

## ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ<sup>1</sup>

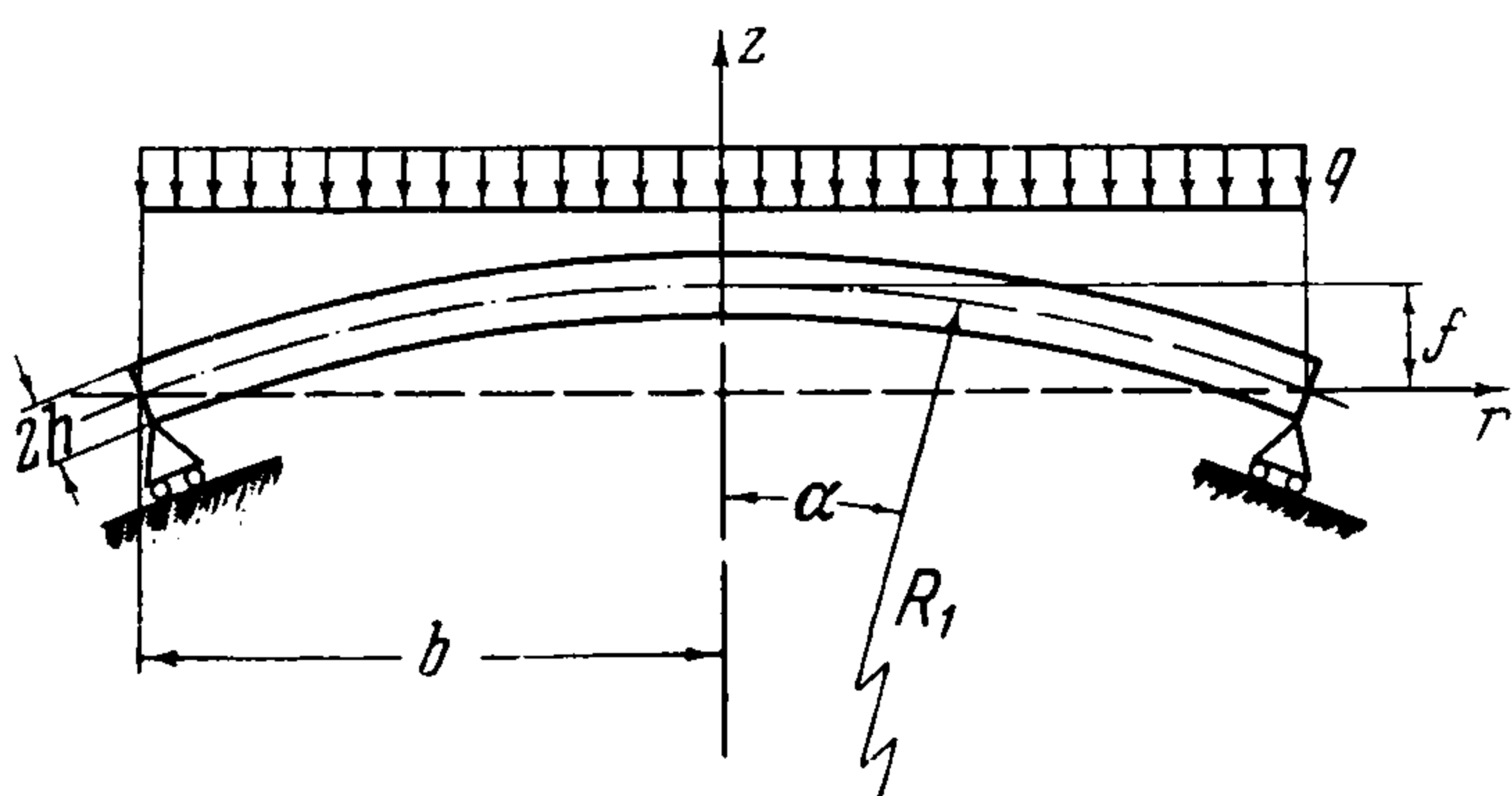
С. М. Фейнберг

(Москва)

При помощи принципа предельной напряженности (1) рассматривается случай пластического течения, распространяющегося в предельном состоянии на всю область очень пологой осесимметрической оболочки, находящейся под равномерно распределенной нагрузкой и свободно опертой по контуру. Предполагается, что материал оболочки следует закону прочности Мизеса. Стрелка подъема оболочки предполагается сравнимой с толщиной последней.

Для этого случая математическая задача существенно упрощается и получается короткое решение приложением метода линеаризированной аппроксимации [1], именно шестиугольной аппроксимации, что дает точность  $\pm 7.5\%$  в определении предельной нагрузки; следует заметить, что для материала, следующего закону прочности Сан-Венана, наше решение будет точным.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим осесимметрическую, очень пологую оболочку, изображенную на фиг. 1. Степень пологости оболочки определяется стрелкой подъема  $f$  посредством параметра  $A = 4f/h$ . Толщина оболочки постоянна и равна  $2h$ . Остальные размеры и направления осей указаны на фиг. 1. Нагрузка предполагается равномерно распределенной по площади и равной  $q$ .



Фиг. 1

По внешнему контуру оболочка свободно оперта и может свободно перемещаться в направлении оси  $r$ . Поэтому на внешнем контуре момент и растягивающая сила, действующие в тангенциальном сечении, равны нулю. В силу симметрии на оси  $z$  моменты и растягивающие силы в радиальном и тангенциальном сечениях равны между собой. В дальнейшем будем обозначать через  $T_1, T_2$  растягивающие силы,  $M_1, M_2$  — изгибающие моменты,  $N$  — перерезывающую силу в тангенциальном и радиальном сечениях оболочки,  $R_1, R_2$  — радиусы кривизны средней поверхности. Будем рассматривать случай, когда в предельном состоянии область пластического течения распространяется на всю оболочку, что имеет место при достаточной малости параметра  $A$ .

<sup>1</sup> Статья представляет собой изложение одного из результатов, содержащихся в докторской диссертации автора «Принцип предельной напряженности», Институт механики АН СССР, М. 1946.

Для дальнейшего существенно понятие о непрерывности решения по параметру  $A$ . Если  $A=0$ , то мы переходим к случаю изгиба круглой плиты. По мере возрастания  $A$  появляются растягивающие силы, но область пластического течения при достаточно малых  $A$  еще продолжает захватывать всю оболочку. По достижении  $A$  некоторого значения, область пластического течения в предельном состоянии может уже не распространяться на всю оболочку.

Компоненты  $T_1, T_2, M_1, M_2, N$  напряженного состояния должны удовлетворять уравнениям равновесия, совокупность которых обозначим  $R$ :

$$R_i(T_1, T_2, M_1, M_2, N) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

граничным условиям  $T_1 = T_2, M_1 = M_2$  при  $r = 0, T_1 = 0, M_1 = 0$  при  $r = b$ . Далее в области пластического течения должно удовлетворяться предельное условие, вытекающее из условия Мизеса или его аппроксимации, которое обозначим  $F$ :

$$F(T_1, T_2, M_1, M_2) = K \quad (1.2)$$

где  $K$  — константа пластичности материала,  $N$  не входит в  $F$  потому, что мы предполагаем малость влияния последнего. Так как количество уравнений (1.1) и (1.2) равно четырем, а неизвестных шесть, то для составления недостающего уравнения обращаемся к вариационной проблеме принципа предельной напряженности [1], т. е. требуем минимума

$$\int_0^b F dr \quad (1.3)$$

при условиях (1.1) и  $F = \text{const} = 0$ .

Составляя для функции Лагранжа вариационной проблемы (1.3) уравнения Эйлера

$$F^* = F + v_0(F - c) + \sum_1^3 v_i R_i$$

где  $v$  — множители Лагранжа, найдем недостающие уравнения текучести.

Ниже даются все эти вычисления.

**2. Уравнения равновесия.** Для осесимметричной задачи, когда нагрузка нормальна к поверхности оболочки, уравнения равновесия имеют вид:

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + \frac{1}{r} \frac{d(Nr)}{R_1 d\alpha} = q_H, \quad T_1 \sin \alpha + N \cos \alpha = q_H \frac{r}{2} \quad (2.1)$$

$$\frac{d(M_1 r)}{d\alpha} - M_2 R_1 \cos \alpha - N_2 R_1 r = 0$$

Для очень пологих оболочек можно положить

$$R_1 = R_2 = R = \text{const}, \quad R d\alpha = dr, \quad \sin \alpha = \frac{r}{R}, \quad \cos \alpha = 1, \quad q_H = q$$

Тогда уравнения равновесия для пологой оболочки и осесимметричной задачи будут

$$T_1 + T_2 + \frac{R}{r} \frac{d(Nr)}{dr} = qR, \quad T_1 \frac{r}{R} + N = q \frac{r}{2}, \quad \frac{d(M_1 r)}{dr} - M_2 - Nr = 0 \quad (2.2)$$

Исключая из (2.2)  $N$  при  $q = \text{const}$ , получим

$$r \frac{dT_1}{dr} + T_1 - T_2 = 0, \quad r \frac{dM_1}{dr} + M_1 - M_2 + \frac{r^2}{R} T_1 = \frac{qr^2}{2} \quad (2.3)$$

Введем теперь безразмерные величины при  $h = \text{const}$ ,  $k = \text{const}$ .

$$t_1 = \frac{T_1}{2kh}, \quad t_2 = \frac{T_2}{2kh}, \quad m_1 = \frac{M_1}{kh^2}, \quad m_2 = \frac{M_2}{kh^2}, \quad r = bx \quad (2.4)$$

Тогда получим безразмерные уравнения равновесия в виде

$$x \frac{dt_1}{dx} + t_1 - t_2 = 0, \quad x \frac{dm_1}{dx} + m_1 - m_2 + At_1x^2 = px^2 \quad (2.5)$$

где

$$A = \frac{2b^2}{Rh} \approx 4 \frac{f}{h}, \quad p = \frac{qb^2}{2kh^2} \quad (2.6)$$

Граничные условия будут

$$\begin{aligned} t_1 = t_2, \quad m_1 = m_2 & \quad \text{при } x = 0 \\ t_1 = 0, \quad m_1 = 0 & \quad \text{при } x = 1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

**3. Предельные условия прочности для элемента оболочки.** Выведем предельные условия прочности для элемента оболочки при шестиугольной аппроксимации закона прочности Мизеса. Эти условия с точностью до постоянного множителя будут совпадать с предельными условиями прочности для элемента оболочки из материала, следующего закону пластичности Сан-Венана.

Для сокращения изложения выведем лишь те условия, которые нам нужны в этой работе.

Рассмотрим элемент оболочки, находящийся в предельном состоянии так, что имеется плоскость  $z = z_0$  разрыва  $ABC$ , с каждой стороны которой напряженное состояние однородно и предельно. Влиянием перерезывающих сил будем пренебрегать. Далее напряженное состояние будем считать плоским, т. е. положим  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ .

Если обозначить через  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y'$  и  $\sigma_x''$ ,  $\sigma_y''$  напряжения, действующие соответственно в сечениях, перпендикулярных осям  $x$  и  $y$ , сверху и снизу от плоскости  $z = z_0$ , и положить  $\tau_{xy} = 0$  в силу осевой симметрии задачи, то для плоского напряженного состояния  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  будут удовлетворять условиям Мизеса, которые заменяем шестиугольной аппроксимацией, последовательно описывая и вписывая шестиугольники в эллипс Мизеса.

Приравнявая моменты и силы внутренние и внешние, действующие в сечениях оболочки, получим уравнения

$$\begin{aligned} T_1 &= \sigma_x' (h - zh) + \sigma_x'' (h + zh), \quad T_2 = \sigma_y' (h - zh) + \sigma_y'' (h + zh) \\ M_1 &= \sigma_x' (h - zh) \left( h - \frac{h - zh}{2} \right) - \sigma_x'' (h + zh) \left( h - \frac{h + zh}{2} \right) \\ M_2 &= \sigma_y' (h - zh) \left( h - \frac{h - zh}{2} \right) - \sigma_y'' (h + zh) \left( h - \frac{h + zh}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

поделив уравнения для  $T_1$  и  $T_2$  на  $2kh$  и уравнения для  $M_1$  и  $M_2$  на  $kh^2$  и внося обозначения

$$\sigma_1' = \frac{\sigma_x'}{2k}, \quad \sigma_2' = \frac{\sigma_y'}{2k}, \quad \sigma_1'' = \frac{\sigma_x''}{2k}, \quad \sigma_2'' = \frac{\sigma_y''}{2k}$$

получим уравнения (3.1) в безразмерной ] форме:

$$\begin{aligned} t_1 &= \sigma_1' + \sigma_1'' - \frac{z}{1-z^2} m_1, & m_1 &= (1-z^2)(\sigma_1' - \sigma_1'') \\ t_2 &= \sigma_2' + \sigma_2'' - \frac{z}{1-z^2} m_2, & m_2 &= (1-z^2)(\sigma_2' - \sigma_2'') \end{aligned} \quad (3.2)$$

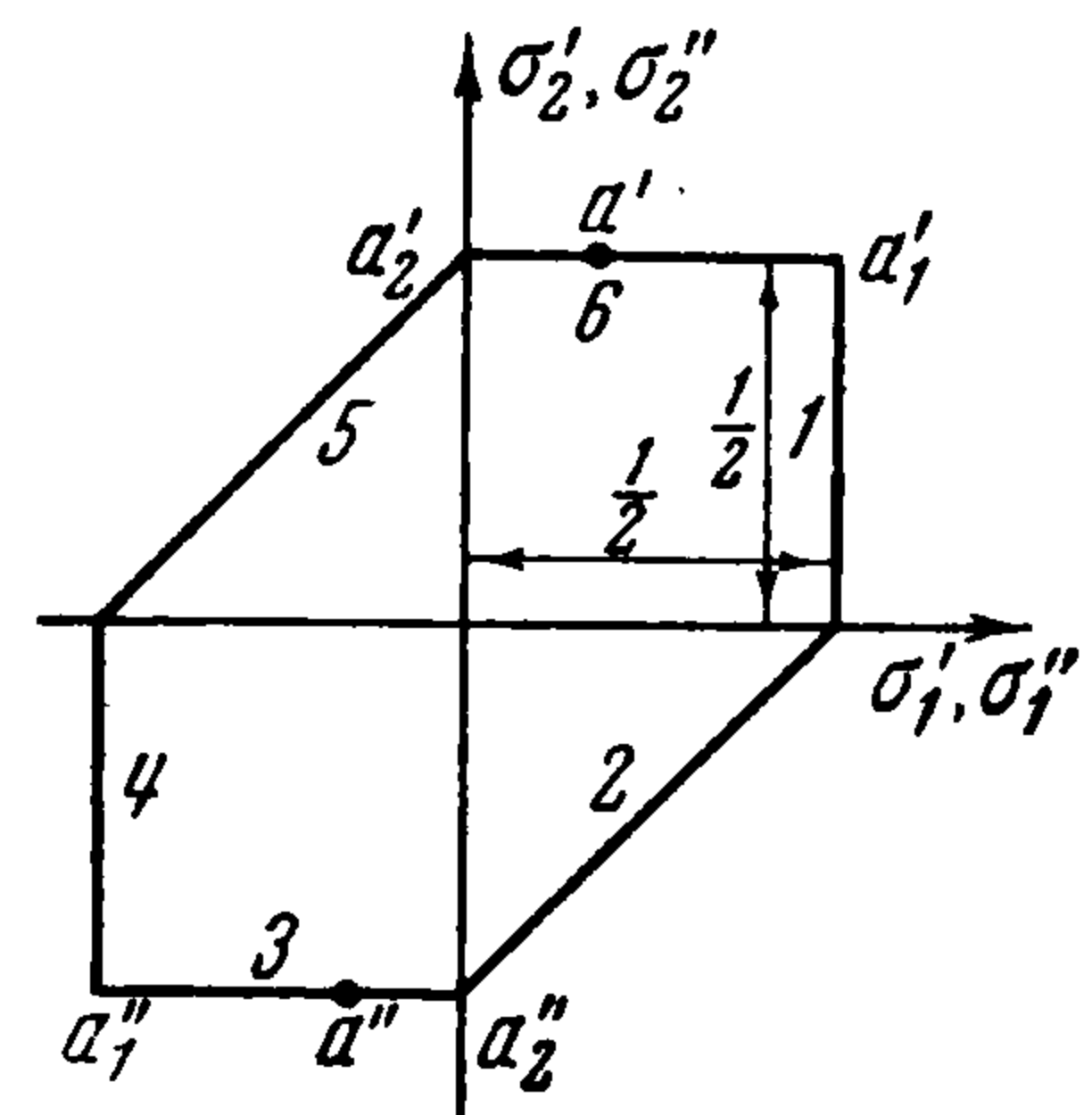
При этом  $\sigma_1', \sigma_2'$  и  $\sigma_1'', \sigma_2''$  должны удовлетворять предельным условиям шестиугольной аппроксимации, т. е. лежать на шестиугольнике прочности.

Графически предельное напряженное состояние (3.2) может быть изображено парой точек  $a', a''$ , лежащих на предельном шестиугольнике в совмещенной плоскости напряжений (фиг. 2).

Легко видеть, что в частном случае чистого изгиба, т. е. при  $t_1 = t_2 = 0$ , пара точек  $a', a''$  лежит на прямой, проходящей через начало координат.

Аналогично факт нахождения точек  $a'$  и  $a''$  на предельной кривой приводит к двум уравнениям.

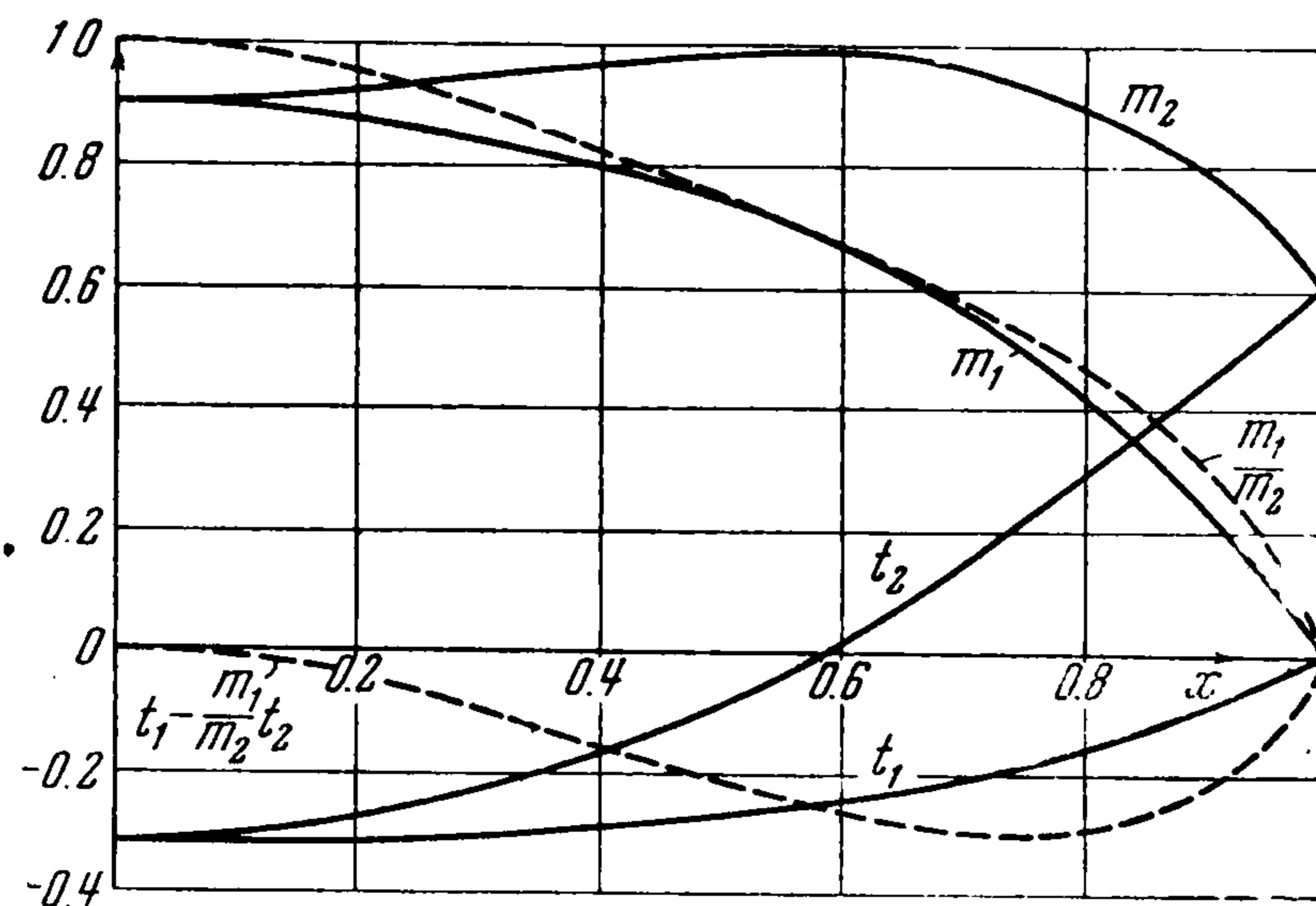
Если из четырех уравнений (3.2) и двух последних уравнений предельности исключить пять параметров  $\sigma_1', \sigma_2', \sigma_1'', \sigma_2'', z$ , то получим одно уравнение предельности для элемента оболочки:



Фиг. 2

$$F = (t_1, t_2, m_1, m_2) = 1 \quad (3.3)$$

Аналитический вид функции  $F$  меняется в зависимости от положения пары точек  $a', a''$ . Анализ вопроса показывает, что всего может



Фиг. 3

быть восемь существенно различных видов функции  $F$ . В рассматриваемом случае достаточно ограничиться только одним видом функции  $F$ , соответствующим положению точек  $a', a''$  на сторонах шестиугольника (6.3), представленного на фиг. 2.

К последнему выводу приводят следующие соображения:

1) в силу граничных условий (2.7) напряженное состояние в точке  $x=0$  изображается парой точек  $a_1', a_1''$  (фиг. 2), а в точке  $x=1$  парой точек  $a_2', a_2''$ ;

2) из соображений непрерывности перехода при  $A \rightarrow 0$  к случаю изгиба пластинки, свободно опертой по контуру, следует ожидать, что для достаточно малых  $A$  предельное напряженное состояние не выйдет за пределы пары сторон шестиугольника (6.1). Последующие вычисления докажут правильность этого предположения.

Преобразуем теперь (3.2) к виду

$$\begin{aligned} m_1 &= (1 - z^2) \bar{\sigma}_1, & \sigma_1 - t_1 &= \frac{z}{1 - z^2} m_1 \\ m_2 &= (1 - z^5) \bar{\sigma}_2, & \sigma_2 - t_2 &= \frac{z}{1 - z^2} m_2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$\sigma_1 = \sigma_1' + \sigma_2'', \quad \bar{\sigma}_1 = \sigma_1' - \sigma_1'', \quad \sigma_2 = \sigma_2' + \sigma_2'', \quad \bar{\sigma}_2 = \sigma_2' - \sigma_2''$$

Исключая  $z$  из (3.4), получим

$$m_2 \bar{\sigma}_2 = m_2 \bar{\sigma}_1, \quad m_2 (\sigma_1 - t_1) = m_1 (\sigma_2 - t_2), \quad (\sigma_2 - t_2)^2 = \bar{\sigma}_2 (\sigma_2 - m_2) \quad (3.5)$$

Для положения пары точек  $a'$ ,  $a''$  на сторонах шестиугольника (6.1) имеем условия

$$\sigma_2' = 1/2, \quad \sigma_2'' = -1/2, \quad 0 < \sigma_1' < 1/2, \quad -1/2 < \sigma_1'' < 0 \quad (3.6)$$

Отсюда

$$\sigma_1 = 0, \quad \bar{\sigma}_2 = 1, \quad -1/2 < \sigma_1 < 1/2, \quad 0 < \bar{\sigma}_1 < 1 \quad (3.7)$$

Вставляя значения  $\sigma$  из (3.7) в (3.5), получим

$$m_1 = m_2 \bar{\sigma}_1, \quad m_2 (\sigma_1 - t_1) = m_1 (-t_2), \quad (-t_2)^2 = 1 - m_2 \quad (3.8)$$

Сочетание (3.8) с (3.7) приводит к следующему виду предельного условия (3.3):

$$F(t_1, t_2, m_1, m_2) = m_2 + t_2^2 = 1 \quad (3.9)$$

которое верно при условиях

$$0 < m_1/m_2 < 1, \quad -1/2 < t_1 - (m_1/m_2) t_2 < 1/2 \quad (3.10)$$

**4. Вариационная проблема.** Обратимся к выводу недостающих уравнений текучести из вариационной проблемы принципа предельной напряженности (1.3). Составим функцию Лагранжа:

$$\begin{aligned} F^* &= F + \nu_0 (F - c) + \sum_1^2 \nu_i R_i = (1 + \nu_0) (m_2 + t_2^2) - \nu_0 c + \\ &+ \nu_1 \left( x \frac{dt_1}{dx} + t_1 - t_2 \right) + \nu_2 \left( x \frac{dm_1}{dx} + m_1 - m_2 + Ax^2 t_1 - px^2 \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Составим теперь уравнения Эйлера для функции  $F^*$ :

$$\begin{aligned} \nu_1 + Ax^2 \nu_2 - \frac{d}{dx} (x \nu_1) &= Ax^2 \nu_2 - x \frac{d\nu_1}{dx} = 0 \\ (1 + \nu_0) 2t_2 - \nu_1 &= 0 \\ \nu_2 - \frac{d}{dx} (x \nu_2) &= -x \frac{d\nu_2}{dx} = 0 \\ (1 + \nu_0) - \nu_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Из третьего уравнения системы (4.2) найдем  $v_2 = \text{const}$ ; комбинируя второе и четвертое уравнения (4.2), получим

$$v_1 = 2t_2(1 + v_1) = 2t_2v_2$$

Подставляя последнее в первое уравнение (4.2) и сокращая на  $v_2 = \text{const}$ , получим

$$x \left( Ax - 2 \frac{dt_2}{dx} \right) = 0 \quad \text{или} \quad t_2 = \frac{A}{4} x^2 + c \quad (4.3)$$

Теперь из первого уравнения равновесия (2.5) найдем

$$t_1 = \frac{A}{12} x^2 + c + \frac{c_1}{x} \quad (4.4)$$

И из условия предельности (3.9) имеем

$$m_2 = 1 - t_2^2 \quad (4.5)$$

Воспользовавшись граничными условиями (2.7), найдем  $C_1 = 0$  и  $C = -\frac{1}{12}A$ . Итак,

$$t_1 = \frac{1}{12}A(x^3 - 1), \quad t_2 = \frac{1}{12}A(3x^2 - 1), \quad m_2 = 1 - t_2^2 \quad (4.6)$$

Вставляя значения  $m_2$  и  $t_1$  из последнего во второе уравнение (2.5), после интегрирования и использования граничных условий (2.7) получим

$$m_1 = (1 - x^2) - \left( \frac{1}{12}A \right)^2 (1 - x) \left( -2x^4 - \frac{19}{5}x^3 - \frac{19}{5}x^2 + x + 1 \right) \quad (4.7)$$

и выражение для величины предельной нагрузки

$$\left| \frac{1}{3}P \right| = 1 + \frac{6}{5} \left( \frac{1}{12}A \right)^2 \quad (4.8)$$

По формулам (4.6) и (4.7) сделаны вычисления для частного случая значения параметра  $A = 3.8$ . Результаты вычислений представлены на фиг. 3, где показаны кривые изменения  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $m_1$  и  $m_2$  в предельном состоянии. На фиг. 3 также изображено изменение величин  $m_1/m_2$  и  $t_1 - (m_1/m_2)t_2$  и можно убедиться, что условия (3.10) выполняются.

Таким образом, для указанного значения параметра  $A$  приведенное решение (4.6), (4.7) имеет место. Легко видеть, что при  $A = 0$  решение переходит (как и должно быть) в решение задачи о пластическом течении круглой свободно опертой плиты под равномерно распределенной нагрузкой, при шестиугольной аппроксимации закона Мизеса.

Наконец, остается заметить, что значение предельной нагрузки из (4.8), помноженное на коэффициент 1.075, отличается от истинного не более чем на  $\pm 7.5\%$ , как то следует из общей теоремы принципа предельной напряженности об упроченном и ослабленном теле [1].

Поступила 15 VII 1956

#### ЛИТЕРАТУРА

Фейнберг С. М. Принцип предельной напряженности. ПММ, т. XII, вып. 1, 1948.