

О ЗАКОНАХ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ЧАСТНОГО КЛАССА ПУТЕЙ НАГРУЖЕНИЯ

В. Д. К л ю ш н и к о в

(Москва)

Существует некоторая группа явлений, наблюдаемых в экспериментах по пластическому деформированию металлов, которые не описываются существующими феноменологическими теориями пластичности. К таким явлениям относятся, например, эффект резкого излома траектории деформации в опытах на растяжение и кручение тонкостенных труб и некоторые сопутствующие этому эффекту явления^[1], а также явления изменения пластической деформации в таком процессе нагружения, при котором второй инвариант девиатора напряжений не меняется^[2-4]; кроме того, значение мгновенного модуля сдвига G_i , который, вероятно, играет большую роль в вопросах устойчивости, в некоторых экспериментах^[5, 6] довольно сильно отличается как от значения, даваемого изотропной теорией течения^[7-9], по которой G_i равен всегда упругому модулю сдвига G_0 , так и от значения

$$G_i = \frac{G_0}{1 + 3G_0(1/E_s - 1/E_0)} \quad (0.1)$$

даваемого изотропной теорией деформаций^[9]. (Через E_0 и E_s здесь обозначены упругий и секущий модули кривой растяжения.) В действительности G_i лежит между двумя этими значениями.

В настоящей статье на основании некоторых предположений для частного класса путей нагружений выводится закон связи между напряжениями и деформациями, который по крайней мере в общих чертах описывает указанные явления и дает значение G_i , лежащее между G_0 и (0.1). Из этого закона как частный случай следует простейшая изотропная теория течения, которая иногда называется законом Ланинга^[7].

1. Векторное представление тензоров. Произвольный тензор c_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), имеющий n ($n \leq 9$) независимых компонент, может быть, как и всякая система n чисел, представлен вектором C в n -мерном пространстве с координатами

$$c_k = f_k(c_{11}, \dots, c_{31}) \quad (k = 1, \dots, n) \quad (1.1)$$

Такие представления не имеют аналитической ценности, пока не указано, как связаны операции над тензорами с операциями над соответствующими векторами. Определим соответствие так, что умножение тензора c_{ij} на число λ соответствует умножению вектора C на это число λ (т. е. если c_{ij} соответствует вектор C , то надо, чтобы тензору λc_{ij} соответствовал вектор λC), сложение двух тензоров a_{ij} и b_{ij} соответствует сложению векторов A и B , и, наконец, потребуем, чтобы результат свертывания двух тензоров по обоим индексам совпадал с результатом скалярного перемножения двух соответствующих векторов:

$$A \cdot B = a_{ij} b_{ij} \quad (1.2)$$

Из первых двух требований вытекает, что j_k — линейные функции компонент тензора и, следовательно, обратно

$$a_{ij} = \sum_k q_{ijk} a_k, \quad b_{ij} = \sum_k q_{ijk} b_k \quad (1.3)$$

Внося (1.3) в (1.2), получим для определения q_{ijk} систему столько уравнений, сколько неизвестных q_{ijk} . Решение этой системы существует, и для девиаторов все три условия будут удовлетворены, если взять

$$\begin{aligned} c_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} c_{11}, & c_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (c_{22} - c_{33}) \\ c_3 &= \sqrt{2} c_{12}, & c_4 &= \sqrt{2} c_{23}, & c_5 &= \sqrt{2} c_{31} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Это представление для векторов напряжений и деформаций использовано в [10].

Таким образом, вместо рассмотрения тензоров и действий над ними, мы можем рассматривать соответствующие векторы и действия над векторами, если действия над тензорами не выходят за пределы сложения, умножения на число и свертывания по обоим индексам.

Рассматривая напряженно-деформированное состояние в точке тела, поставим в соответствие девиатору напряжений S_{ij} вектор напряжений P и девиатору деформаций ε_{ij} вектор деформаций \mathcal{E} . Девиатор ε_{ij} мы будем разбивать на два девиатора: упругий девиатор $\varepsilon_{ij}^y = S_{ij}/2G_0$, где G_0 — упругий модуль сдвига, и $\varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^y$ — пластический девиатор, и ставить им в соответствие вектор упругой деформации $\mathcal{E}^y = P/2G_0$ и пластической деформации $\mathcal{E}^p = \mathcal{E} - \mathcal{E}^y$.

Длины векторов будем обозначать той же буквой, что и вектор, и помнить, что длина данного вектора по (1.2) есть квадратный корень из модуля второго инварианта соответствующего девиатора. Например,

$$p = |P| = \sqrt{P \cdot P} = \sqrt{S_{ij} \cdot S_{ij}} = \sqrt{|I_2|} \quad (1.5)$$

Процесс изменения девиатора представится некоторой кривой в векторном пространстве, которую выпишет при этом изменении конец соответствующего вектора. Годограф P будем называть путем нагружения, а годограф \mathcal{E}^p — путем пластической деформации. Радиальным нагружением будем называть такой процесс изменения S_{ij} , когда путь нагружения есть прямая из начала координат. Под простым нагружением понимается радиальное нагружение из естественного, изотропного состояния материала.

Легко проверить, что из определения связи тензора и вектора следует, что операция дифференцирования тензора соответствует операции дифференцирования вектора. Так как дифференциал вектора есть свободный вектор, то вектор $d\mathcal{E}^p$, например, всегда можно откладывать из конца вектора P , что мы и будем постоянно делать.

Через $d\sigma$ будем обозначать дифференциал длины дуги пути нагружения. По определению длины дуги и по (1.2) имеем

$$d\sigma = |dP| = \sqrt{dP \cdot dP} = \sqrt{|dS_{ij} \cdot dS_{ij}|} \quad (1.6)$$

и, следовательно, $d\sigma$ есть квадратный корень из модуля второго инва-

рианта девиатора приращения напряжений. Обозначим через ρ единичный вектор напряжений $\rho = \mathbf{P}/p$. Видно, что если \mathbf{P} соответствует девиатору напряжений S_{ij} , то ρ соответствует направляющему тензору напряжений S_{ij}^* , причем

$$d\rho = d\left(\frac{\mathbf{P}}{p}\right) = \frac{d\mathbf{P}}{p} - \mathbf{P} \frac{dp}{p^2} \quad (1.7)$$

$$|d\rho| = \sqrt{d\rho \cdot d\rho} = \frac{1}{p} \sqrt{d\sigma^2 - dp^2}$$

Приращение пластической работы по определению равно $S_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij}^p$, и, следовательно, по (1.2) имеем

$$dW^p = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{\Xi}^p \quad (1.8)$$

В дальнейшем разыскание связи между напряжениями и деформациями в пластической области заменяется разысканием связи между соответствующими векторами. При этом важно, чтобы при переходе от найденной векторной связи к тензорной в последней выполнялась тензорная размерность, иначе найденный закон нельзя считать физическим.

2. Основные положения в теории пластичности упрочняющегося, первоначально изотропного материала. Известно, что при умеренных пластических деформациях материал ведет себя упруго по отношению к объемной деформации. Отсюда следует, что при умеренных деформациях разыскание связи между тензорами напряжений и деформаций сводится к разысканию связи между их девиаторами S_{ij} и ε_{ij} .

Считается, что материал находится в упругом состоянии, если любое бесконечно малое изменение напряжений не вызывает изменения остаточных или пластических деформаций ε_{ij}^p . Если это условие не выполнено, то материал находится в пластическом состоянии. Упругая область есть множество всех упругих состояний, которые могут быть достигнуты из данного без изменения остаточных деформаций. Границей упругой области является множество девиаторов напряжений пластического состояния, которые прилегают к этой области. В пространстве вектора напряжений эта граница является поверхностью, которая называется поверхностью нагружения [8].

Из любого состояния материал можно деформировать упруго (упругая разгрузка), и, значит, вектор напряжений не может выйти за пределы поверхности нагружения. В процессе пластического деформирования поверхность нагружения изменяется так, что все время проходит через конец вектора нагружения. Изменение поверхности нагружения зависит от изменения напряжения непрерывно [7].

Если часть пути нагружения лежит на поверхности нагружения, построенной для начальной точки этой части пути (нейтральное нагружение), то для такого отрезка пути закон упругости должен совпадать с законом пластичности. Иными словами, при подходе как из упругой области, так и из пластической к пути, соответствующему нейтральному нагружению, предельные пути деформации совпадают (условие непрерывности [11]).

При пластической деформации приращение работы пластической деформации dW^p всегда положительно (условие необратимости [12]).

Понятие упрочнения, определенное для простого нагружения, требует разумного обобщения для произвольных путей нагружения. Одним из таких обобщений является фундаментальное определение упрочнения [13], которое состоит в следующем.

Пусть к уже нагруженному телу прикладываются и затем снимаются добавочные напряжения так, что они вызывают добавочные пластические деформации. Тогда материал называется упрочняющимся, если работа добавочных напряжений в замкнутом цикле их приложения и снятия на добавочных деформациях положительна. Если при этом работа равна нулю, то материал называется упруго-идеальнопластическим. Вероятно, такое обобщение понятия упрочнения и идеальной пластичности является единственно правильным, так как недавно показано [41], что невыполнение для реального материала сформулированных выше условий иногда влечет неустойчивость решения.

Из определения упрочнения следует [13], что поверхность нагружения не вогнута и вектор $d\mathcal{E}^p$ нормален к поверхности нагружения в точке P , если в этой точке поверхность нагружения имеет непрерывную нормаль; $d\mathcal{E}^p$ лежит внутри фигуры, образованной нормальными в окрестности точки P , если в ней на поверхности нагружения имеется коническая точка.

Большинство известных законов пластичности удовлетворяет одному специфическому условию, которое впервые было оформлено под названием постулата изотропии в [10] и состоит в том, что зависимость между напряжениями и деформациями для первоначально изотропного материала такова, что внутренняя геометрия пути деформации зависит только от внутренней геометрии пути нагружения. Если какой-либо путь нагружения получается из данного ортогональным преобразованием, то соответствующий ему путь деформации получается из данного тем же самым ортогональным преобразованием.

Многочисленные эксперименты указывают на одну особенность пластической деформации изотропных материалов, которая в наших терминах означает, что для плоского пути нагружения путь деформации и, следовательно, путь пластической деформации будет плоским, причем плоскости нагружения и деформации будут совпадать.

3. Вновь вводимые гипотезы. Будем разыскивать соотношение между напряжениями и деформациями для плоских путей нагружения введением дополнительных предположений.

а) Локально-минимальное свойство кривой нагружения. Из некоторых последних экспериментальных данных [3, 4, 5] следует, что изменение кривой нагружения происходит так, что в точке P на ней образуется угловая точка. Это положение должно являться частным следствием какого-то более общего свойства кривой нагружения. Таким свойством, из которого совместно с условием невогнутости кривой нагружения вытекает принцип угловой точки, может быть следующее свойство, которое в дальнейшем и принимается за исходное.

Кривая нагружения в процессе пластической деформации изменяется так, что площадь, заключенная между двумя кривыми нагружения, для двух близких точек пути нагружения в окрестности этих точек минимальна.

Вблизи любой точки пути нагружения будем заменять кривую нагружения углом, составленным касательными и кривой в этой точке, и будем называть этот угол углом нагружения.

б) Гипотеза предельных свойств деформации. Предполагается, что данный путь нагружения можно заменить ломаным и при этом для любого закона стремления ломаного пути к данному предельный путь пластической деформации будет совпадать с путем пластической деформации для данного пути нагружения. Это предположение по существу выражает ту мысль, что малые отклонения пути нагружения вызывают малые отклонения пути пластической деформации, что и является основой всех экспериментальных исследований.

В дальнейшем будем заменять путь нагружения ломаной из бесконечно малых прямолинейных участков по лучам из начала (радиальные участки) и по сторонам углов нагружения, построенных для концевых точек последнего предшествовавшего радиального участка. Заметим, что поскольку в соответствии с условием непрерывности малый путь по стороне угла нагружения не вызывает изменения пластической деформации, то этот путь можно заменить любым упругим.

с) Гипотеза свойств деформации на участке радиального нагружения. Предполагается, что на любом участке радиального нагружения направление вектора $d\mathcal{E}^p$ совпадает с направлением биссектрисы угла нагружения в этой точке пути нагружения, а длина $d\mathcal{E}^p$ пропорциональна длине данного радиального участка с коэффициентом, зависящим только от длины p вектора напряжений.

Это предположение является обобщением некоторых свойств простого нагружения на произвольное радиальное нагружение и, возможно, является сильным упрощением действительного положения.

Сделаем некоторые замечания по поводу введенных гипотез. Гипотеза (а) нужна для обоснования лишь одной, довольно очевидной детали при построении угла нагружения (§ 5) и может быть заменена простым предположением о существовании угловой точки нагружения, если узаконить эту деталь. Гипотеза (б) по существу является расширением обычного условия непрерывности и позволяет установить закон пластичности для произвольного пути нагружения, если закон связи известен лишь для одного вида пути нагружения из произвольного первоначально-деформированного состояния.

В качестве такого элементарного типа здесь принято радиальное нагружение, обладающее простейшей геометрией, однако может быть более удобным другой тип.

4. Вывод закона пластичности для плоского нагружения. Если обозначить через n единичный вектор биссектрисы угла нагружения такой, что $p \cdot n > 0$, то гипотеза (с) дает для участка радиального нагружения

$$d\mathcal{E}^p = \Phi(p) \Delta p n \quad (4.1)$$

Будем в дальнейшем обозначать через φ и ψ углы, которые составляет перпендикуляр к направлению P со сторонами угла нагружения в данной точке P , причем всегда будем считать, что φ — это тот угол, который обращен в сторону последующего пути нагружения (фиг. 1). Легко видеть, что при таких обозначениях угол χ , который составляет направление векторов n и ρ , выражается так:

$$\chi = \frac{1}{2} (\varphi - \psi) \quad (4.2)$$

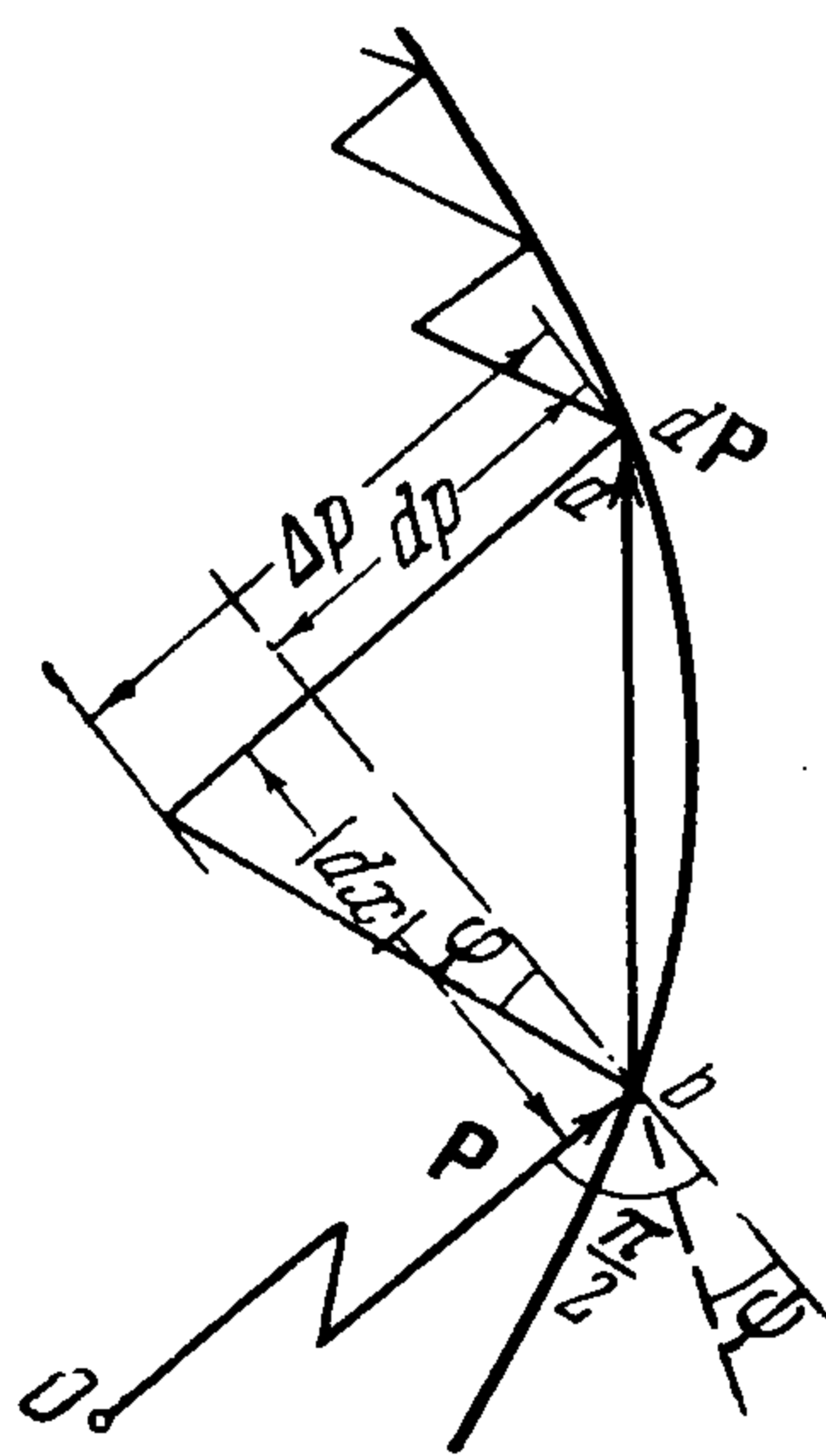
Заменяем данный путь нагружения указанным выше ломаным путем и рассмотрим приращение деформации в некоторой точке a радиального участка (фиг. 1). Если dp есть разница p в точках a и b , то из фигуры видно, что

$$\Delta p = dp + \operatorname{tg} \varphi |dx| \quad (4.3)$$

$$(|dx| = \sqrt{|dP|^2 - dp^2})$$

и так как $|dP| = d\sigma$, то

$$\Delta p = dp + \operatorname{tg} \varphi \sqrt{d\sigma^2 - dp^2} \quad (4.4)$$



Фиг. 1

Поскольку n лежит в плоскости нагружения, то он может быть представлен через два любых неколлинеарных вектора плоскости нагружения. За эти векторы возьмем единичные векторы ρ и $dp/|dp|$, и тогда

$$n = a\rho + bdp/(dp)$$

Так как $n \cdot \rho = \cos \chi$ и $|n| = 1$, то a и b просто вычисляются. В результате для n получим

$$n = \cos \chi \cdot \rho + \sin \chi \cdot dp/|dp| \quad (4.5)$$

При простом нагружении $d\sigma = dp$, $\chi = 0$ и $\rho = \text{const}$, и поэтому уравнение (4.1) при учете (4.4) и (4.5) дает

$$d\mathcal{E}^p = \Phi(p) dp$$

Поскольку $d\mathcal{E}^p$ имеет в этом случае постоянное направление, то $|d\mathcal{E}^p| = d|\mathcal{E}^p| = d\mathcal{E}^p$ и, следовательно, при простом нагружении имеем

$$\frac{d\mathcal{E}^p}{dp} = \Phi(p) > 0 \quad (4.6)$$

Таким образом, функция $\Phi(p)$ вполне определяется опытом на простое нагружение.

На основании (4.1) и (4.5) и так как $\Phi(p)$, $\cos \chi$ и p всегда положительны, условие необратимости превращается в условие, $\Delta p > 0$, которое и является условием нагружения. При $\Delta p < 0$ пластические деформации не меняются и связь приращений напряжений и деформаций вычисляется по упругому закону. Предельный случай $\Delta p = 0$ дает нейтральное нагружение, и в соответствии с условием непрерывности уравнение $\Delta p = 0$ определяет кривую нагружения для данной точки P пути нагружения. На основании (4.4) уравнение $\Delta p = 0$ дает

$$\frac{dp}{d\sigma} = \sin \varphi \quad (4.7)$$

На основании всего этого закон пластичности для плоского нагружения в векторной форме имеет вид:

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}^p &= \Phi(p) \Delta p \left[\cos \kappa p + \sin \kappa \frac{dp}{|dp|} \right] && \text{при } \Delta p > 0 \\ d\mathcal{E}^p &= 0 && \text{при } \Delta p \leq 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

при этом всегда $d\mathcal{E} = d\mathcal{E}^y + d\mathcal{E}^p$ и $d\mathcal{E}^y = P/2G_0$.

Записывая (4.8) в координатной форме, умножаем обе части на q_{ijk} и суммируем по k . Так как по определению и по формуле (1.7)

$$\begin{aligned} \sum q_{ijk} d\mathcal{E}_k &= d\mathcal{E}_{ij}, & \sum q_{ijk} dp_k &= dS_{ij}, & \sum q_{ijk} p_k &= S_{ij}^* \\ \sum q_{ijk} \frac{dp_k}{|dp|} &= \frac{dS_{ij}^* p}{\sqrt{d\sigma^2 - dp^2}} \end{aligned}$$

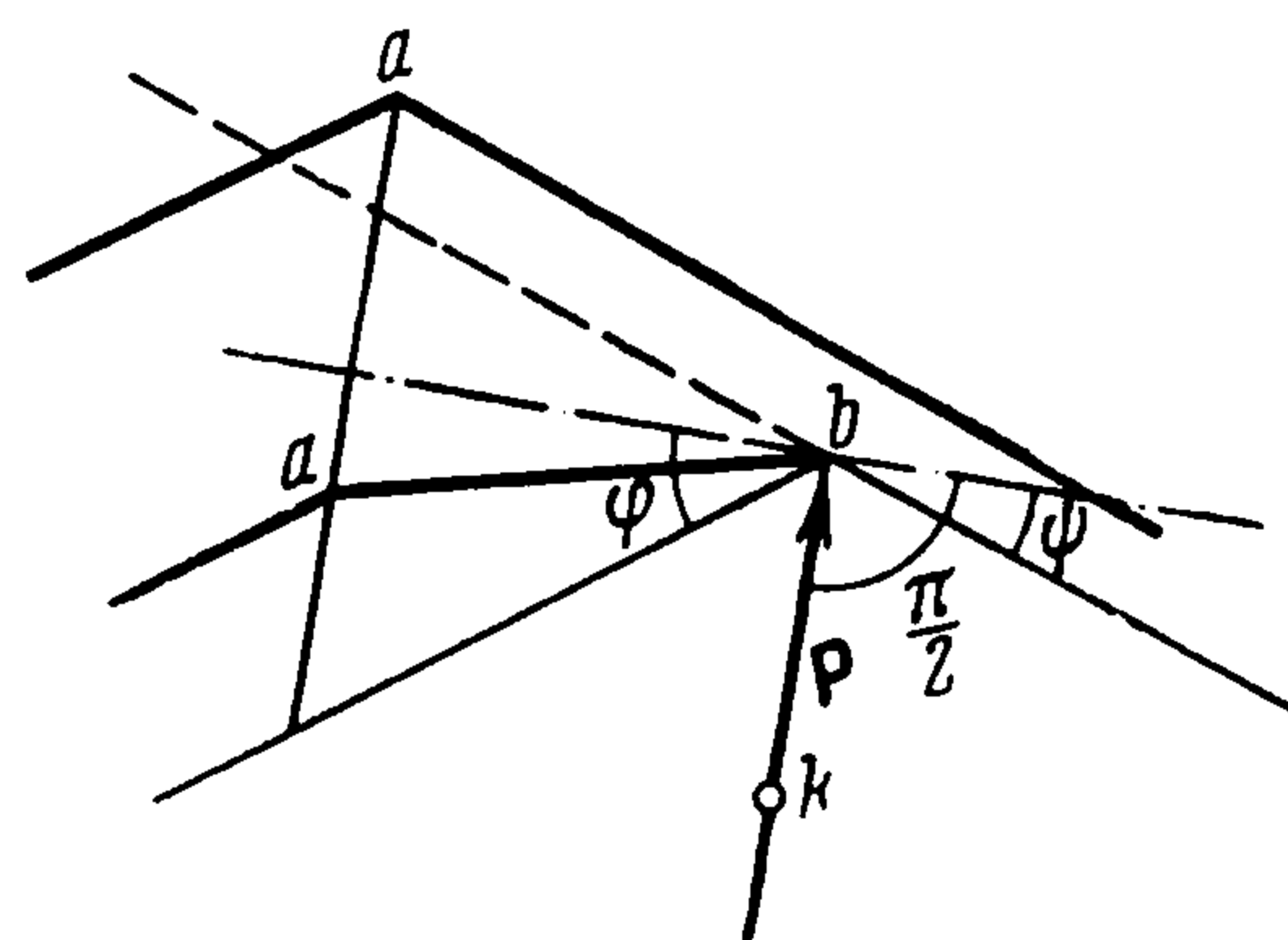
то в результате получим

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}_{ij}^p &= \Phi(p) \Delta p \left[S_{ij}^* \cos \kappa + dS_{ij}^* \frac{p \sin \kappa}{\sqrt{d\sigma^2 - dp^2}} \right] && \text{при } \Delta p > 0 \\ d\mathcal{E}_{ij}^p &= 0 && \text{при } \Delta p \leq 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Заметим, что при этом конкретный вид q_{ijk} не имеет значения.

Поскольку φ , κ , p и σ могут быть представлены как результаты скалярных произведений некоторых векторов, то на них можно смотреть как на результаты свертывания некоторых тензоров и, следовательно, как на тензорные инварианты. Поэтому правая часть (4.9) является тензором и в (4.9) тензорная размерность выполняется.

5. Некоторые формулы для величин κ , φ и ψ . Исследуем закон построения угла нагружения в точке a по углу нагружения в точке b (фиг. 1). На основании непрерывности изменения кривой нагружения левая сторона угла нагружения a должна с точностью до бесконечно малой высшего порядка по сравнению с Δp пойти параллельно левой стороне угла нагружения для точки b . Если точка a лежит ниже пунктирной прямой (фиг. 2), то правая сторона не может пройти ниже точки b . Допустим противное. Пусть правая сторона угла в точке a проходит через точку k , причем отрезок kb имеет ту же величину малости, что и Δp . Тогда, двигаясь от точки a в точку b обратно, мы в точке b накопим пластическую деформацию того же порядка малости, что и Δp . Возвращаясь снова в точку a , пользуясь тем же методом построения угла нагружения, мы снова накопим пластическую деформацию того же порядка, что и Δp . Совершая такие малые колебания вектора напряжений, мы в конце концов накопим конечную или даже очень большую пластическую деформацию. При этом нельзя считать, что векторный закон сложения приращений пластических деформаций погасит нарастание, ибо тогда не выполнялся бы фундаментальный постулат упрочнения. При наших предположениях легко проверить, что такого погашения не произойдет. Таким образом, приходим в противоречие с действитель-



Фиг. 2

ным положением вещей, и, следовательно, сделанное выше допущение невозможно.

Из гипотезы а) вытекает, что если точка a лежит ниже пунктирной прямой, то правая сторона угла нагружения в точке a не может пройти и выше точки b . Таким образом, правая сторона угла в точке a в этом случае должна пройти через точку b .

Если точка a лежит выше пунктирной прямой, то в силу непрерывности изменения поверхности нагружения правая сторона угла нагружения в точке a будет параллельна правой стороне угла нагружения в точке b . На основании сказанного с точностью до бесконечно малых высшего по сравнению с Δp порядка

$$\chi_a = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\varphi_b - \arctg \frac{dp}{|dx|} \right) & \text{при } \frac{dp}{|dx|} \leq \operatorname{tg} \psi_b \\ \chi_b & \text{при } \frac{dp}{|dx|} \geq \operatorname{tg} \psi_b \end{cases} \quad (5.1)$$

Пусть для некоторой точки P_0 пути нагружения нам известно ψ_0 и φ_0 и пусть для дальнейшего пути $dp/|dx| \leq \operatorname{tg} \psi_0$ и является невозрастающей функцией. Тогда в соответствии с (5.1) для дальнейшего пути

$$\chi = \frac{1}{2} \left(\varphi - \arctg \frac{dp}{|dx|} \right) \quad (5.2)$$

Установить зависимость φ от пути нагружения на основании введенных гипотез невозможно. Однако для путей из естественного состояния, на которых нет точек перегиба, вероятно, с большой степенью точности можно считать φ зависящим только от p и, значит, считать φ таким же, как и при простом нагружении. (Для путей из естественного состояния, на которых $dp/|dx|$ в любой точке больше, чем φ , при простом нагружении в эту точку, вероятно, так же точно считать φ функцией только p и $\psi = \varphi$, т. е. $\chi = 0$).

6. Некоторые примеры применения полученных результатов. Если в плоскости нагружения выбраны орты \mathbf{i} и \mathbf{j} , то всякий вектор этой плоскости может быть в них представлен. Полагая

$$\frac{d\rho}{|d\rho|} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} \quad (6.1)$$

из условия ортогональности ρ и $d\rho$, и так как вектор $d\rho/|d\rho|$ единичный, получим

$$a = \mp \frac{p_\beta}{p}, \quad b = \pm \frac{p_\alpha}{p} \quad (6.2)$$

где p_α и p_β — проекции \mathbf{P} на орты \mathbf{i} и \mathbf{j} и верхние знаки соответствуют $d\rho$, направленному против часовой стрелки.

Внося (6.1) в (4.8) для приращения пластической деформации, получим

$$\begin{aligned} d\varepsilon_\alpha^p &= \Phi \frac{\Delta p}{p} \left[p_\alpha \cos \chi \mp p_\beta \sin \chi \right] \\ d\varepsilon_\beta^p &= \Phi \frac{\Delta p}{p} \left[p_\beta \cos \chi \pm p_\alpha \sin \chi \right] \end{aligned} \quad (6.3)$$

Здесь ε_α^p и ε_β^p — проекции вектора ε^p на орты \mathbf{i} и \mathbf{j} .

Пусть до точки $p_\alpha = p$, $p_\beta = 0$ шло простое нагружение и пусть затем добавлено малое dP такое, что $dp_\alpha = 0$, $dp_\beta = d\sigma$ (ортогональное нагружение). Вычислим величину

$$G_i = \frac{1}{2} \left[\frac{dp_\beta}{d\varepsilon_\beta^p + d\varepsilon_\beta^y} \right]_{p_\beta=0} \quad (6.4)$$

Пользуясь формулой (5.2) (для данного пути это законно) при учете того, что $dp/|dx| = 0$, получим $\chi = \varphi/2$. Затем, используя (6.3) с подстановкой $dp = 0$, $p_\beta = 0$, получим для G_i следующее значение:

$$G_i = \frac{G_0}{1 + 2G_0\Phi(p) \operatorname{tg} \varphi \sin \frac{\varphi}{2}} \quad (6.5)$$

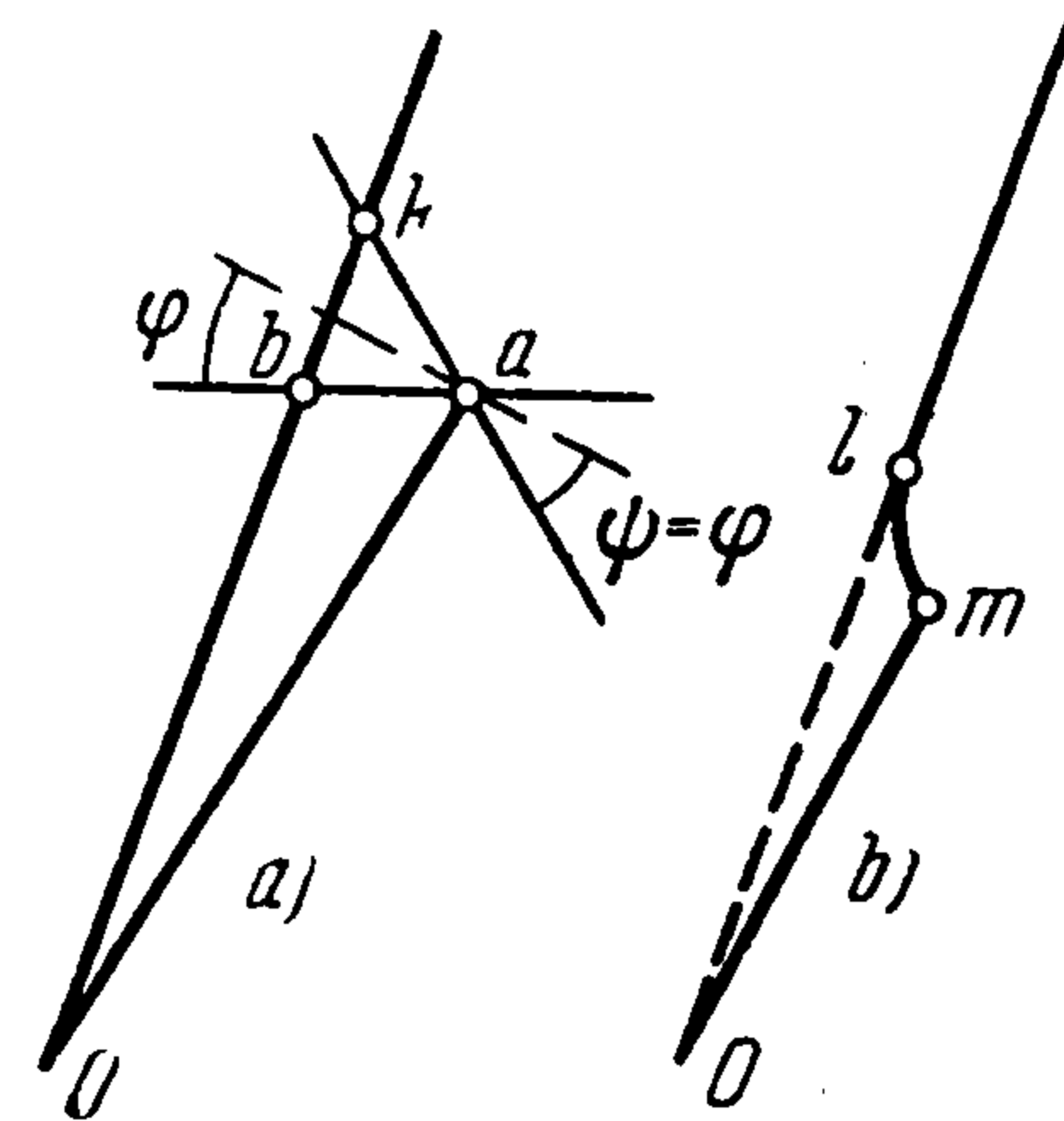
В этой формуле в действительности φ есть функция только p .

Для опытов по растяжению с кручением тонких труб, направляя оси 1, 2, 3 в данной трубе по оси, касательной и радиусу трубы, по формулам (1.4) получим

$$p_1 = \sqrt{3} S_{11}/\sqrt{2}, \quad p_3 = \sqrt{2} S_{12}, \quad p_2 = p_4 = p_5 = 0$$

и аналогичные значения для компонент пластической деформации. Таким образом, нагружение является плоским и можно просто положить $p_\alpha = p_1$, $p_\beta = p_3$ и $\varepsilon_\alpha^p = \varepsilon_1^p$, $\varepsilon_\beta^p = \varepsilon_3^p$. Заменяв в выражении для G_i p_β , ε_β на S_{12} , ε_{12} , увидим, что G_i является мгновенным модулем сдвига. Следовательно, формула (6.5) дает значение мгновенного модуля сдвига для закона пластичности (4.9).

Легко видеть, что в первый момент ортогонального нагружения, в частности в первый момент кручения при постоянном растяжении тонкой трубы, χ терпит разрыв непрерывности и таким образом путь пластической деформации будет в точке, соответствующей началу ортогонального нагружения, иметь конечный излом. Это явление было в действительности обнаружено экспериментально Фейгиным [1].



Фиг. 3

Пусть материал был нагружен простым образом до некоторого значения P_a и после полного разгружения вновь нагружен радиально по пути, отличающемуся от первоначального на малый угол α (фиг. 3, a). Считая, что метод построения углов нагружения, описанный в § 5, здесь дает малую ошибку, получим для последующего радиального нагружения следующее значение:

$$\chi = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\varphi_a - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{p_1 - p_0}{\alpha p_0} \right) & \text{при } p_0 \leq p \leq p_k \\ 0 & \text{при } p > p_k \end{cases}$$

Так как при этом $d\varepsilon_\beta^p/d\varepsilon_\alpha^p = -\operatorname{tg} \chi$, то получим путь пластической деформации, показанный на фиг. 3, b, где точка l соответствует точке k и путь пластической деформации при последнем радиальном нагружении отсчитывается от точки m . Это явление очень близко к явлению, обнаруженному Фейгиным на опытах по растяжению и кручению тонких труб [1].

Наконец, рассмотрим следующий процесс нагружения. Пусть до некоторой точки P_0 идет простое нагружение, а затем путь нагружения идет по дуге окружности радиуса p_0 (круговое нагружение). Считается для определенности, что дуга проходится против часовой стрелки (фиг. 4). Для такого пути формула (5.2) имеет силу, и так как на круговом пути $dp/|dx|=0$, то формула (5.2) дает

$$\alpha = \frac{1}{2} \varphi(p_0) = \text{const} \quad (6.6)$$

при этом мы считаем, что φ есть функция только p . Переходя к полярным координатам α и p (фиг. 4), найдем

$$\cos \alpha = \frac{p_\alpha}{p_0}, \quad \sin \alpha = \frac{p_\beta}{p_0}$$

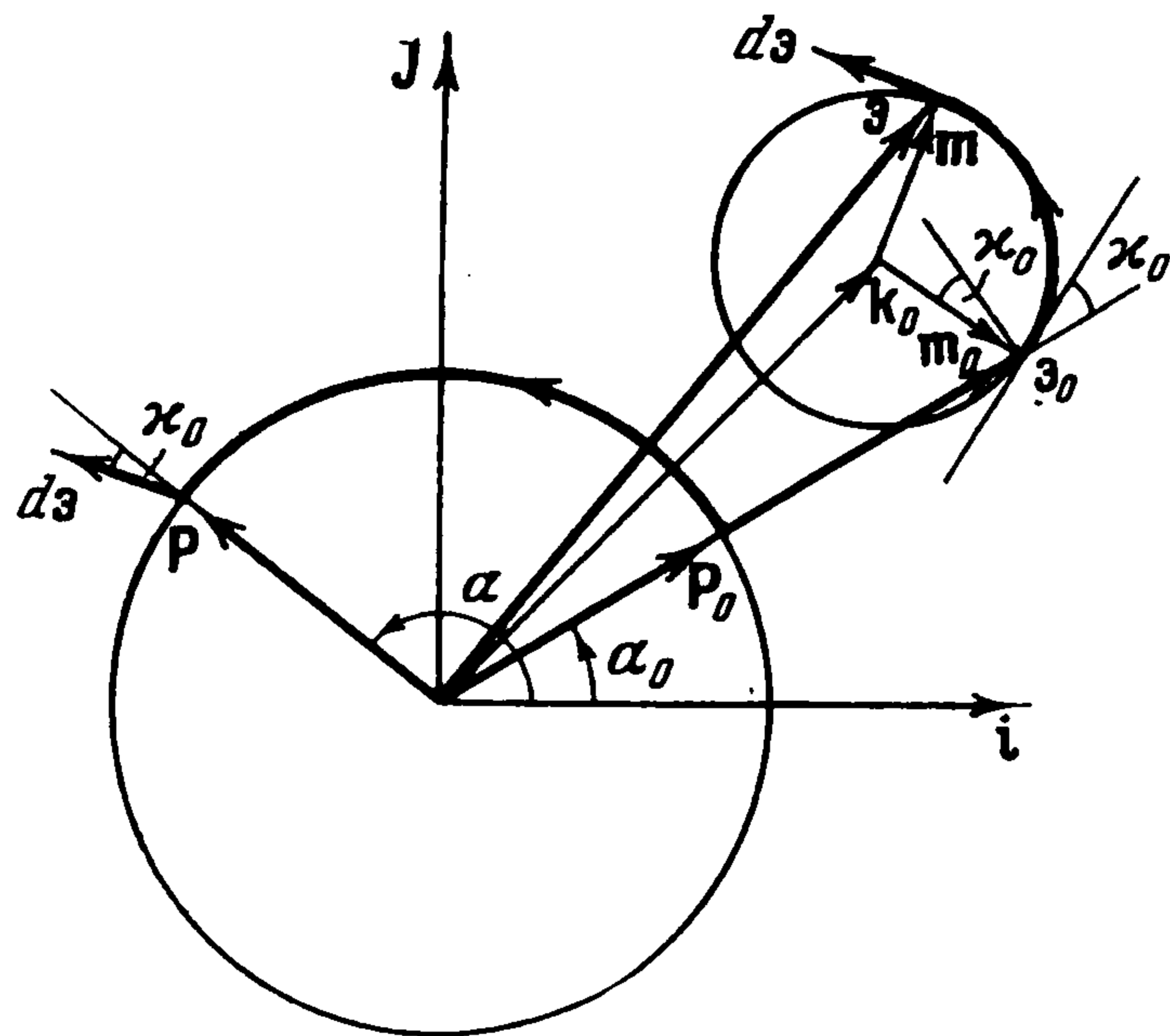
$$d\sigma = p_0 d\alpha$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_0}^{\alpha} p_\alpha d\sigma &= p_0^2 \sin \alpha \Big|_{\alpha_0}^{\alpha} = p_0^2 \frac{p_\beta}{p_0} \Big|_{\alpha_0}^{\alpha} = \\ &= p_0 p_\beta \Big|_{p_\beta^0}^{p_\beta} = (p_\beta - p_\beta^0) p_0 \quad (6.7) \end{aligned}$$

и аналогично

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} p_\beta d\sigma = -(p_\alpha - p_\alpha^0) p_0 \quad (6.8)$$



Фиг. 4

Интегрируя уравнения (6.3) для данного пути с учетом (6.6), (6.7) и (6.8) и находя константы интегрирования из закона простого нагружения, получим

$$\varepsilon_\alpha'' = \Phi_0 p_0 \operatorname{tg} \varphi_0 \left[(p_\beta - p_\beta^0) \cos \frac{\varphi_0}{2} + (p_\alpha - p_\alpha^0) \sin \frac{\varphi_0}{2} \right] + \varepsilon_0'' \quad (6.9)$$

$$\varepsilon_\beta'' = \Phi_0 p_0 \operatorname{tg} \varphi_0 \left[-(p_\alpha - p_\alpha^0) \cos \frac{\varphi_0}{2} + (p_\beta - p_\beta^0) \sin \frac{\varphi_0}{2} \right] + \varepsilon_0''$$

где ε_0'' — второй инвариант девиатора пластических деформаций при простом нагружении, p_α и p_β — проекции p на орты i и j .

Обозначим

$$\mathbf{R} = r \cos \frac{\varphi_0}{2} - \rho \sin \frac{\varphi_0}{2}$$

где $r = p_\alpha j - p_\beta i$ — вектор, совпадающий с $dp/|dp|$ при движении против часовой стрелки. Таким образом, вектор \mathbf{R} есть ρ , повернутый в сторону движения на угол $\frac{1}{2}\varphi_0 + \frac{1}{2}\pi$, или вектор $dp/|dp|$, повернутый в сторону движения на угол $\frac{1}{2}\varphi_0$. Формулы (6.9) теперь можно записать в векторной форме так:

$$\varepsilon'' = + \Phi_0 p_0 \operatorname{tg} \varphi_0 [\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}] + \varepsilon_0'' \rho_0 \quad (6.10)$$

Заметим, что, как легко проверить, $|\mathbf{R}| = 1$. Теперь просто графически построить путь пластической деформации для кругового нагружения, что и выполнено на фиг. 4, где использованы обозначения

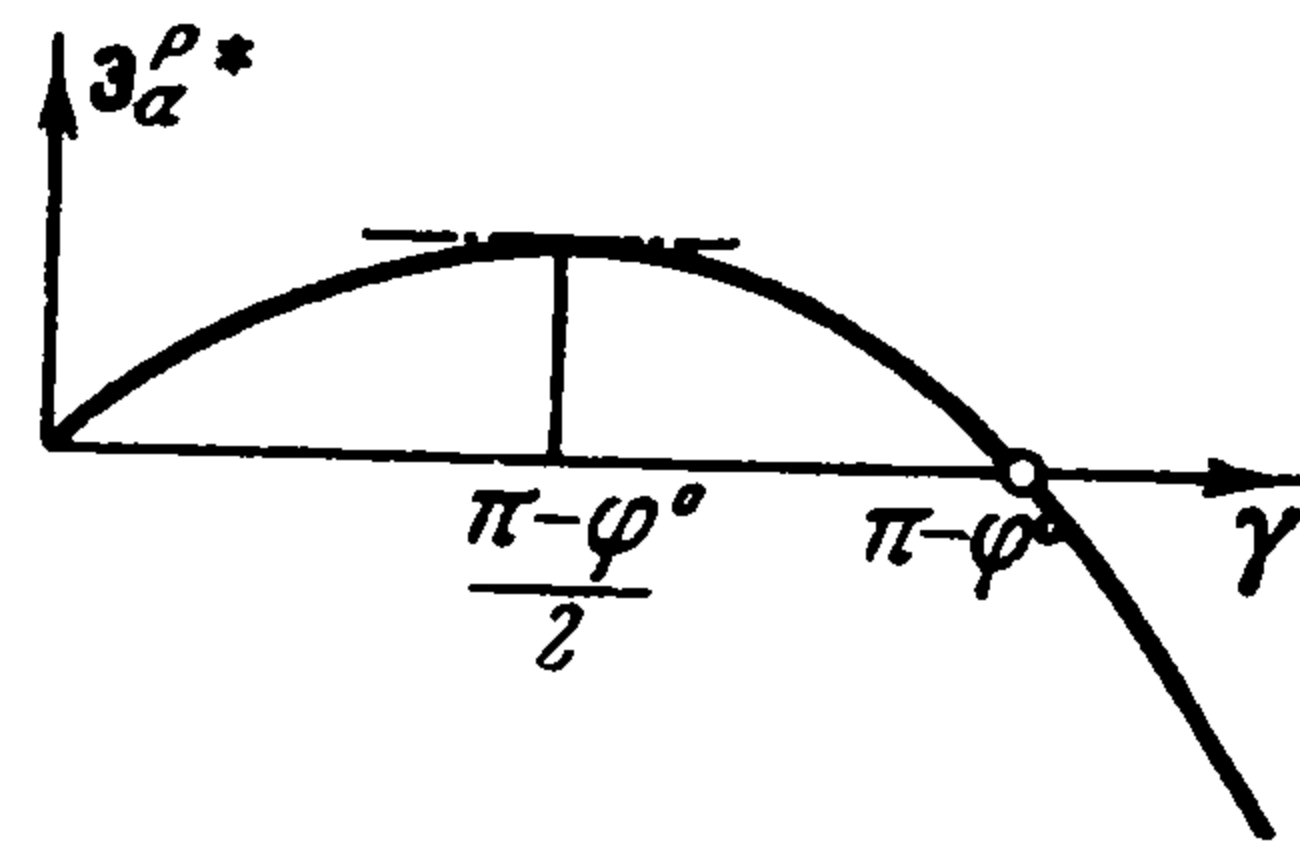
$$\mathbf{k}_0 \Phi_0 p_0 \operatorname{tg} \varphi_0 \mathbf{R}_0 + \varepsilon_0'' \rho_0, \quad \mathbf{m} = - \Phi_0 p_0 \operatorname{tg} \varphi_0 \mathbf{R}$$

Следовательно, путь пластической деформации для кругового нагру-

жения тоже окружность радиуса $\Phi_0 \operatorname{tg} \varphi_0 / \rho_0$ с центром в точке k_0 , проходящая в ту же сторону, что и окружность нагружения.

Если бы был справедлив критерий нагружения Мизеса ($\varphi = 0$), то при круговом нагружении ε^p было бы постоянно и равно ε_0^p в конце участка простого нагружения. Для превышения над пластической деформацией по Мизесу в случае, если участок простого нагружения совпадает с ортом i , нетрудно получить

$$\varepsilon_\alpha^{*p} = \Phi_0 \rho_0 \operatorname{tg} \varphi_0 \left[\sin \left(\alpha + \frac{\varphi_0}{2} \right) - \sin \frac{\varphi_0}{2} \right]$$



Фиг. 5

и аналогично для второй компоненты. В предположении, что $\varphi_0 < 1/2\pi$ эта зависимость представлена графически на фиг. 5.

В работе [4] даны кривые зависимости превышения компонент пластической деформации над постоянной Мизеса в опыте на круговое нагружение тонкой трубы, подверженной действию растяжения и внутреннего давления. Если, пользуясь (1.4), как в случае растяжения с кручением, пересчитать полученные там кривые к координатам p_α , p_β и ε_α^p , ε_β^p , то для превышения ε_α^{*p} получится кривая, по форме совпадающая с кривой зависимости, представленной на фиг. 5. Можно думать, что исходные формулы в общем отражают это явление.

Поступила 29 III 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Фейгин М. Неупругое поведение при совместном действии растяжения и кручения. Сб. переводов «Механика», вып. 3, 1956.
2. Batdorf S. V. Theories of Plastic Buckling. J. Aer. Sci. vol. 16, No 7, 1949.
3. Мэрин Ж., Ху Л. Анизотропные функции нагружения для сложных напряженных состояний в пластической области. Сб. переводов «Механика», вып. 2, 1956.
4. Hu L. W., Marin J. Biaxial Plastic Stress-Strain Relations of a Mild Steel for Variable Stress Ratios. Transactions of the ASME, vol. 78, No 3, 1956.
5. Жуков А. М., Работнов Ю. Н. Исследование пластических деформаций стали при сложном нагружении. Инженерный сборник, т. 18, 1954.
6. Нахди П., Роули Дж. Экспериментальное изучение зависимости между напряжениями и деформациями в пластической области при двухосном напряженном состоянии. Сб. переводов «Механика», вып. 3, 1955.
7. Prager W. The stress-Strain Laws of the Mathematical Theory of Plasticity — a Survey of Recent Progress. J. Appl. Mech., vol. 15, No 1, 1948.
8. Prager W. Recent Developments in the mathematical Theory of Plasticity. J. Appl. phys., vol. 20, No 1, 1949.
9. Budiansky B. A., Dow N. F., Peters R. W., Shepherd R. P. Experimental Studies of Polyaxial Stress — Strain Laws of Plasticity. Proc. of the First U. S. Nat. Congr. of Appl. Mech., ASME, 1951.
10. Ильюшин А. А. О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред. ПММ, т. XVIII, вып. 6, 1954.
11. Handelman G., Lin C. and Prager W. On the Mechanical Behavior of Metal in the Strain-Hardening Range. Q. Appl. Math., No 4, 1947.
12. Hodge P. and Prager W. A Variational Principle for Plastic Materials with Strain Hardening. J. Math. and Phys., vol. 27, No 1, 1948.
13. Drucker D. C. A More Fundamental Approach to Plastic Stress — Strain Relations. Proc. of the First U. S. Nat. Congr. of Appl. Mech., ASME, 1951.
14. Drucker D. C. On Uniqueness in the Theory of Plasticity. Q. Appl. Math., vol. 14, No 1, 1956.