Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ЗАДАЧЕ ЛАМЕ ДЛЯ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ НАГРУЗОК

М. М. Филоненко-Бородич

(Москва)

В работах [1, 2] указан способ приложения вариационного метода Кастильяно к задаче о напряженном состоянии упругого параллелепипеда под действием нагрузок на его гранях. Для решения задачи необходимо построение двух тензоров: основного, удовлетворяющего заданным граничным условиям и дифференциальным уравнениям равновесия, и корректирующего, удовлетворяющего нулевым граничным условиям, дифференциальным уравнениям равновесия и линейно содержащего достаточно большое число произвольных варьируемых параметров. Построение корректирующего тензора, не зависящего от поверхностных нагрузок данной задачи, удалось выполнить один раз навсегда при помощи системы специальных функций (косинус-биномов).

Ниже сделана попытка проследить ход построения основного тензора и выяснить причины тех трудностей, которые встречаются в общем случае нормальных и тангенциальных нагрузок на всех шести гранях параллелепипеда.

§ 1. Поверхностные нагрузки и условия внешнего равновесия параллелепипеда. Рассмотрим упругий параллелепипед под действием нагрузок, приложенных на всех шести гранях его. Начало координат поместим в одной из вершин параллелепипеда; оси координат направим по трем ребрам его. Длины ребер обозначим через a, b, c. Нагрузку на каждой грани разложим на три составляющие вдоль осей координат; тогда, например, на гранях, нормальных к оси x, будем иметь следующие граничные условия

$$\begin{array}{llll} X_x=\xi_{x0}(y,\ z) & Y_x=\xi_{y0}(y,\ z), & Z_x=\xi_{z0}(y,\ z) & \text{при } x=0 \\ X_x=\xi_{xa}(y,\ z) & Y_x=\xi_{ya}(y,\ z), & Z_x=\xi_{za}(y,\ z) & \text{при } x=a \end{array} \qquad (1.1)$$

Букву ξ будем и в дальнейшем применять для обозначения нагрузок, действующих на гранях, нормальных к оси x; для краткости будем называть их ξ-гранями; на остальных трех парах граней запишем граничные условия аналогично, применяя для составляющих на гранях, нормальных к оси y, букву η (назовем их η-грани), а на гранях, нормальных к оси z (на ζ-гранях), букву ζ.

Тогда остальные граничные условия при $y=0$, $y=b$, $z=0$, $z=c$ получатся из (1.1) одновременными круговыми подстановками четырех групп букв в каждой из указанных групп (xyz, XYZ, $\xi\eta\zeta$, abc), — этот символ будет применяться и в дальнейшем.

Введенные 18 составляющих нагрузок должны удовлетворять шести уравнениям равновесия, требующим равенства нулю главного вектора и главного момента всех внешних сил (для краткости назовем эти условия внешними условиями равновесия):

$$\sum X = \int_0^b\int_0^c [\xi_{xa}(y,\ z) - \xi_{x0}(y,\ z)]\,dydz + \int_0^a\int_0^c [\eta_{xb}(x,\ z) - \eta_{x0}(x,\ z)]\,dxdz + \\ + \int_0^a\int_0^b [\zeta_{xc}(x,\ y) - \zeta_{x0}(x,\ y)]\,dxdy = 0 \tag{1.2}$$

$$\sum M_x = \int_0^b\int_0^c [\xi_{ya}(y,\ z) - \xi_{y0}(yz)]\,zdydz + \int_0^b\int_0^c [-\xi_{za}(y,\ z) + \xi_{z0}(y, z)]\,ydydz + \\ + \int_0^a\int_0^c [\eta_{yb}(x,\ z) - \eta_{y0}(x,\ z)]\,zdxdz - \int_0^a\int_0^c \eta_{zb}(x,z)\,bdxdz + \\ + \int_0^a\int_0^b [\zeta_{z0}(x,\ y) - \zeta_{zc}(x,\ y)]\,ydxdy + \int_0^a\int_0^b \zeta_{yc}(x,\ y)\,cdxdy = 0 \tag{1.3}$$

$(xyz,\ XYZ,\ \xi\eta\zeta,\ abc)$

Сделаем следующее замечание: ограничиваясь случаем упругих деформаций, нужно предположить, что задаваемые на поверхности тангенциальные (касательные) нагрузки удовлетворяют на всех ребрах параллелепипеда условию взаимности касательных напряжений, при отсутствии которого невозможно равновесие элементов, прилегающих к ребрам; значит, на имеющихся двенадцати ребрах должны быть соблюдены следующие равенства:

$$\begin{matrix} \xi_{y0}(b,\ z) = \eta_{xb}(0,\ z), & \xi_{ya}(0,\ z) = \eta_{x0}(0,\ z) \\ \xi_{ya}(b,\ z) = \eta_{xb}(a,\ z), & \xi_{ya}(0,\ z) = \eta_{x0}(a,\ z) \end{matrix} \quad (xyz,\ \xi\eta\zeta,\ abc) \tag{1.4}$$

§ 2. Продолжение граничных условий внутрь параллелепипеда. Построим девятикомпонентную матрицу функций от трех независимых переменных x, y, z:

$$M = \begin{Vmatrix} \xi_x & \xi_y & \zeta_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{Vmatrix} \tag{2.1}$$

с таким расчетом, чтобы на гранях параллелепипеда эти функции принимали заданные значения, т. е. осуществляли заданные поверхностные нагрузки; к этой матрице в дальнейшем придется предъявить некоторые дополнительные требования.

Построенная таким путем матрица M не представляет тензора напряжений, так как пока удовлетворены лишь внешние условия равновесия параллелепипеда в целом; внутренние же условия равновесия остаются неудовлетворенными; действительно, с одной стороны, не удовлетворены уравнения равновесия Навье в напряжениях

$$\frac{\partial\xi_x}{\partial x} + \frac{\partial\eta_x}{\partial y} + \frac{\partial\zeta_x}{\partial z} = 0 \quad (xyz,\ \xi\eta\zeta) \tag{2.2}$$

а с другой стороны, матрица M несимметрична; закон взаимности касательных напряжений (1.4) существует лишь на ребрах параллелепипеда;

вследствие этого нельзя построить формулы преобразования матрицы M к новой системе координат; значит, можем сказать, что матрица M позволила лишь продолжить граничные условия внутрь параллелепипеда.

Пользуясь введенной нами матрицей M, можно уравнения внешнего равновесия (1.2) и (1.3) выразить в другой и притом более компактной форме. Действительно, заметим, что первый интеграл в равенстве (1.2) можно заменить тройным интегралом

$$\int_0^b\int_0^c [\xi_{xa}(y, z)-\xi_{x0}(y, z)]\,dydz=\int_0^a\int_0^b\int_0^c \frac{\partial \xi_x}{\partial x}\,dxdydz$$

Проделав аналогичные преобразования со вторым и третьим интегралами в (1.2), получим

$$\int_0^a\int_0^b\int_0^c \left(\frac{\partial \xi_x}{\partial x}+\frac{\partial \eta_x}{\partial y}+\frac{\partial \zeta_x}{\partial z}\right) dxdydz=0 \qquad \begin{pmatrix} xyz \\ \xi\eta\zeta \\ abc \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Подобным же образом преобразуются условия (1.3):

$$\int_0^a\int_0^b\int_0^c \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta_y}{\partial y}\right) z-\left(\frac{\partial \zeta_z}{\partial z}+\frac{\partial \xi_z}{\partial x}\right) y\right] dxdydz+$$

$$+c\int_0^a\int_0^b \zeta_{yc}dxdy-b\int_0^a\int_0^c \eta_{zb}dxdz=0 \qquad \begin{pmatrix} xyz \\ \xi\eta\zeta \\ abc \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Заметим, что уравнениям (2.4) можно дать более симметричный вид: для этого, например, в первом из них под знаком тройного интеграла добавим и вычтем слагаемые $(\partial\zeta_y/\partial z)\,zdz$ и $(\partial\eta_z/\partial y)\,ydy$ и затем, применяя интегрирование по частям, получим

$$\int_0^c \frac{\partial \zeta_y}{\partial z} zdz=\zeta_y z\Big|_0^c-\int_0^c \zeta_y dz=c\zeta_y-\int_0^c \zeta_y dz, \qquad \int_0^b \frac{\partial \eta_z}{\partial y} ydy=b\eta_z-\int_0^b \eta_z dy$$

Внося это в (2.4), найдем, что двойные интегралы исчезнут и уравнения получат следующий вид:

$$\int_0^a\int_0^b\int_0^c \left[\left(\frac{\partial \xi_y}{\partial x}+\frac{\partial \eta_y}{\partial y}+\frac{\partial \zeta_y}{\partial z}\right) z-\left(\frac{\partial \xi_z}{\partial x}+\frac{\partial \eta_z}{\partial y}+\frac{\partial \zeta_z}{\partial z}\right) y+\zeta_y-\eta_z\right] dxdydz=0 \quad \begin{pmatrix} xyz \\ \xi\eta\zeta \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Уравнения (2.3) и (2.5) налагают на матрицу M условия, вызванные требованием уравновешенности внешних нагрузок на параллелепипеде; если же это требование выполнено при самом выборе поверхностных нагрузок, то уравнения (2.3) и (2.5) будут удовлетворены тождественно, так как они представляют собой лишь другой вид внешних условий равновесия параллелепипеда.

§ 3. Дополнительная матрица. Построение основного тензора. Матрица (2.1) не удовлетворяет дифференциальным уравнениям внутреннего равновесия (2.2) и несимметрична; поэтому для построения основного тензора напряжений, удовлетворяющего заданным граничным условиям (1.1) и дифференциальным уравнениям равновесия в напряжениях:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}=0 \qquad \begin{pmatrix} XYZ \\ xyz \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

добавим к матрице (2.1) другую матрицу, также несимметричную:

$$M_0=\begin{Vmatrix} \xi_{0x} & \xi_{0y} & \xi_{0z} \\ \eta_{0x} & \eta_{0y} & \eta_{0z} \\ \zeta_{0x} & \zeta_{0y} & \zeta_{0z} \end{Vmatrix} \tag{3.2}$$

и также не удовлетворяющую дифференциальным уравнениям равновесия, но удовлетворяющую на поверхности параллелепипеда нулевым граничным условиям (отсутствие нагрузок). Потребуем теперь, чтобы сумма матриц

$$M+M_0 \tag{3.3}$$

была симметричной и удовлетворяла дифференциальным условиям равновесия (3.1); это приведет к системе уравнений

$$\frac{\partial\xi_{0x}}{\partial x}+\frac{\partial\eta_{0x}}{\partial y}+\frac{\partial\zeta_{0x}}{\partial z}+X=0 \qquad \left(X=\frac{\partial\xi_x}{\partial x}+\frac{\partial\eta_x}{\partial y}+\frac{\partial\zeta_x}{\partial z}\right) \qquad \begin{pmatrix} xyz \\ XYZ \\ \xi\eta\zeta \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

и трем конечным зависимостям

$$\xi_y+\xi_{0y}=\eta_x+\eta_{0x} \qquad (\xi\eta\zeta,\ xyz)$$

или

$$-\xi_{0y}+\eta_{0x}=+\xi_y-\eta_x=2m_y \qquad (\xi\eta\zeta,\ xyz) \tag{3.5}$$

которые показывают, что разности симметричных компонентов матрицы (3.2), обозначенные через $2m_x$, $2m_y$, $2m_z$, известны. Таким образом, задача свелась к определению девяти компонентов матрицы (3.2) из уравнений (3.4) и конечных зависимостей (3.5) при нулевых граничных условиях. Однако несимметричную матрицу (3.2) удобно разложить на симметричную и антисимметричную:

$$M_0=\begin{Vmatrix} \xi_{0x} & \overset{\circ}{\xi}_{0y} & \overset{\circ}{\xi}_{0z} \\ \overset{\circ}{\eta}_{0x} & \eta_{0y} & \overset{\circ}{\eta}_{0z} \\ \overset{\circ}{\zeta}_{0x} & \overset{\circ}{\zeta}_{0y} & \zeta_{0z} \end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix} 0 & -m_z & m_y \\ m_z & 0 & -m_x \\ -m_y & m_x & 0 \end{Vmatrix} \tag{3.6}$$

где

$$\overset{\circ}{\xi}_{0y}=\overset{\circ}{\eta}_{0x}=\frac{1}{2}(\xi_{0y}+\eta_{0x}) \qquad (\xi\eta\zeta,\ xyz) \tag{3.7}$$

Первое слагаемое матрицы (3.6) представляет собой симметричный тензор напряжений, а второе — антисимметричный тензор; он известен, так как на основании (3.5) составлен из компонент матрицы (2.1).

Заменив в (3.4) матрицу (3.2) ее разложением (3.6), получим

$$\frac{\partial\xi_{0x}}{\partial x}+\frac{\partial\overset{\circ}{\eta}_{0x}}{\partial y}+\frac{\partial\overset{\circ}{\zeta}_{0x}}{\partial z}+X^\circ=0 \qquad (\xi\eta\zeta,\ xyz,\ XYZ) \tag{3.8}$$

Здесь объемные силы X°, Y°, Z° выражаются через компоненты матрицы (2.1) следующим образом, учитывая (3.4) и (3.5):

$$X^\circ=X+\frac{\partial m_z}{\partial y}-\frac{\partial m_y}{\partial z}=\frac{\partial\xi_x}{\partial x}+\frac{\partial\eta_x}{\partial y}+\frac{\partial\zeta_x}{\partial z}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi_y}{\partial y}-\frac{\partial\eta_x}{\partial y}+\frac{\partial\xi_z}{\partial z}-\frac{\partial\zeta_x}{\partial z}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\xi_x}{\partial x}+\frac{\partial\eta_x}{\partial y}+\frac{\partial\zeta_x}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial\xi_x}{\partial x}+\frac{\partial\xi_y}{\partial y}+\frac{\partial\xi_z}{\partial z}\right)\right] \qquad \begin{pmatrix} XYZ \\ xyz \\ \xi\eta\zeta \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

Если аналогично (3.4) введем обозначения

$$X'=\frac{\partial\xi_x}{\partial x}+\frac{\partial\xi_y}{\partial y}+\frac{\partial\xi_z}{\partial z} \qquad (XYZ,\ \xi\eta\zeta,\ xyz) \tag{3.10}$$

то формулы (3.9) получат вид:

$$X^\circ = \tfrac{1}{2}(X + X'), \quad Y^\circ = \tfrac{1}{2}(Y + Y'), \quad Z^0 = \tfrac{1}{2}(Z + Z') \tag{3.11}$$

§ 4. Матрица M_{01} и дополнительные требования к матрице M. Таким образом, на данном этапе задача свелась к решению системы дифференциальных уравнений (3.8).

Остается установить граничные условия для введенной сюда новой симметричной матрицы

$$M_{01} = \begin{Vmatrix} \xi_{0x} & \overset{\circ}{\xi}_{0y} & \overset{\circ}{\xi}_{0z} \\ \overset{\circ}{\eta}_{0x} & \eta_{0y} & \overset{\circ}{\eta}_{0z} \\ \overset{\circ}{\zeta}_{0x} & \overset{\circ}{\zeta}_{0y} & \zeta_{0z} \end{Vmatrix} \tag{4.1}$$

Принятый нами ход решения будет эффективен лишь в том случае, если эти условия так же будут нулевыми, как и условия для суммарной матрицы M_0, а это возможно лишь в том случае, если антисимметричная часть матрицы M_0 также удовлетворяет нулевым граничным условиям; однако эта матрица согласно (3.5) нам задана (вместе с исходной матрицей M), и поэтому задание нулевых граничных условий для нее накладывает некоторые ограничения на компоненты матрицы M. Рассмотрим граничные условия для матрицы M_0. Имеем

$$\xi_{0x}(0, y, z) = 0, \quad \overset{\circ}{\xi}_{0y}(0, y, z) - m_z = 0, \quad \overset{\circ}{\xi}_{0z}(0, y, z) + m_y = 0 \quad \text{при } x = 0$$
$$\xi_{0x}(a, y, z) = 0, \quad \overset{\circ}{\xi}_{0y}(a, y, z) - m_z = 0, \quad \overset{\circ}{\xi}_{0z}(a, y, z) + m_y = 0 \quad \text{при } x = a$$
$$(\xi\eta\zeta, \ xyz, \ abc)$$

Если вошедшие сюда компоненты матрицы M_{01} удовлетворяют нулевым граничным условиям, то согласно (3.5) для компонент матрицы M получаем следующие условия:

$$\left.\begin{aligned} 2m_z &= \xi_y(0, y, z) - \eta_x(0, y, z) = 0 \\ 2m_y &= \zeta_x(0, y, z) - \xi_z(0, y, z) = 0 \end{aligned}\right\} \text{при } x = 0$$
$$\left.\begin{aligned} 2m_z &= \xi_y(a, y, z) - \eta_x(a, y, z) = 0 \\ 2m_y &= \zeta_x(a, y, z) - \xi_z(a, y, z) = 0 \end{aligned}\right\} \text{при } x = a \tag{4.2}$$

Легко видеть, что эти условия формулируют закон взаимности касательных напряжений на всех гранях параллелепипеда, точнее говоря, в бесконечно тонких слоях, прилегающих к граням. Таким образом, для успешности решения задачи о построении основного тензора для параллелепипеда необходимо, чтобы исходная матрица M не только осуществляла на гранях заданные нагрузки, но и обеспечивала на них соблюдение закона взаимности касательных напряжений. В этом и заключается то дополнительное требование к матрице M, о котором было сказано в начале § 2. Если компоненты симметричной матрицы M_{01} определены из уравнений (3.8), то далее при помощи зависимостей (3.5) и (3.7) найдем девять компонент несимметричной матрицы M_0.

Остается добавить эту матрицу к исходной матрице (2.1) и тем получить искомый основной тензор напряжений, удовлетворяющий заданным граничным условиям и дифференциальным уравнениям равновесия.

В итоге рассмотренный прием состоит в том, что поставленная вначале задача с ненулевыми граничными условиями сводится к задаче с нулевыми граничными условиями при наличии объемных сил (3.9).

Но тогда очевидно, что решение задачи возможно только в том случае, если объемные силы (3.9) образуют уравновешенную систему, т. е. главный вектор и главный момент этой системы равны нулю. Первое из этих условий приводит к уравнениям [учитывая (3.11)]

$$\int_0^a\int_0^b\int_0^c X^\circ dxdydz = 0 \quad \text{или} \quad \int_0^a\int_0^b\int_0^c (X + X')\, dxdydz = 0 \tag{4.3}$$

Учитывая условия (2.3) и обозначения (3.4) и (3.9), из (4.3) получим уравнения, связывающие компоненты матрицы (2.1):

$$\int_0^a\int_0^b\int_0^c \left(\frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_y}{\partial y} + \frac{\partial \xi_z}{\partial z}\right) dxdydz = 0 \qquad (\xi\eta\zeta) \tag{4.4}$$

Переходим к условию равенства нулю главного момента сил (3.11); приравнивая нулю момент их относительно осей xyz, получим уравнения

$$\int_0^a\int_0^b\int_0^c [(Y + Y')\, z - (Z + Z')\, y]\, dxdydz = 0 \qquad (XYZ,\ xyz)$$

Вычтем из него почленно первое из равенств (2.5), которое можно записать так:

$$\int_0^a\int_0^b\int_0^c (Yz - Zy + \zeta_y - \eta_z)\, dxdydz \qquad (XYZ,\ xyz)$$

Тогда, раскрывая обозначения Y' и Z' согласно (3.10), получим

$$\int_0^a\int_0^b\int_0^c \left[\left(\frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_y}{\partial y} + \frac{\partial \xi_z}{\partial z}\right) y - \left(\frac{\partial \eta_x}{\partial x} + \frac{\partial \eta_y}{\partial y} + \frac{\partial \eta_z}{\partial z}\right) x + \xi_y - \eta_x\right] dxdydz = 0 \qquad (\xi\eta\zeta,\ xyz) \tag{4.5}$$

Таким образом, условие уравновешенности объемных сил (3.9) налагает на матрицу (2.1) шесть условий (4.4) и (4.5) дополнительно к ранее полученным условиям (2.3) и (2.5).

Однако выше мы потребовали, чтобы матрица M удовлетворяла на всех гранях параллелепипеда закону взаимности касательных напряжений; в этих условиях легко показать, что уравнения (4.4) и (4.5) будут следствием уравнений внутреннего равновесия (2.3) и (2.5) и потому не налагают на матрицу M никаких новых ограничений. Действительно, рассмотрим уравнения (2.3) и (2.5) в их первоначальном виде (1.2) и (1.3), выраженном через поверхностные интегралы, и заменим входящие сюда компоненты тангенциальных нагрузок взаимными им величинами согласно (4.2); если над полученными таким путем уравнениями выполним такие же операции, при помощи которых в § 2 мы пришли к уравнениям (2.3) и (2.5), то в результате получим уравнения (4.4) и (4.5), что и требовалось доказать.

Замечание. В предыдущих рассуждениях фигурируют две взаимно сопряженные матрицы (начальная и транспонированная):

$$M=\begin{Vmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{Vmatrix}, \qquad M'=\begin{Vmatrix} \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_y & \eta_y & \zeta_y \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{Vmatrix} \tag{4.6}$$

Уравнения (2.3) и (2.5) формулируют условия равновесия поверхностных нагрузок, соответствующих матрице M; значит, уравнения (4.4) и (4.5) требуют, чтобы были взаимно уравновешены нагрузки на поверхности параллелепипеда, соответствующие транспонированной матрице M. Применим теорему о среднем значении определенного интеграла к уравнениям (2.3), (2.5), (4.4) и (4.5) для взаимно сопряженных матриц; например, для уравнений (2.3) теорема о среднем значении дает

$$\left(\frac{\partial \xi_x}{\partial x}+\frac{\partial \eta_x}{\partial y}+\frac{\partial \zeta_x}{\partial z}\right)_{x=x',\ y=y',\ z=z'} abc=0 \qquad \binom{\xi\eta\zeta}{xyz}$$

где x', y', z' — некоторая точка внутри параллелепипеда; таким образом, дифференциальный оператор, стоящий в скобках, должен обращаться в нуль в некоторой точке в области параллелепипеда; применяя такие рассуждения ко всем уравнениям (2.3) и (4.4), найдем, что для взаимно сопряженных матриц M и M' дифференциальные уравнения вида (3.1) и сопряженные с ними должны удовлетворяться интегрально или в среднем во всей области параллелепипеда. Что касается уравнений (2.5) и (4.5), то они обобщают в интегральной форме закон взаимности касательных напряжений на всю область параллелепипеда; действительно, будем уменьшать размеры параллелепипеда a, b, c, стягивая его к вершине, расположенной в начале координат; при этом в подынтегральных выражениях (2.5) и (4.5) слагаемые, содержащие множители x, y, z, будут беспредельно убывать. Тогда для бесконечно малого параллелепипеда (при a, b, c стремящихся к нулю) в пределе будем иметь

$$\int_0^a\int_0^b\int_0^c (\xi_y-\eta_x)\,dxdydz=0 \qquad \binom{\xi\eta\zeta}{xyz}$$

Применяя к этим интегралам, как и выше, теорему о среднем значении, придем в пределе к закону взаимности касательных напряжений:

$$\xi_y=\eta_x, \qquad \zeta_x=\xi_z, \qquad \eta_z=\zeta_y$$

§ 5. О решении системы уравнений (3.8). Обращаясь к уравнениям (3.8), найдем сначала общее решение их. Соответствующая им однородная система разрешается при помощи функций напряжений; пользуясь, например, функциями Максвелла, получим

$$\xi^\circ_{0x}=\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2}, \qquad \eta^\circ_{0x}=\xi^\circ_{0y}=-\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x\partial y} \qquad \begin{pmatrix}\xi\eta\zeta\\ xyz\\ 123\end{pmatrix} \tag{5.1}$$

Частное решение системы (3.8) возьмем в виде

$$\xi_{0x}=-\int_0^x X^\circ dx, \qquad \eta_{0y}=-\int_0^y Y^\circ dy, \qquad \zeta_{0z}=-\int_0^z Z^\circ dz \tag{5.2}$$

$$\xi^\circ_{0y}=\eta^\circ_{0x}=\zeta^\circ_{0x}=\xi^\circ_{0z}=\eta^\circ_{0y}=\zeta^\circ_{0z}=0$$

Тогда общее решение системы (3.8) будет

$$\xi_{0x}=\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2}-\int_0^x X^\circ dx, \qquad \eta^\circ_{0x}=\xi^\circ_{0y}=-\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x\partial y} \qquad \begin{pmatrix}\xi\eta\zeta\\ xyz\\ 123\end{pmatrix} \tag{5.3}$$

Отсюда следует выбрать частное решение, удовлетворяющее нулевым граничным условиям:

для нормальных напряжений

$$\left(\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2}\right)_{x=0}=0, \qquad \left(\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2}\right)_{x=0}=\int_0^a X^\circ dx \qquad \begin{pmatrix} xyz \\ XYZ \\ 123 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

для касательных напряжений

$$\left(\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x\partial y}\right)_{\substack{x=0\\x=a}}=0, \qquad \left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z\partial x}\right)_{\substack{x=0\\x=a}}=0 \qquad \begin{pmatrix} xyz \\ 123 \\ abc \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

Таким образом, для завершения решения задачи остается подобрать функции напряжений φ_1, φ_2, φ_3, удовлетворяющие граничным условиям (5.4) и (5.5).

Будем разыскивать их в виде

$$\varphi_1=\sum\sum\sum A_{mnp}X_mY_nZ_p, \qquad \varphi_2=\sum\sum\sum B_{mnp}X_mY_nZ_p,$$
$$\varphi_3=\sum\sum\sum C_{mnp}X_mY_nZ_p \tag{5.6}$$

где $X_m(x)$, $Y_n(y)$, $Z_p(z)$ — функции, удовлетворяющие следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} &X_m(0)=0, \qquad && X_m(a)=1, \qquad && X'_m(0)=X'_m(a)=0 \\ &Y_n(0)=0, && Y_n(b)=1, && Y'_n(0)=Y'_n(b)=0 \\ &Z_p(0)=0, && Z_p(c)=1, && Z'_p(0)=Z'_p(c)=0 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Тогда граничные условия для касательных напряжений (5.5) и условия левого столбца (5.4) будут удовлетворены тождественно; условия же правого столбца (5.4) для нормальных напряжений получат вид:

$$\begin{aligned} &\sum\sum \overset{\circ m}{C}_{mnp}Y''_nZ_p+\sum\sum \overset{\circ m}{B}_{mnp}Y_nZ''_p=\int_0^a X^\circ dx \\ &\sum\sum \overset{\circ n}{A}_{mnp}X_mZ''_p+\sum\sum \overset{\circ n}{C}_{mnp}X''_mZ_p=\int_0^b Y^\circ dy \\ &\sum\sum \overset{\circ p}{B}_{mnp}X''_mY_n+\sum\sum \overset{\circ p}{A}_{mnp}X_mY''_n=\int_0^c Z^\circ dz \end{aligned} \tag{5.8}$$

Здесь для краткости введены следующие обозначения, вытекающие из граничных условий второго столбца (5.7):

$$\begin{aligned} &\overset{\circ n}{A}_{mnp}=\sum_n A_{mnp}, \qquad && \overset{\circ m}{B}_{mnp}=\sum_m B_{mnp}, \qquad && \overset{\circ m}{C}_{mnp}=\sum_m C_{mnp} \\ &\overset{\circ p}{A}_{mnp}=\sum_p A_{mnp}, && \overset{\circ p}{B}_{mnp}=\sum_p B_{mnp}, && \overset{\circ n}{C}_{mnp}=\sum_n C_{mnp} \end{aligned} \tag{5.9}$$

При этом тройные суммы оказалось возможным заменить двойными. Функции X_m, Y_n, Z_p возьмем в следующем виде:

$$\begin{aligned} X_m&=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{m\pi x}{a}-\cos\frac{(m+1)\pi x}{a}\right) \\ Y_n&=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{n\pi y}{b}-\cos\frac{(n+1)\pi y}{b}\right) \\ Z_p&=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{p\pi z}{c}-\cos\frac{(p+1)\pi z}{c}\right) \end{aligned} \tag{5.10}$$

Эти функции, с одной стороны, удовлетворяют граничным условиям (5.7), а с другой — образуют замкнутые и полные системы на отрезках, представляющих собой ребра параллелепипеда a, b, c. Действительно, функция X_m, представленная в виде

$$X_m = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2m\pi x}{2a} - \cos\frac{2(m+1)\pi x}{2a}\right)$$

есть косинус-бином четного номера; на отрезке длиной $2a$ система их является замкнутой и полной при аппроксимировании функций, четных относительно середины отрезка $2a$; значит, она будет полной и замкнутой при аппроксимировании произвольной функции (удовлетворяющей условиям Дирихле) на половинном отрезке a. Таким путем задача решения уравнений (3.8) свелась к аппроксимированию правых частей формул (5.8) полиномами, стоящими в левых частях. Если в формулах (5.6) индексам m, n, p дадим по N значений $0, 1, 2, \ldots, N-1$, то число коэффициентов A_{mnp}, B_{mnp}, C_{mnp}, входящих в (5.8), будет равно $3N^3$; число коэффициентов (5.9), входящих в (5.8), будет равно $6N^2$, но они не независимы, так как между ними существует $3N$ очевидных соотношений:

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=0}^{N-1} \overset{\circ n}{A}_{mnp} = \sum_{n=0}^{N-1} \overset{\circ p}{A}_{mnp} \qquad (m=0, 1, 2, \ldots, N-1)\\
&\sum_{m=0}^{N-1} \overset{\circ p}{B}_{mnp} = \sum_{p=0}^{N-1} \overset{\circ m}{B}_{mnp} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots, N-1)\\
&\sum_{n=0}^{N-1} \overset{\circ m}{C}_{mnp} = \sum_{m=0}^{N-1} \overset{\circ n}{C}_{mnp} \qquad (p=0, 1, 2, \ldots, N-1)
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Число независимых коэффициентов в уравнениях (5.8) равно

$$6N^2 - 3N = 3N(2N-1)$$

Поэтому выполнять аппроксимирование в каждом из уравнений (5.8) раздельно не представляется возможным. Применяя приближение в среднем, необходимо построить суммарное среднее квадратическое уклонение, перенеся свободные члены уравнений (5.8) в левые части, и составить сумму квадратов их; дальнейшие операции по определению коэффициентов A_{mnp}, B_{mnp} C_{mnp} выполняются обычным путем.

§ 6. Заключение. Первым и основным этапом выполненного исследования является продолжение граничных условий внутрь параллелепипеда при помощи построения матрицы M; в дальнейшем к ней пришлось предъявить дополнительные требования в смысле удовлетворения на всех гранях закона взаимности касательных напряжений; включение его в число граничных условий представляется естественным, так как обычные статические граничные условия

$$X_\nu = X_x l + X_y m + X_z n \qquad (XYZ,\ xyz,\ lmn) \tag{6.1}$$

представляют собой первые три уравнения равновесия элементарного тетраэдра; остальные три уравнения, выражающие условия равенства нулю главного момента приложенных к элементу сил, приводят к закону взаимности касательных напряжений, т. е. к симметрии тензора напряжений, и тем самым закон взаимности входит в состав граничных условий задачи. При этом на нормальные (диагональные) компоненты

$\xi_x(x, y, z)$, $\eta_y(x, y, z)$, $\zeta_z(x, y, z)$ матрицы M не накладывается никаких дополнительных ограничений. Перейдем к тангенциальным компонентам.

Рассмотрим внутри параллелепипеда какую-либо площадку, нормальную к оси x, и зададим на ней произвольно компонент $\xi_y(x, y, z)$ при «выходе» площадки на левую грань $(y=0)$ и на правую грань $(y=b)$; он должен для соблюдения закона взаимности принимать соответственные значения тангенциальных нагрузок η_{x0} и η_{xb} на этих гранях. Эти условия будут удовлетворены, если компонент матрицы $\eta_x(x, y, z)$ построим следующим образом:

$$\eta_x(x, y, z) = Y_1(y)\eta^*(x, z) + Y_0(y)\xi_y(x, 0, z) + Y_b(y)\xi_y(x, b, z) \quad (6.2)$$

где $\eta^*(x, z)$ — произвольная функция; функции же $Y_1(y)$, $Y_0(y)$ и $Y_b(y)$ должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\begin{matrix} Y_1(0)=0, & Y_0(0)=1, & Y_b(0)=0 \\ Y_1(b)=0, & Y_0(b)=0, & Y_b(b)=1 \end{matrix} \quad (6.3)$$

Продолжая этот способ, оставим компонент $\eta_z(x, y, z)$ произвольным и затем построим сопряженный с ним компонент $\zeta_y(x, y, z)$ аналогично (6.2):

$$\zeta_y(x, y, z) = Z_1(z)\zeta_y^*(x, y) + Z_0(z)\eta_z(x, y, 0) + Z_c(z)\eta_z(x, y, c) \quad (6.4)$$

Наконец компонент $\zeta_x(x, y, z)$ оставим произвольным, а последний тангенциальный компонент $\xi_z(x, y, z)$ построим тем же путем:

$$\xi_z(x, y, z) = X_1(x)\xi_z^*(yz) + X_0(x)\zeta_x(0, y, z) + X_a(x)\zeta_x(a, y, z) \quad (6.5)$$

Можно, конечно, несколько изменить порядок решения, задавая произвольно другие компоненты тангенциальных нагрузок; например, задать оба компонента $\xi_y(x, y, z)$ и $\xi_z(x, y, z)$ на площадке, нормальной к оси X, и соответственно распорядиться остальными компонентами, строя их аналогично (6.2) и (6.4). Во всяком случае оказывается возможным задать произвольно три нормальные и три тангенциальные компоненты матрицы M; при построении остающихся трех тангенциальных компонент сохраняется еще достаточная свобода в смысле распоряжения ими при наличии трех произвольных функций от двух переменных

$$\eta_x^*(x, z), \qquad \zeta_y^*(x, y), \qquad \xi_z^*(y, z)$$

и девяти функций от одной переменной

$$Y_i(y), \qquad Z_i(z), \qquad X_i(x) \qquad (i = 1, 0, b, c, a)$$

на которые накладываются достаточно слабые ограничения в виде граничных условий. Удовлетворение условий внешнего равновесия параллелепипеда может быть достигнуто или предварительно, при самом выборе поверхностных нагрузок (уравнения (1.2) и (1.3)), или путем введения в компоненты матрицы M шести дополнительных параметров, определяемых затем из уравнений равновесия в форме (2.3) и (2.5).

Поступила 7 III 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Филоненко-Бородич М. М. Задача о равновесии упругого параллелепипеда при заданных нагрузках на его гранях. ПММ, т. XV, вып. 2, 1951.
2. Филоненко-Бородич М. М. Две задачи о равновесии упругого параллелепипеда. ПММ, т. XV, вып. 5, 1951.