О КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ КРАТНЫХ КОРНЕЙ

В. А. Троицкий

(Ленинград)

§ 1. Каноническое преобразование уравнений прямого регулирования. Рассмотрим систему n дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha} x_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m} h_{k\beta} f_\beta (\sigma_\beta) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

$$\sigma_\beta = \sum_{\alpha=1}^{n} j_{\beta\alpha} x_\alpha \qquad (\beta = 1, \ldots, m)$$

которую перепишем в форме

$$\dot{x} = bx + hf(\sigma), \qquad \sigma = jx \tag{1.2}$$

Здесь x и σ матрицы-столбцы переменных x_k и σ_β соответственно, b — квадратная матрица коэффициентов $b_{k\alpha}$ порядка n, h и j — прямоугольные матрицы постоянных $h_{k\beta}$ и $j_{\beta\alpha}$ размеров $(n \times m)$ и $(m \times n)$ соответственно и $f(\sigma)$ — матрица-столбец функций $f_\beta(\sigma_\beta)$.

Предположим, что среди собственных значений матрицы b, или, что то же, среди корней ее характеристического уравнения

$$D(\lambda) = |\lambda I - b|$$

где I — единичная матрица порядка n, имеются кратные; в уравнениях (1.2) при помощи неособенного линейного преобразования

$$x = cz, \qquad |c| \neq 0 \tag{1.3}$$

перейдем к новым переменным $z = \{z_1, \ldots, z_n\}$; получим

$$\dot{z} = c^{-1}bcz + c^{-1}hf(\sigma), \qquad \sigma = jcz \tag{1.4}$$

Матрица b, среди собственных значений которой по предположению имеются кратные, преобразованием подобия $c^{-1}bc$ приводится к квазидиагональной канонической форме

$$c^{-1}bc = J \tag{1.5}$$

где

$$J = \begin{Vmatrix} J_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & J_\tau \end{Vmatrix}, \qquad J_i = \begin{Vmatrix} \lambda_i & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \lambda_i & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{Vmatrix} = \lambda_i I + \nu' \tag{1.6}$$

Здесь J_i — клетка Жордана, соответствующая корню λ_i, порядок которой e_i равен степени элементарного делителя $(\lambda - \lambda_i)^{e_i}$. Нами введен в рассмотрение единичный косой ряд [1] первой степени ν'. В случае различных собственных значений матрица J будет диагональной [2].

Каноническая форма уравнений (1.2) имеет вид:

$$\dot{z} = Jz + af(\sigma), \qquad \sigma = \gamma z, \quad a = c^{-1}h, \qquad \gamma = jc \tag{1.7}$$

Матрица преобразования c может быть взята в виде

$$c = kC \tag{1.8}$$

где k — квадратная матрица модальных столбцов матрицы b, а C — квазидиагональная матрица произвольных постоянных

$$C = \begin{Vmatrix} C_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & C_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & C_\tau \end{Vmatrix} \qquad C_i = IC_{i0} + C_{i1}\nu' + \ldots + C_{i,\,e_i-1}\nu'^{\,e_i-1} \tag{1.9}$$

и ν^ρ — единичный косой ряд степени ρ. Обратная матрица c^{-1} равна

$$c^{-1} = C^{-1} k^{-1} \tag{1.10}$$

Здесь

$$C = \begin{Vmatrix} C_1^{-1} & 0 \ldots 0 \\ 0 & C_2^{-1} \ldots 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \ldots C_\tau^{-1} \end{Vmatrix}$$

$$C_i^{-1} = \frac{1}{C_{i0}} I - \frac{1}{C_{i0}^2}[C_{i1}\nu' + C_{i2}\nu^2 + \ldots + C_{i,e_i-1}\nu^{e_i-1}] + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^{e_i-1}}{C_{i0}^{e_i}}[C_{i1}\nu' + C_{i2}\nu^2 + \ldots + C_{i,e_i-1}\nu^{e_i-1}]^{e_i-1} \tag{1.11}$$

причем строки матрицы k^{-1} с точностью до множителя совпадают с модальными строками матрицы b.

Перейдем к составлению матрицы модальных столбцов k и матрицы модальных строк k^{-1}. Если среди собственных значений матрицы b имеются кратные, то s модальных столбцов и s модальных строк, соответствующих s-кратному собственному значению λ_i, удовлетворяют соотношениям

$$k_{is}\nu^\rho \varkappa_{is} = \frac{1}{(\rho-1)!}\left\{\frac{F(\lambda_i)}{D_s(\lambda_i)}\right\}^{(\rho-1)} \qquad (\rho = 1, \ldots, s) \tag{1.12}$$

где k_{is} и $\varkappa_{is}$ — прямоугольные матрицы, состоящие соответственно из s модальных столбцов и s модальных строк и

$$\left\{\frac{F(\lambda_i)}{D_s(\lambda_i)}\right\}^{(\rho)} = \frac{d^\rho}{d\lambda^\rho}\left\{\frac{F(\lambda)}{D_s(\lambda)}\right\}_{\lambda=\lambda_\rho}, \qquad D_s(\lambda) = \frac{D(\lambda)}{(\lambda-\lambda_i)^s} \tag{1.13}$$

а $F(\lambda)$ — присоединенная матрица матрицы b.

Таким образом, за s модальных столбцов $k_i, k_{i+1}, \ldots, k_{i+s-1}$ для s-кратного значения λ_i матрицы b могут быть взяты s линейно независимых столбцов матриц

$$\frac{F(\lambda_i)}{D_s(\lambda_i)}, \quad \left\{\frac{F(\lambda_i)}{D_s(\lambda_i)}\right\}^{(1)}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{(s-1)!}\left\{\frac{F(\lambda_i)}{D_s(\lambda_i)}\right\}^{(s-1)} \tag{1.14}$$

Модальные строки найдутся тогда из соотношений (1.13).

В качестве примера рассмотрим случай двойного корня $\lambda_{n-1} = \lambda_n$. Предположим, что все остальные корни характеристического уравнения матрицы b различны, а степень элементарного делителя равна $2\,(e_i = 2)$. На основании (1.12) будем иметь

$$k_{n-1}\varkappa_{n-1} + k_n\varkappa_n = \left\{\frac{F(\lambda_n)}{D_2(\lambda_n)}\right\}^{(1)}, \qquad k_n\varkappa_{n-1} = \frac{F(\lambda_n)}{D_2(\lambda_n)} \tag{1.15}$$

и, следовательно, определив модальные столбцы k_{n-1} и k_n равенствами

$$k_n = \{D_{nk}(\lambda_n)\}, \qquad k_{n-1} = D_2(\lambda_n)\left\{\left[\frac{D_{n-1,k}(\lambda_n)}{D_2(\lambda_n)}\right]^{(1)}\right\} \tag{1.16}$$

в предположении, что они линейно независимы, получим

$$\varkappa_{n-1} = \frac{1}{D_2(\lambda_n)\, D_{n,n-1}(\lambda_n)} \left\| D_{k,n-1}(\lambda_n) \right\|$$

$$\varkappa_n = \frac{1}{D_2(\lambda_n)\, D_{n,n-1}(\lambda_n)} \left\| \left[\frac{D_{kn}(\lambda_n)}{D_2(\lambda_n)}\right]^{(1)} - \frac{D_{k,n-1}(\lambda_n)}{D_{n,n-1}(\lambda_n)}\left[\frac{D_{n-1,n}(\lambda_n)}{D_2(\lambda_n)}\right]^{(1)} \right\| \tag{1.17}$$

В формулах (1.16) и (1.17) с целью сократить занимаемое ими место даны только общие элементы столбцов и строк. Формулы (1.17) получены при условии, что $D_{n,n-1}(\lambda_n) \neq 0$ и $D_{n,n}(\lambda_n) \neq 0$.

В случае простых элементарных делителей $e_{n-1}=e_n=1$, предположив, что два последних столбца второй матрицы (1.14) линейно независимы, можно принять

$$k_{n-1}=\left\{D_{n-1,\,k}^{(1)}(\lambda_n)\right\},\qquad k_n=\left\{D_{n,\,k}^{(1)}(\lambda_n)\right\} \tag{1.18}$$

Тогда

$$\varkappa_{n-1}=\frac{1}{\Delta D_2(\lambda_n)}\left\|D_{nn}^{(1)}(\lambda_n)\,D_{k,\,n-1}^{(1)}(\lambda_n)-D_{n,\,n-1}^{(1)}(\lambda_n)\,D_{kn}^{(1)}(\lambda_n)\right\|$$

$$\varkappa_n=\frac{1}{\Delta D_2(\lambda_n)}\left\|D_{n-1,\,n-1}^{(1)}(\lambda_n)\,D_{kn}^{(1)}(\lambda_n)-D_{n-1,\,n}^{(1)}(\lambda_n)\,D_{k,\,n-1}^{(1)}(\lambda_n)\right\| \tag{1.19}$$

Здесь

$$\Delta=D_{n-1,\,n-1}^{(1)}(\lambda_n)\,D_{nn}^{(1)}(\lambda_n)-D_{n-1,\,n}^{(1)}(\lambda_n)\,D_{n,\,n-1}^{(1)}(\lambda_n)$$

Эти формулы остаются справедливы и при $\lambda_{n-1}=\lambda_n=0$.

Аналогичным способом могут быть построены матрицы k и k^{-1} для любого распределения собственных значений матрицы b.

В заключение настоящего параграфа выпишем в развернутом виде каноническую систему уравнений теории автоматического регулирования для рассмотренного выше случая двойного корня и $e_{n-1}=2$. Если остальные корни простые, то будем иметь

$$\dot z_\rho=\lambda_\rho z_\rho+\sum_{s=1}^{m}a_{\rho s}f_s(\sigma_s)\qquad(\rho=1,\ \ldots,\ n-1)$$

$$\dot z_{n-1}=\lambda_n z_n+z_{n-1}+\sum_{s=1}^{m}a_{ns}f_s(\sigma_s) \tag{1.20}$$

$$\sigma_s=\sum_{\rho=1}^{n}\gamma_{s\rho}z_\rho\qquad(s=1,\ \ldots,\ m) \tag{1.21}$$

где

$$a_{\rho s}=\frac{H_{s\rho}(\lambda_\rho)}{C_\rho D'(\lambda_\rho)\,D_{\rho\rho}(\lambda_\rho)},\qquad \gamma_{s\rho}=C_\rho\sum_{\alpha=1}^{n}j_{s\alpha}D_{\rho\alpha}(\lambda_\rho) \tag{1.22}$$

$$\left(\begin{array}{ll} C_{n-1,\,0}=C_{n-1}, & s=1,\ \ldots,\ m\\ C_{n-1,\,1}=C_n, & \rho=1,\ \ldots,\ n-2\end{array}\right)$$

$$a_{n-1,\,s}=\frac{H_{s,\,n-1}(\lambda_n)}{C_{n-1}D_2(\lambda_n)\,D_{n,\,n-1}(\lambda_n)},\qquad \gamma_{sn}=C_{n-1}\sum_{\alpha=1}^{n}j_{s\alpha}D_{n\alpha}(\lambda_n) \tag{1.23}$$

$$a_{ns}=-\left\{\frac{C_n}{C_{n-1}}+\frac{1}{D_{nn}(\lambda_n)}\left[\frac{D_{n-1,\,n}(\lambda_n)}{D_2(\lambda_n)}\right]^{(1)}\right\}a_{n-1,\,s}+$$
$$+\frac{1}{C_{n-1}D_2(\lambda_n)\,D_{nn}(\lambda_n)}\left[\frac{H_{s,\,n}(\lambda_n)}{D_2(\lambda_n)}\right]^{(1)}$$

$$\gamma_{s,\,n-1}=C_{n-1}D_2(\lambda_n)\sum_{\alpha=1}^{n}j_{s\alpha}\left[\frac{D_{n-1,\,\alpha}(\lambda_n)}{D_2(\lambda_n)}\right]^{(1)}+\frac{C_n}{C_{n-1}}\gamma_{sn}$$

В этих формулах $H_{s\rho}(\lambda)$ — полиномы, получающиеся заменой в $D(\lambda)$ ρ-го столбца столбцом h_s [2]. Каноническая система уравнений в случае двойного нулевого корня $\lambda_{n-1}=\lambda_n=0$ будет иметь тот же вид (1.20) и (1.21), если принять $\lambda_n=0$.

Если $m=1$, то произвольные постоянные C_ρ можно выбрать так, чтобы все $a_\rho=1$ (второй индекс опущен).

После того, как найдено решение канонической системы уравнений, мы можем по формулам (1.3) определить исходные переменные x_k.

§ 2. **Каноническая форма уравнений непрямого регулирования.** Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha} x_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m} n_{k\beta} \xi_\beta \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

$$\dot{\xi}_\beta = f_\beta(\sigma_\beta), \qquad \sigma_\beta = \sum_{\alpha=1}^{n} j_{\beta\alpha} x_\alpha + \sum_{\varepsilon=1}^{m} r_{\beta\varepsilon} \xi_\varepsilon \qquad (\beta = 1, \ldots, m)$$

которыми описывается поведение систем непрямого регулирования с несколькими регулирующими органами. В матричной форме уравнения (2.1) запишутся в виде

$$\dot{x} = bx + n\xi, \qquad \dot{\xi} = f(\sigma), \qquad \sigma = jx + r\xi \tag{2.2}$$

Здесь ξ — матрица-столбец переменных ξ_β, r — квадратная матрица чисел обратных связей $r_{\beta\varepsilon}$ порядка $m \times m$. В уравнении (2.2) перейдем к новым переменным $z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, связанным с исходными соотношением

$$x = c(z - a\xi)$$

Тогда получим

$$\dot{z} = Jz + af(\sigma) + c^{-1}(n - bca)\xi \tag{2.3}$$

или, если выбрать матрицу a так, чтобы удовлетворялось уравнение $n - bca = 0$, то

$$\dot{z} = Jz + af(\sigma) \tag{2.4}$$

а второе уравнение (2.3) после дифференцирования примет вид:

$$\dot{\sigma} = \beta z + rf(\sigma) \qquad (\beta = jc) \tag{2.5}$$

Матрица преобразования c составляется так же, как и в рассмотренном выше случае уравнений прямого регулирования. Если среди собственных значений матрицы b нет нулевых, то матрица a определится равенством

$$a = J^{-1}c^{-1}n \tag{2.6}$$

В случае, когда среди собственных значений матрицы b есть нулевые, каноническую форму уравнений (2.1) можно получить, переписав их предварительно в виде уравнений прямого регулирования.

Поступила 19 IV 1954

Ленинградский политехнический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Бромберг П. В. Устойчивость и автоколебания импульсных систем регулирования. Оборонгиз, 1953.
2. Троицкий В. А. О канонических преобразованиях уравнений теории автоматического регулирования. ПММ, т. XVII, вып. 1, 1953.
3. Лурье А. И. О канонической форме уравнений теории автоматического регулирования. ПММ, т. XII, вып. 5, 1948.
4. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. Гостехиздат, 1951.