О ВОЗМОЖНОСТИ КВАЗИТВЕРДОГО ВРАЩЕНИЯ ЖИДКОСТИ

С. В. Жак

(Зерновой)

В исследованиях Гафа [1], Пуанкаре [2], Жуковского [3], Слудского [4] о движении тела с полостями, заполненными жидкостью, задача была сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений предположением о том, что вихрь скоростей одинаков для всех частиц жидкости (такое движение назовем «квазитвердым»). Ниже устанавливается, что единственной полостью среди замкнутых полостей вращения, допускающей такое движение, является эллипсоид вращения.

Движение жидкости внутри замкнутой полости (S), движущейся с мгновенной угловой скоростью $\mathbf{\Omega}(t)$, описывается уравнениями Гельмгольца для вихрей (при консервативных силах)

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt}=(\mathbf{H}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} \qquad (\mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{v}) \tag{1}$$

и граничными условиями $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}^\circ=(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})\,\mathbf{n}^\circ$ на S. Здесь $\mathbf{v}$ — скорость частицы жидкости, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки, $\mathbf{n}^\circ$ — орт внешней нормали к S.

Кроме того, в силу несжимаемости $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$.

Скорость $\mathbf{v}$ всегда можно разложить на следующие слагаемые:

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\mathbf{v}_1,\quad \operatorname{rot}\mathbf{v}_0=0,\quad \mathbf{v}_0=\nabla\Phi,\quad \triangle\Phi=0,\quad \operatorname{rot}\mathbf{v}_1=2\mathbf{H},\quad \operatorname{div}\mathbf{v}_1=0 \tag{2}$$

Если движение квазитвердое, то $\mathbf{H}=\mathbf{H}(t)$ и можно считать, что $\mathbf{v}_1=\mathbf{H}\times\mathbf{r}$

Следуя Жуковскому [3], получим

$$\Phi=(\mathbf{\Omega}-\mathbf{H})\cdot\boldsymbol{\psi} \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\psi}$ — функция, определяемая уравнениями

$$\Delta\boldsymbol{\psi}=0 \quad \text{внутри полости,} \qquad \frac{d\boldsymbol{\psi}}{dn}=[\mathbf{r},\,\mathbf{n}^\circ] \quad \text{на } S \tag{4}$$

Эта функция зависит только от формы полости.

Остается удовлетворить уравнению Гельмгольца, которое принимает вид:

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt}=\mathbf{H}\cdot\nabla(\nabla\Phi+\mathbf{H}\times\mathbf{r})=(\mathbf{H}\cdot\nabla)\,\nabla\Phi \tag{5}$$

Так как $\mathbf{H}$ по предположению не зависит от $\mathbf{r}$, то правая часть этого уравнения также не должна зависеть от $\mathbf{r}$, следовательно, необходимым и достаточным условием возможности квазитвердого движения в полости является

$$\nabla(\mathbf{H}\cdot\nabla)\,\nabla\Phi=0 \qquad (\Phi=\mathbf{\Omega}'\cdot\boldsymbol{\psi},\quad \mathbf{\Omega}'=\mathbf{\Omega}-\mathbf{H}) \tag{6}$$

Применяя тензорные обозначения [5], его можно записать в виде

$$\mathbf{H}\cdot\nabla\nabla\nabla\boldsymbol{\psi}\cdot\mathbf{\Omega}'\equiv\nabla^3\boldsymbol{\psi}\,..\,\mathbf{\Omega}'H=0 \tag{7}$$

В произвольно выбранной прямоугольной декартовой системе оно имеет вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}(\nabla\boldsymbol{\psi}\,...\,\mathbf{\Omega}'H)=0 \qquad (\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ 3) \tag{8}$$

Поэтому

$$\nabla\boldsymbol{\psi}\,..\,\mathbf{\Omega}'\mathbf{H}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}+b \tag{9}$$

(вектор $\mathbf{a}$ и скаляр b зависят только от времени).

Ограничимся случаем поверхностей вращения и введем цилиндрическую систему координат $r,\ \varphi,\ z$ (ось Oz направлена по оси симметрии, координатные орты $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3$). В этой системе координат функция $\boldsymbol{\psi}$ примет вид:

$$\boldsymbol{\psi}=F(r,\,z)\,\mathbf{e}_2 \qquad (\Delta\boldsymbol{\psi}=0) \tag{10}$$

а граничное условие дает нам [3]

$$\frac{dz}{dr}=-\frac{\partial F/\partial z+r}{z-\partial F/\partial r} \tag{11}$$

т. е. по заданной функции F можно одной квадратурой найти уравнение поверхности S полости $z=z(r)$.

Условие (9) после проведения выкладок примет вид:

$$\Delta_1\left(\frac{F}{r}-\frac{\partial F}{\partial r}\right)\sin 2\varphi+\Delta_2\left(\frac{F}{r}-\frac{\partial F}{\partial r}\right)\cos 2\varphi+\Delta_3\left(\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{F}{r}\right)-$$
$$-H_3\frac{\partial F}{\partial z}(\Omega_1'\cos\varphi+\Omega_2'\sin\varphi)=r(a_1\cos\varphi+a_2\sin\varphi)+a_3z+b \qquad (12)$$

Здесь

$$\Delta_1=\frac{1}{2}(H_2\Omega_2'-H_1\Omega_1'),\qquad \Delta_2=\frac{1}{2}(H_1\Omega_2'+H_2\Omega_1'),\qquad \Delta_3=\frac{1}{2}(H_1\Omega_2'-H_2\Omega_1')$$

причем H_1, H_2, H_3, Ω_1', Ω_2', Ω_3', a_1, a_2, a_3 — проекции векторов $\mathbf{H}$, $\boldsymbol{\Omega}'$, $\mathbf{a}$ на прямоугольные оси координат, связанные с полостью, а поэтому зависят только от времени. Так как это равенство должно иметь место для любых φ, то

$$\Delta_1\left(\frac{F}{r}-\frac{\partial F}{\partial r}\right)=0,\quad \Delta_2\left(\frac{F}{r}-\frac{\partial F}{\partial r}\right)=0,\quad \Delta_3\left(\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{F}{r}\right)=a_3z+b \qquad (13)$$
$$H_3\Omega_1'\frac{\partial F}{\partial z}=-a_1r,\qquad H_3\Omega_2'\frac{\partial F}{\partial z}=-a_2r$$

Подробно рассмотрение всех (восьми) систем уравнений, на которые распадается система (13), показывает, что основными являются два случая:

$$\frac{\partial F}{\partial r}-\frac{F}{r}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial r}+\frac{F}{r}=k_1z+k_2,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=k_3r\quad (k_{1,2,3}=\text{const})$$

или же

$$\Delta_1=0,\quad \Delta_2=0,\quad \Delta_3=0,\quad H_3\Omega_1'=0,\quad H_3\Omega_2'=0$$

остальные же по сравнению с ними ничего нового не дают. В первом случае $F=k_3rz+{}^1/_2k_2r$ $(k_1=2k_3)$ и по формуле (11) уравнение поверхности полости должно быть

$$\frac{dz}{dr}=\frac{(k_3+1)r}{(k_3-1)z+{}^1/_2k_2}$$

Полагая ${}^1/_2k_2=-(k_3-1)d$, $k_3=\varepsilon$, получим

$$\frac{dz}{dr}=\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}\frac{r}{z-d}\quad\text{или}\quad (z-d)^2+\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}r^2=\text{const}=c \qquad (14)$$

т. е. образующая нашей поверхности вращения должна быть кривой второго порядка, а поскольку полость должна быть замкнутой (конечной), то это эллипсоид вращения ($|\varepsilon|<1$, $c>0$). Во втором случае поверхность может быть любой, но движение вполне определенно, так как

$$H_3\Omega_1'=0,\qquad H_1\Omega_2'=0,\qquad H_3\Omega_2'=0,\qquad H_2\Omega_1'=0,\qquad H_1\Omega_1'=H_2\Omega_3'$$

Исследование возможных при этом движений показывает, что это «спящий волчок», т. е. движение симметричного гироскопа вокруг своей вертикальной оси симметрии. Итак, если исключить случай «спящего волчка», то квазитвердое вращение жидкости в осесимметричной замкнутой полости под действием консервативных сил возможно лишь в том случае, если полость есть эллипсоид вращения.

Если не ограничиваться конечными, замкнутыми полостями, то квазитвердое вращение жидкости возможно также внутри бесконечного круглого конуса, параболоида и гиперболоидов вращения. Из несимметричных тел такое движение возможно для полости в виде трехосного эллипсоида [2], так как для него $\nabla\nabla\nabla\psi=0$, однако вопрос единственности ее пока открыт.

Поступила 11 VI 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Hough. The Oscillations of a Rotating Ellipsoidal Shell containing Fluid. Phil. Trans. A., CLXXXVI, 1895.
2. Poincaré H. Sur la precession des corps déformables. Bull. Astr., XXVII, 1910.
3. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч., т. III. ОНТИ НКТП, 1936.
4. Sloudsky Th. De la rotation de la terre supposée fluide á son interieur. Moscou, 1895.
5. Лагалли. Векторное исчисление. ОНТИ НКТП, 1937.