О ТЕЧЕНИЯХ С ВЫРОЖДЕННЫМ ГОДОГРАФОМ

О. С. Рыжов
(Москва)

Геометрические свойства трехмерных течений газа, изображением которых в пространстве годографа скорости является кривая или поверхность, изучались А. А. Никольским[1, 2,5]. В настоящей заметке мы выясняем связь обоих этих классов течений между собой и с теорией характеристик дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа.

§ 1. Уравнения движения изэнтропических установившихся течений совершенного газа в декартовой системе координат имеют вид:

$$\begin{gathered}
u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{2a}{\varkappa-1}\frac{\partial a}{\partial x}=0\\
u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{2a}{\varkappa-1}\frac{\partial a}{\partial y}=0\\
u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{2a}{\varkappa-1}\frac{\partial a}{\partial z}=0\\
a\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{2}{\varkappa-1}\left(u\frac{\partial a}{\partial x}+v\frac{\partial a}{\partial y}+w\frac{\partial a}{\partial z}\right)=0
\end{gathered}\tag{1.1}$$

где a — скорость звука, $\varkappa$ — показатель адиабаты Пуассона, u, v, w — проекции вектора скорости $\mathbf{V}$ соответственно на оси x, y, z.

Мы будем рассматривать двойные волны, т. е. течения, у которых только два параметра независимые, а другие два являются их функциями. Принимая за независимые параметры u и v, т. е. считая $w=w(u,v)$, $a=a(u,v)$, и полагая в дальнейшем поток безвихревым, т. е. $\operatorname{rot}\mathbf{V}=0$, из системы (1.1) можно получить следующие два уравнения:

$$p\frac{\partial u}{\partial x}+r\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+q\frac{\partial v}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}\tag{1.2}$$

$$p=1+w_u^2-\frac{4}{(\varkappa-1)^2}a_u^2,\qquad q=1+w_v^2-\frac{4}{(\varkappa-1)^2}a_v^2,\qquad r=w_uw_v-\frac{4}{(\varkappa-1)^2}a_u a_v$$

Здесь и в дальнейшем индексами u и v обозначено частное дифференцирование. Воспользовавшись законом Бернулли

$$u+ww_u+\frac{2a}{\varkappa-1}a_u=0,\qquad v+ww_v+\frac{2a}{\varkappa-1}a_v=0\tag{1.3}$$

уравнения (1.2) можно привести к виду

$$P\frac{\partial u}{\partial x}+R\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+Q\frac{\partial v}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}\tag{1.4}$$

$$P=1+w_u^2-\frac{(u+ww_u)^2}{a^2},\qquad Q=1+w_v^2-\frac{(v+ww_v)^2}{a^2}\tag{1.5}$$

$$R=w_uw_v-\frac{uv+wvw_u+wuw_v+w^2w_uw_v}{a^2}$$

Здесь функцию w и обе ее частные производные w_u и w_v надо рассматривать как заданные функции u и v.

Поскольку каждая плоскость физического пространства $z=\mathrm{const}$ отображается в пространстве годографа на одну и ту же рассматриваемую нами поверхность Σ, в уравнениях (1.4) можно выбрать в качестве независимых переменных u и v, а x и y рассматривать как их функции. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y_v\Delta,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-x_v\Delta,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=x_u\Delta,\qquad \Delta=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\tag{1.6}$$

и из уравнений (1.4) получим

$$Qx_u-2Rx_v+Py_v=0\tag{1.7}$$

Введем теперь, следуя А. А. Никольскому[2], функцию размещения χ

$$\chi=ux+vy+wz-\varphi\qquad \left(u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ v=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\ w=\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\tag{1.8}$$

Вычисляя ее дифференциал $d\chi = (x + zw_u)\, du + (y + zw_v)\, dv$, можно видеть, что χ является функцией только u и v, причем

$$\chi_u = x + zw_u, \qquad \chi_v = y + zw_v \tag{1.9}$$

Дифференцируя равенства (1.9) при $z = \mathrm{const}$, получим

$$x_u = \chi_{uu} - zw_{uu}, \qquad x_v = \chi_{uv} - zw_{uv}, \qquad y_v = \chi_{vv} - zw_{vv} \tag{1.10}$$

Подставляя соотношения (1.10) в уравнение (1.7), получим, приравнивая нулю члены при z в нулевой степени и члены при z в первой степени, два уравнения, определяющие функции w и χ [2]:

$$Qw_{uu} - 2Rw_{uv} + Pw_{vv} = 0, \qquad Q\chi_{uu} - 2R\chi_{uv} + P\chi_{vv} = 0 \tag{1.11}$$

где P, Q и R — функции u, v, w, w_u, w_v согласно (1.5)

§ 2. Предполагая выполненными условия существования характеристик у первого уравнения (1.11), которые мы будем называть Г-характеристиками, напишем определяющее их дифференциальное уравнение

$$Q\,(dv)^2 + 2R du dv + P\,(du)^2 = 0 \tag{2.1}$$

Это уравнение, принимая во внимание (1.5), можно представить в виде

$$(du)^2 + (dv)^2 + (w_u du + w_v dv)^2 - \frac{[u du + w\,(w_u du + w_v dv) + v dv]^2}{a^2} = 0 \tag{2.2}$$

Учитывая, что вдоль рассматриваемой нами поверхности Σ выполняется равенство $dw = w_u du + w_v dv$, из уравнения (2.2) имеем

$$(du)^2 + (dv)^2 + (dw)^2 - \frac{(u du + v du + w dw)^2}{a^2} = 0 \tag{2.3}$$

Уравнение (2.3) определяет характеристические кривые S_+ и S_- на поверхности Σ, по форме оно совпадает с уравнением, определяющим кривые в пространстве годографа скорости, когда течение в физическом пространстве представляет собой простую волну[1]. Таким образом, кривые, описывающие простые волны, являются характеристическими кривыми на поверхностях, на которые отображаются течения в пространстве годографа, когда они представляют собой двойные волны. Отсюда следует, что течение, являющееся в некоторой области пространства xyz простой волной, может быть продолжено в соседней области в виде произвольной двойной волны, поскольку задача Коши для характеристических кривых является неопределенной.

Заметим теперь, что уравнение Г-характеристик (2.1) может быть получено непосредственно как уравнение характеристик в плоскости u, v уравнений (1.4), так как последние являются приводимыми[3]. Соответствующее уравнение для обоих семейств C-характеристик в плоскости xy запишется в виде

$$P\,(dy)^2 - 2R dy dx + Q\,(dx)^2 = 0 \tag{2.4}$$

которое можно рассматривать как уравнение, определяющее линии пересечения характеристических поверхностей в пространстве xyz плоскостями $z = \mathrm{const}$.

Для обоих семейств характеристик в плоскостях xy и uv остается справедливым основное свойство линий Маха и эпициклоид плоских течений, а именно, направления C_+ и Γ_- и C_- и Γ_+, проведенные через соответствующие точки xy и uv, взаимно перпендикулярны. Это свойство следует непосредственно из вида уравнений (2.1) и (2.4). Но Г-характеристики являются проекциями S-характеристик на плоскость uv, поэтому и сами S-характеристики перпендикулярны C-кривым соответствующих семейств.

Как показал А. А. Никольский[2], каждой точке поверхности Σ соответствует некоторая прямая в пространстве xyz, на которой вектор скорости $\mathbf{V}$ остается постоянным. Поэтому каждой S-характеристике соответствует в физическом пространстве своя линейчатая характеристическая поверхность. Далее, каждый луч с постоянным значением вектора скорости на нем параллелен нормали к поверхности Σ, проведенной через соответствующую точку этой поверхности[2], т. е.

каждая S-характеристика перпендикулярна такому лучу. Отсюда следует, если учесть еще ортогональность S-характеристик соответствующим C-характеристикам, что направление S-характеристик совпадает с направлением нормали к характеристическим поверхностям в физическом пространстве. Последнее свойство станет естественным, если записать уравнение (2.3) в виде

$$V^2 \cos^2 (\mathbf{V}, \mathbf{S}) = a^2 \qquad (2.5)$$

к которому можно свести и уравнение характеристических поверхностей $z = \psi(x, y)$:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + 1 - \frac{1}{a^2}\left(u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} - w\right)^2 = 0 \qquad (2.6)$$

Действительно, из (2.6) следует $V^2 \cos^2 (\mathbf{V}, \mathbf{n}) = a^2$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к характеристической поверхности.

Каждая кривая, определяемая уравнением (2.3), может быть построена нанесением эпициклоиды на плоскость, полученную развертыванием произвольной линейчатой конической поверхности, центром коничности которой является начало координат в пространстве годографа, с последующим восстановлением исходной поверхности [1]. Набором этих кривых могут быть получены поверхности, которые соответствуют течениям типа двойных волн; причем S-характеристики должны принадлежать различным коническим поверхностям. Чтобы пояснить последнее, рассмотрим течение в сопле Буземана [4], считая для определенности, что ось конической поверхности в пространстве годографа, соответствующей этому течению, совпадает с осью w. Поскольку нами показано, что Σ-поверхности состоят из S-характеристик, то ясно, что и коническая поверхность в пространстве годографа, на которую отображается течение Буземана, состоит из S-характеристик, которые на нее навиваются. Но в этом случае очевидна принадлежность различных S-характеристик различным коническим развертывающимся поверхностям с центром коничности в начале координат.

Таким образом, мы находим много аналогичных свойств у плоских и пространственных вырожденных течений, однако одно из основных свойств плоских течений, гласящее, что к области постоянного течения может примыкать только простая волна [3], в пространственном случае не имеет места. Последнее связано с тем обстоятельством, что в первом случае через каждую точку в физической плоскости и в плоскости годографа проходят по две характеристики, а во втором случае каждой точке пространства соответствует характеристический конус.

§ 3. Рассмотрим неустановившиеся безвихревые изэнтропические течения совершенного газа. В этом случае уравнения движения допускают первый интеграл (интеграл Коши):

$$\lambda + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{a^2}{\varkappa - 1} = \mathrm{const} \qquad (3.1)$$

где

$$\lambda = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \left(\begin{array}{c}\varphi = \varphi(t, x, y, z) — \\ \text{потенциал скорости}\end{array}\right)$$

Кроме того, в этом случае в уравнение неразрывности надо добавить частную производную от скорости звука по времени:

$$\frac{2}{\varkappa - 1}\left(\frac{\partial a}{\partial t} + u \frac{\partial a}{\partial x} + v \frac{\partial a}{\partial y} + w \frac{\partial a}{\partial z}\right) + a\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \qquad (3.2)$$

Мы снова будем рассматривать двойные волны, т. е. будем считать, что среди искомых функций лишь две u и v являются независимыми. Из соотношения (3.1) следует тогда, что λ также зависит только от u и v. Таким образом, считая $w = w(u, v)$, $a = a(u, v)$, $\lambda = \lambda(u, v)$, принимая по-прежнему $\operatorname{rot} \mathbf{V} = 0$ и учитывая равенства

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} \qquad (3.3)$$

уравнение неразрывности можно преобразовать к виду

$$\left[\frac{2}{\varkappa-1}(a_u\lambda_u+ua_u+wa_uw_u)+a(1+w_u^2)\right]\frac{\partial u}{\partial x}+$$
$$+\left\{\frac{2}{\varkappa-1}[a_u\lambda_v+a_v\lambda_u+ua_v+va_u+w(a_uw_v+a_vw_u)]+2aw_uw_v\right\}\frac{\partial u}{\partial y}+$$
$$+\left[\frac{2}{\varkappa-1}(a_v\lambda_v+va_v+wa_vw_v)+a(1+w_v^2)\right]\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{3.4}$$

Отсюда, используя соотношения

$$\lambda_u+u+ww_u+\frac{2a}{\varkappa-1}a_u=0,\qquad \lambda_v+v+ww_v+\frac{2a}{\varkappa-1}a_v=0 \tag{3.5}$$

и присоединяя к уравнению неразрывности условие отсутствия вихрей, получим уравнения, которые будут совпадать по форме с уравнениями (1.4), полученными при исследовании двойных волн установившихся движений газа.

Так как каждая гиперплоскость $z=\mathrm{const}$, $t=\mathrm{const}$ четырехмерного пространства $xyzt$ отображается в пространстве $uvwa$ на одну и ту же гиперповерхность Σ, задаваемую равенствами $w=w(u, v)$, $a=a(u, v)$, можно в уравнениях (1.2) выбрать в качестве независимых переменных u и v, а x и y рассматривать как их функции.

При этом равенства (1.6) остаются справедливыми и мы имеем

$$p\frac{\partial y}{\partial v}-2r\frac{\partial x}{\partial v}+q\frac{\partial x}{\partial u}=0 \tag{3.6}$$

где p, q и r — согласно (1.2).

Введем теперь по аналогии с результатами § 1 функцию $\chi=\chi(u, v)$, определив ее при помощи равенства

$$d\chi=(x+zw_u+t\lambda_u)\,du+(y+zw_v+t\lambda_v)\,dv \tag{3.7}$$

Отсюда следует, что

$$\chi_u=x+zw_u+t\lambda_u,\qquad \chi_v=y+zw_v+t\lambda_v \tag{3.8}$$

Дифференцируя (3.8) при $z=\mathrm{const}$, $t=\mathrm{const}$, получим

$$x_u=\chi_{uu}-zw_{uu}-t\lambda_{uu},\qquad y_v=\chi_{vv}-zw_{vv}-t\lambda_{vv},\qquad x_v=\chi_{uv}-zw_{uv}-t\lambda_{uv} \tag{3.9}$$

Подставляя соотношения (3.9) в уравнение (3.6), получим, приравнивая нулю члены при z, члены при t и члены, не содержащие ни z, ни t, три уравнения, которые определяют w, λ, и χ; эти уравнения аналогичны уравнениям (1.11)

$$p\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}-2r\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+q\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0,\qquad p\frac{\partial^2 \lambda}{\partial v^2}-2r\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\partial v}+q\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2}=0 \tag{3.10}$$

$$p\frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2}-2q\frac{\partial^2 \chi}{\partial u\partial v}+r\frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2}=0 \tag{3.11}$$

где p, q и r — согласно (1.2). В уравнениях (3.10) обе частные производные функции $a(u, v)$ a_u и a_v надо выразить через частные производные функций $\lambda(u, v)$ и $w(u, v)$ при помощи равенств (3.5), так как эти уравнения описывают изображение течения в пространстве $uvw\lambda$. После такой замены система уравнений (3.10) может быть проинтегрирована, а затем интегрируется уравнение (3.11).

Построение течения в физическом пространстве $xyzt$, которое отображается на рассмотренную гиперповерхность $L: w=w(u, v)$, $\lambda=\lambda(u, v)$, осуществляется аналогично тому, как это было проделано А. А. Никольским при исследовании двойных волн установившихся движений[2]. Фиксируя z и t, выбираем в соответствии с равенствами (3.8) для различных значений u и v различные значения x и y, т. е. ставим в соответствие каждой точке M изображающей поверхности определенную точку ξ рассматриваемой плоскости $z=\mathrm{const}$ в определенный момент времени $t=t_*$. Полагая в точке ξ величины u, v, w, λ равными их значениям в точке M гиперповерхности L и меняя значения z и t, построим течение в некоторой трехмерной области в различные моменты времени. Значение скорости звука a в точке ξ надо выбрать при этом в соответствии с формулой (3.1). Можно показать, что построенное течение удовлетворяет уравнениям безвихренности, уравнениям движения и неразрывности. При фиксированных u, v и t каждое из уравнений (3.8) определяет плоскость, пересечение этих плоскостей дает прямую, на которой вектор скорости $\mathbf{V}$, а также давление, плотность и скорость звука постоянны. Вся область течения представляет собой в каждый момент времени совокупность таких прямых, каждая прямая отвечает точке в пространстве $uvw\lambda$.

§ 4. Поскольку коэффициенты при производных w_{uu}, λ_{uu}; w_{uv}, λ_{uv}; w_{vv}, λ_{vv} в обоих уравнениях (3.11) одинаковые, то через каждую точку интегральной поверхности $w = w(u, v)$, $\lambda = \lambda(u, v)$ проходят (в случае их существования) только две характеристические кривые.

Напишем дифференциальное уравнение, определяющее их проекции на плоскость uv:

$$p(du)^2 + 2rdudv + q(dv)^2 = 0 \tag{4.1}$$

Эти проекции мы будем по-прежнему называть Г-характеристиками.

Учитывая, что вдоль рассматриваемой нами гиперповерхности L выполняются равенства

$$dw = w_u du + w_v dv, \qquad d\lambda = \lambda_u du + \lambda_v dv$$

и заменяя обе частные производные функции $a(u, v)$ через производные функции $w(u, v)$ и $\lambda(u, v)$ при помощи равенств (3.5), из уравнения (4.1) получим соотношение, определяющее характеристические кривые на поверхности L:

$$a^2[(du)^2 + (dv)^2 + (dw)^2] = (d\lambda + udu + vdv + wdw)^2 \tag{4.2}$$

откуда можно вывести равенство, описывающее характеристические кривые S_+ и S_- на поверхности Σ, т. е. в пространстве $uvwa$:

$$du^2 + (dv)^2 + (dw)^2 = \frac{4}{(\varkappa - 1)^2}(da)^2 \tag{4.3}$$

Дифференциальное соотношение (4.3) совпадает с равенством, определяющим кривые в пространстве годографа, на которые отображаются нестационарные течения типа простых волн [5]. Поэтому двойные волны можно получить и в нестационарном случае, строя поверхности в пространстве годографа набором кривых, определяющих простые волны. В области, граничной с простой волной, можно снова продолжать течение в виде произвольной двойной волны.

Уравнение (4.1) можно было бы получить и непосредственно как уравнение характеристик в плоскости uv системы уравнений (1.4); уравнение, определяющее оба семейства C-характеристик в плоскости xy, будет иметь вид:

$$p(dy)^2 - 2rdxdy + q(dx)^2 = 0 \tag{4.4}$$

Отсюда следует по-прежнему, что направления C_+ и Γ_- и C_- и Γ_+, проведенные через соответствующие точки, взаимно перпендикулярны.

Поскольку при фиксированном t каждой точке пространства $uvwa$ отвечает прямая в пространстве xyz, то каждой S-характеристике соответствует своя линейчатая поверхность в физическом пространстве с постоянным значением вектора скорости вдоль каждой прямой линии на ней. Это свойство продолжает оставаться справедливым и в случае неустановившихся движений газа.

Поступила 10 I 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский А. А. Некоторые точные решения уравнений пространственных течений газа. Труды ЦАГИ, 1949.
2. Никольский А. А. О классе адиабатических течений газа, которые в пространстве годографа скорости изображаются поверхностями. Труды ЦАГИ, 1949.
3. Курант Р. и Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. ИЛ, 1950.
4. Busemann A. Die achsensymmetrische kegelige Überschallströmung, Luftfahrtforschung, Bd. XIX, 1942.
5. Никольский А. А. Обобщение волн Римана на случай пространства. Труды ЦАГИ, 1949.