j \right] + 2 \frac{a_{nn}}{p_{nn}(t)} y^2 \tag{12}$$

Предполагая, что квадратичная форма V определенно-положительна, а квадратичная форма $(dV\,/\,dt)_\mu$ определенно-отрицательна, получим из условий знакоопределенности

$$\mu a_{nn} > 0, \qquad p_{nn}(t)\, a_{nn} < 0 \tag{13}$$

Из (13) следует условие

$$\mu p_{nn}(t) < 0 \tag{14}$$

Предположим, что условие (14) выполнено, и выберем a_{nn} удовлетворяющим условиям (13). Коэффициенты $a_{1n}, \ldots, a_{n-1,\, n}$ определим следующими равенствами:

$$a_{jn} = a_{nn} \frac{p_{nj}(t)}{p_{nn}(t)} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_{in}(t)}{p_{nn}(t)} a_{ij} \qquad (j = 1, \ldots, n-1) \tag{15}$$

Очевидно, $a_{1n}, \ldots, a_{n-1,\, n}$ в силу условия (2) и предположенной непрерывности и ограниченности коэффициентов системы (1) будут непрерывными и ограниченными функциями времени.

Так как квадратичная форма V_0 определенно-положительная, то условием определенной положительности квадратичной формы V будет

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots & a_{1n-1} & \mu a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} \cdots & a_{n-1,n-1} & \mu a_{n-1,n} \\ \mu a_{n,1} \cdots & \mu a_{n,n-1} & \mu a_{nn} \end{vmatrix} = \mu\left(a_{nn}\Delta_{n-1} + \mu \sum_{i=1}^{n-1} a_{in}B_{in}\right) > 0 \qquad (16)$$

где B_{in} — минор определителя $\det_n \| a_{ij} \|$, получаемый вычеркиванием i-й строки и последнего столбца. При достаточно малом μ знак определителя Δ_n определяется знаком выражения $\mu a_{nn}\Delta_{n-1}$ и, следовательно, в силу (13) условие $\Delta_n > 0$ при достаточно малом μ выполнено. Подставляя в $(dV/dt)_\mu$ выражения (15) для коэффициентов $a_{1n}, \ldots, a_{n-1,n}$, получим

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_\mu = \left(\frac{dV_0}{dt}\right)_0 + \mu U + 2\frac{a_{nn}}{p_{nn}(t)} y^2 \qquad (17)$$

Коэффициенты γ_{ij} квадратичной формы (11)

$$U = \sum_{i;\, j=1}^{n} \gamma_{ij}(t) Z_i Z_j \qquad \left(Z_i \equiv \begin{cases} x_i & \text{при } i < n \\ y & \text{при } i = n \end{cases} \right)$$

в силу непрерывности и ограниченности коэффициентов $p_{ij}(t)$ и их первых производных являются ограниченными функциями и, следовательно, при достаточно малом μ определенная отрицательность квадратичной формы $(dV/dt)_\mu$ следует из определенной отрицательности квадратичной формы

$$\left(\frac{dV_0}{dt}\right)_0 + 2\frac{a_{nn}}{p_{nn}(t)} y^2 \qquad (18)$$

которая имеет место в силу предположения относительно квадратичной формы V и условий (13). Из полученных выше результатов следует справедливость теоремы.

Теорема. Асимптотическая устойчивость системы (1) с малым множителем следует из асимптотической устойчивости вырожденной системы (4) если: 1) коэффициенты $p_{ij}(t)$ непрерывны, ограничены и имеют ограниченные первые производные; 2) множитель μ достаточно мал и его знак противоположен знаку коэффициента $p_{nn}(t)$; 3) коэффициент $p_{nn}(t)$ для $t \geqslant t_0$ удовлетворяет условию

$$|p_{nn}(t)| > \varepsilon > 0$$

При произвольно выбранном a_{nn}, удовлетворяющем условиям (13), интервал допустимых значений μ определяется одновременным выполнением условий (16) и

$$(-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} + \mu\gamma_{11} & \cdots & a_{1n-1} + \mu\gamma_{1,n-1} & \mu\gamma_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} + \mu\gamma_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} + \mu\gamma_{n-1,n-1} & \mu\gamma_{n-1,n} \\ \mu\gamma_{n1} & \cdots & \mu\gamma_{n,n-1} & \mu\gamma_{nn} + 2a_{nn}/p_{nn}(t) \end{vmatrix} > 0 \qquad (19)$$

где a_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n-1)$ — коэффициент квадратичной формы $(dV_0/dt)_0$.

Замечание. В условия (19), определяющие интервал допустимых значений параметра μ, не включены первые $n-1$ условий Сильвестера для квадратичной формы $(dV/dt)_\mu$, так как при непрерывном изменении параметра μ первым нарушается последнее из этих условий [2].

Изложенное выше позволяет в случаях, когда задача устойчивости сводится к исследованию характера решений системы линейных дифференциальных уравнений с малым множителем, ограничиться исследованием устойчивости вырожденной системы с последующим обоснованием возможности судить на основании установленной устойчивости вырожденной системы об устойчивости исходной системы.

Поступила 5 IV 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Некоторые вопросы теории устойчивости движения в смысле Ляпунова. Сборник трудов Казанского авиационного института, № VII, 1937.
2. Жуковский Н. Е. О прочности движения. Полн. собр. сочинений, т. I, 1937.