О ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ ПОВОРОТОВ ТВЕРДОГО ТЕЛА

А. И. Лурье

(Ленинград)

Основные соотношения теории конечных поворотов, имеющей более чем столетнюю давность, могут быть выражены при помощи двух формул.

Первая определяет преобразование вектора-радиуса $\mathbf{r}$ точки тела, имеющего неподвижную точку O, в вектор-радиус $\mathbf{r}'$ в результате поворота, определяемого вектором $\boldsymbol{\theta}$:

$$\mathbf{r}'=\mathbf{r}+\frac{1}{1+{}^1/_4\boldsymbol{\theta}^2}\,\boldsymbol{\theta}\times\left(\mathbf{r}+\tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{r}\right) \tag{1}$$

Здесь, напомним, вектором поворота назван вектор, равный по величине $2\operatorname{tg}{}^1/_2\varphi$, где φ — угол поворота, и направленный по оси поворота в сторону, откуда поворот на угол $<180^\circ$ виден происходящим в положительную сторону. Называя через $\mathbf{e}$ единичный вектор этого направления, имеем

$$\boldsymbol{\theta}=2\mathbf{e}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \tag{2}$$

Вторая формула выражает теорему сложения конечных поворотов; она **имеет** вид:

$$\boldsymbol{\theta}_{12}=\frac{1}{1-{}^1/_4\boldsymbol{\theta}_1\cdot\boldsymbol{\theta}_2}\left(\boldsymbol{\theta}_1+\boldsymbol{\theta}_2+\tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\theta}_2\times\boldsymbol{\theta}_1\right) \tag{3}$$

Смысл ее заключается в следующем: направления, определяемые векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, фиксированы наперед. Производятся повороты

$$\boldsymbol{\theta}_1=2\mathbf{e}_1\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}, \qquad \boldsymbol{\theta}_2=2\mathbf{e}_2\operatorname{tg}\frac{\varphi_2}{2} \tag{4}$$

в указанной последовательности. Их совокупность эквивалентна повороту $\boldsymbol{\theta}_{12}$, определяемому по формуле (3). Результирующий поворот последовательности $\boldsymbol{\theta}_2$, $\boldsymbol{\theta}_1$ согласно (3) должен быть определен по формуле

$$\boldsymbol{\theta}_{21}=\frac{1}{1-{}^1/_4\boldsymbol{\theta}_1\cdot\boldsymbol{\theta}_2}\left(\boldsymbol{\theta}_1+\boldsymbol{\theta}_2+\tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\theta}_1\times\boldsymbol{\theta}_2\right) \tag{5}$$

и сравнение с (3) выражает предложение о некоммутативности поворотов.

Соотношения (1) и (3) представляют векторную запись формул, приводимых, например, в книгах [1] или [2]. В несколько ином виде (1) приводится в [3].

Некоммутативность конечных поворотов твердого тела широко известна. Однако неполное понимание этого свойства было причиной ошибок: например, вопреки простейшему опыту и здравому смыслу высказывалось утверждение, что положение оси ротора в кардановом подвесе зависит от последовательности поворотов наружного и внутреннего колец. Разъяснение этого и подобных недоразумений дается приводимой в настоящей заметке теоремой, которой автор не обнаружил в известных ему руководствах и работах.

Теорема. Последовательность поворотов $\boldsymbol{\theta}_1$, $\boldsymbol{\theta}_2$ на углы φ_1, φ_2 вокруг наперед фиксированных осей эквивалентна последовательности поворотов $\boldsymbol{\theta}_2$ и повороту на угол φ_1 вокруг оси, в которую переходит ось поворота $\boldsymbol{\theta}_1$ при повороте $\boldsymbol{\theta}_2$.

Доказательство. Наряду с последовательностью поворотов (4) рассмотрим последовательность

$$\boldsymbol{\theta}_1'=\boldsymbol{\theta}_2, \qquad \boldsymbol{\theta}_2'=2\mathbf{e}_1'\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2} \tag{6}$$

где $\mathbf{e}_1'$ — единичный вектор, в который преобразуется $\mathbf{e}_1$ при повороте $\boldsymbol{\theta}_1'=\boldsymbol{\theta}_2$.

Согласно формуле (1) имеем

$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \frac{1}{1+{}^1/_4\boldsymbol{\Theta}_2^2}\boldsymbol{\Theta}_2\times\left(\mathbf{e}_1 + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\Theta}_2\times\mathbf{e}_1\right)$$

Отсюда по (2) и (3) получаем

$$\boldsymbol{\Theta}_2' = \boldsymbol{\Theta}_1 + \frac{1}{1+{}^1/_4\boldsymbol{\Theta}_2^2}\boldsymbol{\Theta}_2\times\left(\boldsymbol{\Theta}_1 + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\Theta}_2\times\boldsymbol{\Theta}_1\right) = \boldsymbol{\Theta}_1 + \frac{1-{}^1/_4\boldsymbol{\Theta}_1\cdot\boldsymbol{\Theta}_2}{1+{}^1/_4\boldsymbol{\Theta}_2^2}\boldsymbol{\Theta}_2\times\boldsymbol{\Theta}_{12} \tag{7}$$

Здесь использована возможность внести в выражение, стоящее в скобках, вектор $\boldsymbol{\Theta}_2$.

Результирующий поворот $\boldsymbol{\Theta}_{12}'$ последовательности (6) находим по (3). Отметим прежде всего, что по (7)

$$\boldsymbol{\Theta}_1'\cdot\boldsymbol{\Theta}_2' = \boldsymbol{\Theta}_2\cdot\boldsymbol{\Theta}_2' = \boldsymbol{\Theta}_2\cdot\boldsymbol{\Theta}_1$$

Поэтому

$$\boldsymbol{\Theta}_{12}' = \frac{1}{1-{}^1/_4\boldsymbol{\Theta}_1\cdot\boldsymbol{\Theta}_2}\left(\boldsymbol{\Theta}_1' + \boldsymbol{\Theta}_2' + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\Theta}_2'\times\boldsymbol{\Theta}_1'\right) = \frac{1}{1-{}^1/_4\boldsymbol{\Theta}_1\cdot\boldsymbol{\Theta}_2}\Big[\boldsymbol{\Theta}_2 + \boldsymbol{\Theta}_1 +$$
$$+ \frac{1-{}^1/_4\boldsymbol{\Theta}_1\cdot\boldsymbol{\Theta}_2}{1+{}^1/_4\boldsymbol{\Theta}_2^2}\boldsymbol{\Theta}_2\times\boldsymbol{\Theta}_{12} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\Theta}_1\times\boldsymbol{\Theta}_2 + \tfrac{1}{2}\frac{1-{}^1/_4\boldsymbol{\Theta}_1\cdot\boldsymbol{\Theta}_2}{1+{}^1/_4\boldsymbol{\Theta}_2^2}(\boldsymbol{\Theta}_2\times\boldsymbol{\Theta}_{12})\times\boldsymbol{\Theta}_2\Big]$$

Снова, применив (3), получим

$$\boldsymbol{\Theta}_{12}' = \boldsymbol{\Theta}_{12} - \frac{1}{(1-{}^1/_4\boldsymbol{\Theta}_1\cdot\boldsymbol{\Theta}_2)(1+{}^1/_4\boldsymbol{\Theta}_2^2)}\boldsymbol{\Theta}_2\times\Big[\left(1+\tfrac{1}{4}\boldsymbol{\Theta}_2^2\right)\boldsymbol{\Theta}_1 -$$
$$-\left(1-\tfrac{1}{4}\boldsymbol{\Theta}_1\cdot\boldsymbol{\Theta}_2\right)\left(\boldsymbol{\Theta}_{12} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\Theta}_2\times\boldsymbol{\Theta}_{12}\right)\Big] \tag{8}$$

Остается проверить, что вектор в квадратных скобках колинеарен $\boldsymbol{\Theta}_2$. Действительно, он равен по (3)

$$\boldsymbol{\Theta}_1\left(1+\tfrac{1}{4}\boldsymbol{\Theta}_2^2\right) - \left(\boldsymbol{\Theta}_1 + \boldsymbol{\Theta}_2 + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\Theta}_2\times\boldsymbol{\Theta}_1\right) + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\Theta}_2\times\left(\boldsymbol{\Theta}_1 + \boldsymbol{\Theta}_2 + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\Theta}_2\times\boldsymbol{\Theta}_1\right) =$$
$$= -\boldsymbol{\Theta}_2\left(1-\tfrac{1}{4}\boldsymbol{\Theta}_1\cdot\boldsymbol{\Theta}_2\right)$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{\Theta}'_{12} = \boldsymbol{\Theta}_{12} \tag{9}$$

что и доказывает теорему.

Приведем для иллюстрации два примера. 1. Рассмотрим в момент $t = t_0$ в точке с широтой Φ_0 и восточной долготой λ_0 геоцентрическую систему осей $Oxyz$, направленных по меридиану на север, по параллельному кругу на запад и по восходящей вертикали места. Подобная же система $O_1x_1y_1z_1$ в момент t имеется в точке Φ, λ. Единичные векторы этих систем осей назовем $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ и соответственно $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$. Направление оси мира от южного полюса к северному задается вектором $\mathbf{e}$. Можно осуществить совмещение этих двух систем осей при последовательности поворотов

$$\boldsymbol{\Theta}_1 = 2\mathbf{j}\,\mathrm{tg}\,\frac{\Phi-\Phi_0}{2} \qquad \boldsymbol{\Theta}_2 = 2\mathbf{e}\,\mathrm{tg}\,\frac{\Delta\lambda}{2} \qquad (\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 + U(t-t_0))$$

где U — угловая скорость Земли. Эта последовательность эквивалентна повороту

$$\boldsymbol{\Theta}_{12} = 2\left(\mathbf{j}\,\mathrm{tg}\,\frac{\Phi-\Phi_0}{2} + \mathbf{e}\,\mathrm{tg}\,\frac{\Delta\lambda}{2} + \mathbf{e}\times\mathbf{j}\,\mathrm{tg}\,\frac{\Phi-\Phi_0}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\Delta\lambda}{2}\right)$$

Здесь первый поворот определяет смещение по меридиану λ_0 от параллельного круга Φ_0 на параллельный круг Φ, второй — смещение по этому параллельному кругу на меридиан λ.

Но возможна и другая последовательность: сначала по параллельному кругу Φ_0 на меридиан λ, а потом вдоль этого меридиана на параллельный круг Φ. Ей отвечают повороты

$$\boldsymbol{\theta}_1' = \boldsymbol{\theta}_2 = 2\mathbf{e}\,\mathrm{tg}\,\frac{\Delta\lambda}{2}, \qquad \boldsymbol{\theta}_2' = 2\mathbf{j}_1\,\mathrm{tg}\,\frac{\Phi - \Phi_0}{2}$$

где $\mathbf{j}_1$ — единичный вектор, в который преобразуется $\mathbf{j}$ при повороте $\boldsymbol{\theta}_1'$. Результирующий поворот по (3) равен

$$\boldsymbol{\theta}_{12}' = 2\left(\mathbf{e}\,\mathrm{tg}\,\frac{\Delta\lambda}{2} + \mathbf{j}_1\,\mathrm{tg}\,\frac{\Phi - \Phi_0}{2} + \mathbf{j}_1 \times \mathbf{e}\,\mathrm{tg}\,\frac{\Delta\lambda}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\Phi - \Phi_0}{2}\right)$$

Эквивалентность этих двух последовательностей поворотов, устанавливаемая доказанной теоремой, очевидна. Проверка сводится к доказательству геометрически очевидного равенства

$$\mathbf{j} - \mathbf{j}_1 = (\mathbf{j} + \mathbf{j}_1) \times \mathbf{e}\,\mathrm{tg}\,\frac{\Delta\lambda}{2}$$

2. Ось наружного кольца карданова подвеса установлена по вертикали, ось внутреннего кольца в начальном положении на запад; ось ротора в этом положении расположена в плоскости горизонта и направлена по меридиану на север. В рассмотрение вводятся углы Резаля: α — угол поворота наружного кольца, отсчитываемый по направлению запад—юг, и β — подъем оси ротора над плоскостью горизонта, т. е. угол поворота внутреннего кольца.

Рассмотрим последовательность поворотов

$$\boldsymbol{\theta}_1 = -2\mathbf{j}\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}, \qquad \boldsymbol{\theta}_2 = 2\mathbf{k}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$$

в которой сначала поворачивают внутреннее кольцо вокруг его оси, занимающей начальное положение, а потом это повернутое кольцо вокруг оси наружного кольца. Результирующий поворот определяется вектором

$$\boldsymbol{\theta}_{12} = 2\left(-\mathbf{j}\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2} + \mathbf{k}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} + \mathbf{i}\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right)$$

Вторая последовательность

$$\boldsymbol{\theta}_1' = \boldsymbol{\theta}_2 = 2\mathbf{k}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}, \qquad \boldsymbol{\theta}_2' = -2\mathbf{j}_1\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}$$

соответствует повороту наружного кольца и последующему повороту внутреннего кольца вокруг нового положения $\mathbf{j}_1$ его оси. Очевидно, что

$$\mathbf{j}_1 = \mathbf{j}\cos\alpha - \mathbf{i}\sin\alpha$$

Результирующий поворот будет

$$\boldsymbol{\theta}_{12}' = 2\left(\mathbf{k}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} - \mathbf{j}_1\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2} - \mathbf{j}_1 \times \mathbf{k}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}\right)$$

и тождественность полученных выражений $\boldsymbol{\theta}_{12}$ и $\boldsymbol{\theta}_{12}'$ легко проверяется.

Поступила 1 IV 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Уиттекер. Аналитическая динамика. ОНТИ, М.—Л., 1937, § 9—12.
2. Фрезер, Коллар, Дункан. Теория матриц и ее приложения. ИЛ, 1950, гл. 8.
3. Лойцянский Л. Г. Об одной формуле теории конечного вращения твердого тела. Известия Ленинградского политехнического ин-та, т. 30, 1927, стр. 157—165.