Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОСЦИЛЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА КОЛЕБАНИЙ ПРОДОЛЬНО СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

А. С. Кондратьев, З. С. Чайкина

(Куйбышев)

Задача о собственных колебаниях стержня приводится к однородному интегральному уравнению, ядром которого является функция влияния прогибов данного стержня. Принадлежность функции влияния стержня, не сжатого осевой нагрузкой, к классу осцилляционных ядер доказана М. Г. Крейчом[1].

Доказательство осцилляционности функции влияния $H(x, s, P)$ стержня, сжатого произвольной кусочно-непрерывной осевой нагрузкой $Pf(x)$, для некоторых случаев закрепления концов стержня дано А. С. Меляховецким[2].

Ниже показано, что функция влияния $H(x, s, p)$ сжатого стержня является осцилляционной при всех способах закрепления концов стержня и для всех P, не превосходящих определенной границы.

§ 1. Рассмотрим прямолинейный стержень длины l, сжатый осевой нагрузкой $Pf(x)$, где $f(x)$ — кусочно-непрерывная положительная функция во всем интервале изменения x. Ось x направляется по стержню, а начало отсчета — на левом конце стержня. Чтобы не происходила потеря устойчивости от действия продольной нагрузки, надо считать, что P должно быть меньше первой критической силы для данного способа закрепления концов.

Если при действии продольной осевой нагрузки прямолинейная форма равновесия стержня остается устойчивой, то для доказательства осцилляционности функции влияния достаточно показать, что прогиб $y(x)$ под действием n сосредоточенных поперечных сил меняет свой знак не более $n - 1$ раз. Это показано М. Г. Крейном[1].

Известно, что осевая нагрузка $Pf(x)$, действующая на стержень, вызывает такую же деформацию, как сплошная моментная нагрузка, интенсивность которой $m(x)$ определяется по формуле[3]

$$m(x) = Pf(x)\,y'(x) \tag{1.1}$$

Вследствие этого прогиб сжатого стержня под действием n поперечных и сосредоточенных сил удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$[EIy''(x)]' + Pf(x)\,y'(x) = Q(x) \tag{1.2}$$

где $EI(x)$ — изгибная жесткость стержня и $Q(x)$ — кусочно-постоянная функция, которой определяется перерезывающая сила от действия поперечной нагрузки.

Рассмотрим предварительно случаи, когда один конец стержня жестко закреплен, а на другом нет связи, препятствующей его перемещению. В этих случаях $Q(x)$ может менять знак в интервале $(0, l)$ не более $n - 1$ раз, и при отсутствии поперечной нагрузки она обращается в нуль.

Возьмем, например, консоль. В этом случае функция $z(x) = y'(x)$ определяется неоднородной краевой задачей

$$[EIz'(x)]' + Pf(x)\,z(x) = Q(x), \qquad z(0) = z'(l) = 0 \tag{1.3}$$

Решая ее, находим

$$z(x) = \int_0^l Q(\xi)\,\Gamma(x, \xi, P)\,d\xi \tag{1.4}$$

где $\Gamma(x, \xi, P)$ — резольвента функции Грина однородной краевой задачи (1.3), т. е. при $Q(x) \equiv 0$

$$[EIz'(x)]' + Pf(x)z(x) = 0, \qquad z(0) = z'(l) = 0 \tag{1.5}$$

Функция $\Gamma(x, \xi, P)$ является осцилляционной для значений P, меньших первого собственного значения P_1 задачи (1.5). Но, как известно, в этом случае число знакоперемен $z(x)$, которое определяется формулой (1.4), не должно превосходить числа знакоперемен $Q(x)$. Таким образом, для консоли внутри интервала $(0, l)$ функция $z(x)$ имеет число знакоперемен не более $n-1$. Тогда, согласно теореме Ролля, в замкнутом интервале $y(x)$ будет иметь нулей не более n, один из которых находится на конце $x=0$. Стало быть, внутри интервала $y(x)$ не меняет знака более чем $n-1$ раз, что и нужно для осцилляционности $H(x, s, P)$.

Эти рассуждения повторяются и для случая, когда один конец стержня закреплен, а другой жестко или упруго защемлен.

Заметим, что если на незакрепленный конец стержня будет действовать только одна сосредоточенная поперечная сила, то перемещение этого конца должно совпадать с направлением силы. Это есть следствие того, что $H(x, s, P)$ является осцилляционной функцией. Далее это замечание будет использовано.

§ 2. Рассмотрим теперь более общий случай граничных условий, когда оба конца имеют одновременно жесткую опору и упругое защемление:

$$[EIy''(x) - \sigma_0 y'(x)]_{x=0} = 0, \quad [EIy''(x) + \sigma_1 y'(x)]_{x=l} = 0, \quad y(0) = y(l) = 0 \tag{2.1}$$

При таких граничных условиях функция $z(x) = y'(x)$ определяется неоднородной краевой задачей вида

$$[EIz'(x)]' + Pf(x)z(y) = Q(x)$$
$$[EIz'(x) - \sigma_0 z(x)]_{x=0} = 0, \qquad [EIz'(x) + \sigma_1 x(x)]_{x=1} = 0 \tag{2.2}$$

причем $Q(x)$ будет иметь число знакоперемен не более n. Задача (2.2) решается формулой вида (1.4). Как и в предыдущем случае, $\Gamma(x, \xi, P)$ — резольвента функции Грина однородной краевой задачи только с иными граничными условиями. При P, меньших первого собственного значения однородной задачи, резольвента является осцилляционной, поэтому $y'(x)$ в интервале $(0, l)$ меняет знак не более n раз и функция $y(x)$ в замкнутом интервале обращается в нуль не более $n+1$ раза. Приняв во внимание два нуля на концах, приходим к выводу, что $y(x)$ внутри интервала меняет знак не более чем $n-1$ раз.

Результат для случая шарнирно закрепленных концов можно получить из (2.1) путем предельного перехода, устремив коэффициенты σ к нулю. Если σ сделать равными бесконечности (y' обращается в нуль), то получается случай жестко закрепленных концов.

§ 3. Перейдем к анализу самого общего случая граничных условий

$$[(EIy''(x))' + H_0 y(x)]_{x=0} = 0, \qquad [EIy''(x) - \sigma_0 y'(x)]_{x=0} = 0 \tag{3.1}$$

$$[(EIy''(x))' - H_1 y(x)]_{x=l} = 0, \qquad [EIy''(x) + \sigma_1 y'(x)]_{x=l} = 0 \tag{3.2}$$

И в этом случае $y'(x)$ определяется формулой вида (1.4), а $\Gamma(x, \xi, P)$ при $P < P_1$ является осцилляционной и должна удовлетворять измененным граничным условиям.

Здесь при решении вопроса о максимальном числе знакоперемен прогиба $y(x)$ воспользуемся доказанной М. Г. Крейном теоремой: если производная $y'(x)$ непрерывна в замкнутом интервале $(0, l)$ и имеет внутри него n узловых мест, то функция $y(x)$ имеет в том же замкнутом интервале не более n нулевых мест при выполнении хотя бы одного из условий

$$y(0)\, y'(0) > 0, \qquad y(l)\, y'(l) < 0 \tag{3.3}$$

и не более $n-1$ нулевого места при одновременном выполнении обоих этих условий.

В самом общем случае надо считать числа $y(0)$, $y(l)$, $y'(0)$, $y'(l)$ отличными от нуля.

Как и в предыдущих случаях, согласно формуле (1.4) функция $y'(x)$ меняет знак не более чем n раз.

Если окажется, что одновременно соблюдаются условия (3.3), то тогда в силу теоремы Ролля прогиб $y(x)$ будет иметь число знакоперемен не более $n-1$ раз. Разберем другие возможные случаи.

Пусть

$$y(0)\,y'(0) < 0, \qquad y(l)\,y'(l) < 0 \tag{3.4}$$

На основании (3.1) в ряде чисел

$$(EIy'')'_{x=0}, \qquad (EIy'')_{x=0}, \qquad y'(x)_{x=0}, \qquad y_{x=0} \tag{3.5}$$

есть два постоянства знака. Без нарушения общности рассуждения можно считать $y(0) > 0$, тогда $y'(0) < 0$ и, следовательно, прогиб в окрестности точки $x = 0$ убывает. При двух постоянствах знака в ряду чисел (3.5) и при $y(0) > 0$ должны непременно соблюдаться неравенства

$$y''(0) < 0, \qquad (EIy'')'_{x=0} < 0$$

поэтому из уравнения (1.2) находим $Q(0) < 0$. Обозначим теперь через ξ точку, в которой $y'(x)$ обращается первый раз в нуль при возрастании x от нуля.

Кроме того, будем считать, что $y(\xi) \geqslant 0$. В этом случае в интервале $(0, \xi)$ функции $y(x)$ и $y'(x)$ не меняют знака.

Если связь, создающая реакцию на конце стержня, заменяется силой, то отрезок стержня длиною ξ окажется в условиях сжатой консоли и для него функция влияния осцилляционна; поэтому при отсутствии сосредоточенных сил внутри интервала $(0, \xi)$ выделенный нами случай исключается, так как прогиб не совпадает с направлением силы $Q(0)$, чего не должно быть.

Такой случай окажется возможным, когда по крайней мере в одной точке $\xi_1 < \xi$ приложена сила F_1.

Считая это так и применяя формулу (1.4) для отрезка стержня длины $l-\xi$, на который действует сила не более $n-1$, найдем, что $y'(x)$ в интервале (ξ, l) меняет знак не более $n-1$ раз, а стало быть, и во всем интервале $(0, \xi)$ число знакоперемен не может превзойти $n-1$. Но так как $y(l)\,y'(l) < 0$, то и $y(x)$ будет иметь знакоперемен не более $n-1$.

Пусть теперь $y(\xi) < 0$. Это значит, что в интервале $(0, \xi)$ прогиб меняет знак один раз. Если приложенная в точке ξ сила F_1 имеет одно направление с $Q(0)$, то во всем интервале функция $Q(x)$ меняет знак не более чем $n-1$, отчего и $y(x)$ будет менять знак не более $n-1$ раза. Если же в интервале $(0, \xi)$ функция $Q(x)$ меняет знак, то тогда

$$Q(\xi) = (EIy'')' > 0$$

В силу этого и условий (4.1) точку $\xi - \varepsilon$, где ε — достаточно малое положительное число, можно считать находящейся в условиях упругой опоры и упругого защемления. Причем одновременно имеют место неравенства

$$y(\xi-\varepsilon)\,y'(\xi-\varepsilon) > 0, \qquad y(l)\,y'(l) < 0$$

Следовательно, согласно формуле (2.4) $y'(x)$ в интервале $(\xi-\varepsilon, l)$ имеет знакоперемен не более $n-1$, а $y(x)$ не более $n-2$. Но в полном интервале $(0, l)$ прогиб $y(x)$ может изменить знак не более $n-1$.

Итак, для случая (3.4) основной вопрос о максимальном числе знакоперемен прогиба имеет положительное решение. Приведенные рассуждения можно повторить и для случая, когда

$$y(0)\,y'(0) > 0, \qquad y(l)\,y'(l) > 0$$

Только в этом случае надо воспользоваться тем, что в силу (3.2) в ряду чисел

$$[EIy''(x)]'_{x=l}, \qquad y''(l),\ y'(l)\ y(l)$$

будут две перемены знака.

Доказательство не изменится и для самого неблагоприятного случая, когда $y(0)\,y'(0) < 0$, а $y(l)\,y'(l) > 0$.

§ 4. Исследуем вопрос о полноте решения проблемы об осцилляционных свойствах продольно сжатых стержней. Решение задачи надо считать полным, если функция влияния $H(x, s, P)$ оказывается осцилляционной при всех значениях P, меньших первой критической силы, ибо для P, бо́льших этой силы, прямолинейная форма равновесия становится неустойчивой и поэтому колебательный процесс около такого положения равновесия исключается. Нами показана осцилляционность $H(x, s, P)$ для $P < P_1$, где P_1 — наименьшее собственное значение однородной краевой задачи для уравнения второго порядка при определенных граничных условиях. Стало быть, исследование вопроса о полноте решения сводится к анализу связи собственного значения P_1 с наименьшей критической силой P_{1*}.

Линия прогибов стержня при действии на него только продольной нагрузки удовлетворяет уравнению

$$[EIz'(x)]' + Pf(x)\,z(x) = N \tag{4.1}$$

где N — поперечная реакция на конце. Кроме того, $z(x)$ должна удовлетворять тем или иным граничным условиям.

Решая (4.1), находим

$$z(x) = N \int_0^l \Gamma(x, \xi, P)\,d\xi \tag{4.2}$$

Возьмем случай закрепленных концов. Условия $y(0) = y(l) = 0$ позволяют путем интегрирования (4.2) получить уравнение для критических сил

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{P_\nu - P} \left[\int_0^l z_\nu(x)\,dx\right]^2 = 0 \tag{4.3}$$

в котором P_ν — собственные значения и $z_\nu(x)$ собственные функции однородной краевой задачи. Из (4.3) следует, что

$$P_1 < P_{1*} < P_2 < P_{2*} < \ldots$$

Перемежаемость собственных значений с критическими силами имеет место и при всяком ином способе закрепления концов, когда $N \neq 0$. Мы видим, что в тех случаях, когда связи на концах создают силу реакции, решение проблемы дается не полным. Это имеет место для случаев, разобранных в § 2 и 3.

Нам представляется, что осцилляционность $H(x, s, P)$ должна сохраняться в более широком интервале изменения параметра P, именно в пределах первой критической силы, т. е. $P < P_{1*}$.

Но если $N = 0$, как это имеет место для случаев, разобранных в § 1, то однородной краевой задачей будут уже определяться формы равновесия; поэтому в этих случаях $P_\nu = P_{\nu *}$ и решение задачи становится полным.

Поступила 15 XII 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. ГИТТЛ, 1950.
2. Меляховецкий А. С. Осцилляционные свойства колебаний сжатого стержня. ПММ, т. XVII, вып. 4, 1953.
3. Нудельман Я. Л. Методы определения частот и критических сил стержневых систем. ГТТИ, 1949.