Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

УДАР КРУГЛОГО ДИСКА О ЖИДКОСТЬ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

И. И. Ворович, В. И. Юдович
(Ростов-на-Дону)

Рассматривается задача об ударе круглого абсолютно твердого диска о поверхность идеальной жидкости конечной глубины. Цель заметки — изучить влияние дна на величину импульсивного давления и коэффициентов присоединенных масс. Влияние дна и стенок в случае плоской задачи изучено в работах М. В. Келдыша [1] и М. И. Гуревича [2].

1. Пусть жидкость до удара неподвижна и занимает слой между плоскостями $z=0$ (свободная поверхность) и $z=h$ (дно). Плоскость диска в момент удара совпадает со свободной поверхностью.

Рассмотрим сначала центральный удар.

Потенциал φ скоростей, приобретенных частицами жидкости, определяется, как известно, следующими условиями:

1) во всем объеме, занятом жидкостью, $\Delta\varphi=0$;

2) в предположении безотрывности удара $\partial\varphi/\partial z=U$, если $z=0$, $r\leqslant a$, где a — радиус диска, U — скорость диска;

3) функция $\vartheta=0$ при $z=0$, если $r>a$;

4) производная $\partial\varphi/\partial z=0$ при $z=h$;

5) функция φ вместе со своими производными исчезает при $r\to\infty$, где r — цилиндрическая координата.

Решая эту задачу методом Фурье, ищем φ в виде

$$\varphi=\int_0^\infty f(\alpha)\,\frac{\operatorname{ch}\alpha(h-z)}{\operatorname{ch}\alpha h}\,J_0(\alpha r)\,d\alpha$$

где $J_0(\alpha r)$ — функция Бесселя нулевого порядка первого рода. Тогда условия 1, 4, 5 удовлетворяются и остается подобрать $f(\alpha)$ так, чтобы удовлетворялись условия 2 и 3. Для $f(\alpha)$ получаем систему парных интегральных уравнений

$$\varphi\,\big|_{z=0}=\int_0^\infty f(\alpha)\,J_0(\alpha r)\,d\alpha=0,\qquad \text{если}\qquad r>a$$

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\Big|_{z=0}=\int_0^\infty \alpha f(\alpha)\,J_0(\alpha r)\operatorname{th}\alpha h d\alpha=-U,\quad \text{если}\quad r\leqslant a$$

которая эквивалентна такой системе (полагаем $a=1$):

$$\int_0^\infty f(\alpha)\,J_0(\alpha r)\,d\alpha=0,\qquad r>1 \tag{1.1}$$

$$\int_0^\infty \alpha f(\alpha)\,J_0(\alpha r)\,d\alpha=-U+\int_0^\infty \alpha f(\alpha)\,(1-\operatorname{th}\alpha h)\,J_0(\alpha r)\,d\alpha$$

Для уравнений

$$\int\limits_0^\infty F(\alpha)\, J_0(\alpha r)\, d\alpha = 0, \quad r \geqslant 1, \qquad \int\limits_0^\infty \alpha F(\alpha)\, J_0(\alpha r)\, d\alpha = g(r), \quad r \leqslant 1$$

известна следующая формула обращения [3]:

$$F(\beta) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^1 u \sin u\beta du \int\limits_0^1 \frac{tg(ut)\, dt}{\sqrt{1-t^2}} \tag{1.2}$$

Пользуясь этой формулой, заменяем систему (1.1) одним уравнением

$$f(\beta) = \frac{2U}{\pi} \frac{d}{d\beta} \frac{\sin\beta}{\beta} + \frac{2}{\pi} \int\limits_0^1 u \sin u\beta du \int\limits_0^1 \frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}} \int\limits_0^\infty \alpha f(\alpha)\,(1 - \operatorname{th}\alpha h)\, J_0(\alpha ut)\, d\alpha \equiv Lf$$

Произведя замену $t = \sin\lambda$, находим

$$\int\limits_0^1 \frac{tJ_0(\alpha ut)\, dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int\limits_0^{1/2\pi} J_0(\alpha u \sin\lambda) \sin\lambda d\lambda = \sum_{S=0}^{\infty} \frac{(-1)^S (\alpha u)^{2S}}{2^{2S}(S!)^2} \int\limits_0^{1/2\pi} \sin^{2S+1}\lambda d\lambda =$$

$$= \sum_{S=0}^{\infty} \frac{(-1)^S (\alpha u)^{2S}}{(2S+1)!} = \frac{\sin\alpha u}{\alpha u}$$

Уравнение преобразуется к виду

$$f(\beta) = \frac{2U}{\pi} \frac{d}{d\beta} \frac{\sin\beta}{\beta} + \frac{2}{\pi} \int\limits_0^1 \sin u\beta du \int\limits_0^\infty f(\alpha)\,(1 - \operatorname{th}\alpha h) \sin\alpha u d\alpha \tag{1.3}$$

Это уравнение мы будем решать методом последовательных приближений. Пользуясь принципом сжатых отображений, можно показать, что, во всяком случае для достаточно больших h, этот процесс сходится равномерно к решению интегрального уравнения (1.3).

В самом деле, ищем решение в классе M функций от β, ограниченных при $0 \leqslant \beta \leqslant \infty$. Тогда ясно, что равномерно сходящаяся последовательность функций класса M сходится снова к функциям класса M.

Принцип сжатых отображений можно будет применить, если покажем, что: 1) $Lf \in M$, если $f \in M$, и 2) $|Lf_1 - Lf_2| \leqslant \eta \sup |f_1 - f_2|$, где $0 < \eta < 1$, f_1, $f_2 \in M$.

Пусть $|f| < P_1$ при $0 \leqslant \beta \leqslant \infty$. Тогда

$$|Lf| \leqslant \frac{2U}{\pi} \left| \frac{d}{d\beta} \frac{\sin\beta}{\beta} \right| + \frac{2P_1}{\pi} \int\limits_0^\infty (1 - \operatorname{th}\alpha h)\, d\alpha \tag{1.4}$$

Но $\frac{d}{d\beta}\frac{\sin\beta}{\beta}$ достигает максимума в точках, где

$$\frac{d^2}{d\beta^2} \frac{\sin\beta}{\beta} = \frac{2\sin\beta - 2\beta\cos\beta - \beta^2 \sin\beta}{\beta^3} = 0$$

В этих точках

$$\frac{d}{d\beta} \frac{\sin\beta}{\beta} = \frac{\beta\cos\beta - \sin\beta}{\beta^2} = -\frac{1}{2}\sin\beta$$

Отсюда ясно, что при всех значениях β

$$\left|\frac{d}{d\beta}\frac{\sin\beta}{\beta}\right| \leqslant \frac{1}{2}$$

Заметив еще, что интеграл в неравенстве (1.4) сходится, получим, что $Lf \in M$. Далее имеем

$$\left|Lf_1 - Lf_2\right| \leqslant \frac{2}{\pi}\left|\int_0^1 \sin u\beta du \int_0^\infty [f_1(\alpha) - f_2(\alpha)](1 - \operatorname{th}\alpha h)\sin\alpha u d\alpha\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi}\sup_{0\leqslant\beta\leqslant\infty}|f_1 - f_2|\int_0^\infty (1 - \operatorname{th}\alpha h)\,d\alpha = \frac{2}{\pi}\sup_{0\leqslant\beta\leqslant\infty}|f_1 - f_2|\left(\alpha - \frac{\ln\operatorname{ch}\alpha h}{h}\right)\Bigg|_0^\infty =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sup_{0\leqslant\beta\leqslant\infty}|f_1 - f_2|\frac{\ln 2}{h}$$

Этим применимость принципа сжатых отображений обоснована в случае

$$\eta = \frac{2}{\pi}\frac{\ln 2}{h} < 1, \qquad h > \frac{2\ln 2}{\pi} \simeq 0.4413$$

За нулевое приближение примем функцию

$$f_0 = \frac{2U}{\pi}\frac{d}{d\beta}\frac{\sin\beta}{\beta}$$

которая представляет собой решение в случае $h = \infty$.

2. Вычисление импульсивного давления на поверхности диска Как известно, импульсивное давление $p_t = -\rho\varphi$, где ρ — плотность жидкости. Считая $\rho = 1$, найдем

$$p_t = -\varphi\,|_{\substack{z=0\\ r\leqslant 1}} = -\frac{2U}{\pi}\int_0^\infty J_0(\beta r)\frac{d}{d\beta}\frac{\sin\beta}{\beta}d\beta -$$

$$-\frac{4U}{\pi^2}\int_0^\infty J_0(\beta r)\,d\beta\int_0^1 \sin u\beta du\int_0^\infty (1 - \operatorname{th}\alpha h)\sin\alpha u\frac{d}{d\alpha}\frac{\sin\alpha}{\alpha}d\alpha -$$

$$-\frac{8U}{\pi^3}\int_0^\infty J_0(\beta r)\,d\beta\int_0^1 \sin u\beta du\int_0^\infty (1 - \operatorname{th}\alpha h)\sin\alpha u d\alpha\int_0^1 \sin\lambda\alpha d\lambda \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{d}{d\theta}\frac{\sin\theta}{\theta}(1 - \operatorname{th}\theta h)\sin\lambda\theta d\theta \qquad (2.1)$$

Первый интеграл нетрудно вычислить, если использовать известный интеграл Вебера

$$\int_0^\infty J_0(\beta r)\sin u\beta d\beta_2 = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant u \leqslant r \\ \dfrac{1}{\sqrt{u^2 - r^2}}, & \text{если } u > r \end{cases}$$

В самом деле,

$$\int_0^\infty J_0(\beta r)\frac{d}{d\beta}\frac{\sin\beta}{\beta}d\beta = -\int_0^\infty J_0(\beta r)\,d\beta\int_0^1 u\sin u\beta du = -\int_r^1 \frac{udu}{\sqrt{u^2 - r^2}} = -\sqrt{1 - r^2}$$

Для вычисления второго интеграла в формуле (2.1) воспользуемся разложением

$$\sin\alpha u \frac{d}{d\alpha}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = -\frac{u\alpha^2}{3} + \left(\frac{u^3}{3.3\,!} + \frac{u}{5.3\,!}\right)\alpha^4 +$$

$$+\left(\frac{u^5}{3.5\,!} + \frac{u^3}{3\,!\,3\,!\,5} + \frac{u}{5\,!\,7}\right)\alpha^6 - \cdots \tag{2.2}$$

Имеем далее

$$\int_0^\infty \alpha^k (1 - \operatorname{th}\alpha h)\, d\alpha = 2\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\int_0^\infty \alpha^k e^{-2n\alpha h}\, d\alpha =$$

$$= 2\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\frac{k\,!}{(2nh)^{k+1}} = \frac{2k\,!}{(2h)^{k+1}} S_{k+1} \qquad \left(S_n = \sum_{m=1}^\infty (-1)^{m-1}\frac{1}{m^n}\right)$$

Меняя во втором интеграле (2.1) порядок интегрирования, подставляя ряд (2.2) и интегрируя почленно, получаем

$$\frac{4U}{\pi^2}\int_0^\infty J_0(\beta r)\, d\beta \int_0^1 \sin u\beta du \int_0^\infty (1 - \operatorname{th}\alpha h)\sin\alpha u \frac{d}{d\alpha}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\, d\alpha =$$

$$= \frac{4U}{\pi^2}\int_r^1 \frac{u du}{\sqrt{u^2 - r^2}}\left\{\frac{S_3}{6}\frac{u}{h^3} - \frac{S_5}{4}\left(\frac{u^3}{3} + \frac{u}{5}\right)\frac{1}{h^5} +\right.$$

$$\left. + \frac{3}{16}S_7\left(\frac{u^5}{6} + \frac{u^3}{3} + \frac{u}{14}\right)\frac{1}{h^7} + \cdots\right\}$$

Вычисление интегралов

$$K_n = \int_r^1 \frac{u^n du}{\sqrt{u^2 - r^2}}$$

дает

$$K_1 = \sqrt{1 - r^2}, \qquad K_2 = \tfrac{1}{3}\sqrt{1 - r^2}\,(1 + 2r^2), \qquad K_3 = \tfrac{1}{15}\sqrt{1 - r^2}\,(3 + 4r^2 + 8r^4)$$

Последний интеграл (2.1) также может быть разложен в ряд по степеням h^{-1}, причем разложение будет начинаться членом с h^{-6}. Действительно, вычислим его:

$$-\frac{8U}{\pi^3}\int_0^\infty J_0(\beta r)\, d\beta \int_0^1 \sin u\beta du \int_0^\infty (1 - \operatorname{th}\alpha h)\sin\alpha u d\alpha \int_0^1 \sin\lambda\alpha d\lambda \int_0^\infty \frac{d}{d\theta}\frac{\sin\theta}{\theta}$$

$$(1 - \operatorname{th}\theta h)\sin\theta\lambda d\theta = -\frac{8U}{\pi^3}\int_r^1 \frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}}\int_0^\infty (1 - \operatorname{th}\alpha h)\sin\alpha u d\alpha \int_0^1 \sin\lambda\alpha$$

$$\left(-\frac{\lambda}{6}\frac{S_3}{h^3} + \cdots\right) d\lambda = -\frac{8U}{\pi^3}\frac{S_3}{6h^3}\int_r^1 \frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}}\int_0^\infty (1 - \operatorname{th}\alpha h)\sin\alpha u \frac{d}{d\alpha}\times$$

$$\times\frac{\sin\alpha}{\alpha}\, d\alpha + \cdots = -\frac{8U}{\pi^3}\frac{S_3}{6h^3}\int_r^1 \frac{u du}{\sqrt{u^2 - r^2}}\left(-\frac{u}{6}\frac{S_3}{h^3} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{2U}{\pi}\sqrt{1 - r^2}\left(\frac{S_3^2}{9\pi^2}\frac{1}{h^6} + \cdots\right)$$

Окончательно находим

$$p_t\Big|_{\substack{z=0\\ r\leqslant 1}} = -\varphi\Big|_{\substack{z=0\\ r\leqslant 1}} = \frac{2U}{\pi}\left[1+\frac{S_3}{3\pi}\frac{1}{h^3}-\frac{S_5}{45\pi}(7+5r^2)\frac{1}{h^5}+\right.$$

$$\left.+\frac{S_3^2}{9\pi^2}\frac{1}{h^6}+\frac{S_7}{210\pi}(17+21r^2+7r^4)\frac{1}{h^7}+\ldots\right]\sqrt{1-r^2}$$

причем третье приближение добавит члены степени не ниже девятой, четвертое двенадцатой и т. д.; следовательно, написанные члены разложения являются точными. Очевидно, импульсивное давление достигает максимума в центре диска. Численные значения отношения максимальных давлений в случае конечной глубины h и бесконечной глубины даны в таблице. Из этой таблицы видно, что влияние дна на распределение давлений под диском может сказаться только, если h равно a или меньше.

Таблица

h/a	∞	50	10	5	3	2	1.8	1.6	1.4	1.2	1.1
$\mu=\dfrac{m}{m_\infty}$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.01	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05
$\varkappa=\dfrac{P_t}{P_{t_\infty}}$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.01	1.01	1.02	1.03	1.045	1.06
$\lambda=\dfrac{J}{J_\infty}$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

3. Вычисление присоединенной массы. Полный ударный импульс, действующий на пластинку, дается соотношением

$$P=-\int_0^1 2\pi r\varphi dr\Big|_{\substack{z=0\\ r\leqslant 1}} = -2\pi\int_0^1 rdr\int_0^\infty J_0(\beta r)\,d\beta\left[\frac{2U}{\pi}\frac{d}{d\beta}\frac{\sin\beta}{\beta}+\right.$$

$$\left.+\frac{4U}{\pi^2}\int_0^1 \sin u\beta du\int_0^\infty(1-\operatorname{th}\alpha h)\sin\alpha u\frac{d}{d\alpha}\frac{\sin\alpha}{\alpha}d\alpha+\ldots\right]=$$

$$=\frac{4U}{3}+\frac{8U}{\pi}\int_0^\infty(1-\operatorname{th}\alpha h)\left(\frac{d}{d\alpha}\frac{\sin\alpha u}{\alpha}\right)^2 d\alpha+$$

$$+\frac{16U}{\pi^2}\int_0^1\left[\int_0^\infty(1-\operatorname{th}\alpha h)\frac{d}{d\alpha}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\sin\alpha\lambda d\alpha\right]^2 d\lambda \tag{3.1}$$

Здесь использованы интегралы

1) $\displaystyle\int_0^1 rJ_0(\beta r)\,dr=\frac{J_1(\beta)}{\beta}$

2) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{J_1(\beta)\sin u\beta d\beta}{\beta}=u$ (если $0<u<1$)

3) $\displaystyle\int_0^1 u\sin\alpha u du=-\frac{d}{d\alpha}\frac{\sin\alpha}{\alpha}$

Последний интеграл в формуле (3.1) получен путем перемены порядка интегрирования.

Разлагая подынтегральные функции в (3.1) в ряды, найдем

$$\left(\frac{d}{d\alpha}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2=\frac{1}{9}\alpha^2-\frac{1}{45}\alpha^4+\frac{1}{525}\alpha^6-\frac{1}{42525}\alpha^8+\cdots$$

$$\frac{d}{d\alpha}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\sin\alpha\lambda=-\frac{\lambda}{3}\alpha^2+\left(\frac{\lambda^3}{3.3\,!}+\frac{\lambda}{5.3\,!}\right)\alpha^4+$$

$$+\left(\frac{\lambda^5}{3.5\,!}+\frac{\lambda^3}{3\,!\,3\,!\,5}+\frac{\lambda}{5\,!\,8}\right)\alpha^6-\cdots$$

Интегрируя ряды почленно, получим окончательно

$$m=\frac{P}{u}=\frac{4}{3}\left[1+\left(\frac{S_3}{3\pi}\frac{1}{h^6}-\frac{S_5}{5\pi}\frac{1}{h^6}+\frac{9S_7}{70\pi}\frac{1}{h^7}-\cdots\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{S_3^2}{9\pi^2}\frac{1}{h^6}+\frac{2S_3S_5}{15\pi^2}\frac{1}{h^8}\right)+\cdots\right] \tag{3.2}$$

где m — присоединенная масса. Как и ранее, следующие приближения содержат h^{-1} лишь в 9-й степени и выше. В таблице даны вычисленные по формуле (3.2) значения отношения присоединенной массы m к присоединенной массе m_∞ для случая $h=\infty$. Полученное асимптотическое разложение позволяет вычислить присоединенную массу с точностью до 2%, если $h\geqslant 0.928$. Из таблицы видно, что существенное влияние дна на величину присоединенной массы может иметь место также, если $h<1$.

4. Нецентральный удар. Применяя тот же прием, что и ранее, можно рассмотреть задачу о нецентральном ударе. Чтобы получить потенциал скоростей для этого случая, нужно к имеющемуся потенциалу φ добавить решение ψ такой краевой задачи:

$$\Delta\psi=0 \quad \text{в объеме, занятом жидкостью}$$

$$\psi|_{0=}=0 \quad \text{при } r>1$$

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|_{z=0}=-\omega x \quad \text{при } r\leqslant 1, \qquad \left.\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|_{z=h}=0$$

Мы считаем, что ось x проходит через точку, в которой наносится удар. Положив $\psi=\partial\Phi(r)/\partial x$, получим для Φ краевую задачу

$$\Delta\Phi=0, \qquad \Phi|_{z=0}=0 \qquad \text{при } r>1$$

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0}=-\frac{\omega r^2}{2}-c \quad \text{при } r<1, \qquad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=h}=0$$

Разыскивая Φ в виде

$$\Phi=\int_0^\infty F(\alpha)J_0(\alpha r)\frac{\operatorname{ch}\alpha(h-z)}{\operatorname{ch}\alpha h}d\alpha$$

имеем для определения $F(\alpha)$ парные уравнения

$$\int_0^\infty F(\alpha)J_0(\alpha r)\,d\alpha=0 \qquad \text{при } r>1 \tag{4.1}$$

$$\int_0^\infty \alpha F(\alpha)J_0(\alpha r)\operatorname{th}\alpha h\,d\alpha=\frac{\omega r^2}{2}+c \qquad \text{при } r\leqslant 1$$

В случае $h=\infty$ легко найдем по формуле (1.2)

$$F_{\infty}(\alpha)=-\frac{2C_{\infty}}{\pi}\frac{d}{d\alpha}\frac{\sin\alpha}{\alpha}+\frac{2\omega}{3\pi}\frac{d^3}{d\alpha^3}\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

Соответственно потенциал ψ_{∞} на поверхности диска будет иметь значение

$$\psi_{\infty}\Big|_{\substack{z=0\\ r<1}}=-\frac{2}{\pi}\frac{\left(\frac{\omega}{3}+C_{\infty}\right)x}{\sqrt{1-r^2}}+\frac{4\omega x}{3\pi}\sqrt{1-r^2}.$$

Интересуясь лишь конечными функциями ψ_{∞}, мы должны принять $C_{\infty}=-{}^1/_3\omega$. Тогда

$$F_{\infty}=-\frac{4\omega}{3\pi}\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{d}{d\alpha}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)$$

Приняв $F_{\infty}(\alpha)$ за нулевое приближение, можно решать парные уравнения методом последовательных приближений. Для n-го приближения найдем

$$F_n(\beta)=-\frac{4\omega}{3\pi}\frac{d}{d\beta}\left(\frac{1}{\beta}\frac{d}{d\beta}\frac{\sin\beta}{\beta}\right)-\frac{2C_n}{\pi}\frac{d}{d\beta}\frac{\sin\beta}{\beta}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^1\sin u\beta du\int_0^{\infty}F_{n-1}(\alpha)\sin\alpha u\,(1-\operatorname{th}\alpha h)\,d\alpha$$

Сходимость процесса и в этом случае нетрудно обосновать при помощи принципа сжатых отображений. C_n выбирается так, чтобы обеспечить конечность n-го приближения для потенциала ψ_n.

В этом случае в первом приближении получаем

$$\psi_1\Big|_{\substack{z=0\\ r<1}}=\frac{4\omega x}{3\pi}\sqrt{1-r^2}-\frac{8\omega}{3\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{m+k}\frac{\partial Q_{2m+1}(r)}{\partial x}\times$$

$$\times\frac{(k+1)(k+2)\cdot(2m+2k+2)!}{(2m+1)!\,(2k+5)!\,2^{2m+2k}}\frac{S_{2k+2m+3}}{h^{2k+2m+3}}$$

где

$$Q_{2m+1}(r)=\int_r^1\frac{u^{2m+1}}{\sqrt{u^2-r^2}}du-\sqrt{1-r^2}$$

$$c_1=-\frac{4\omega}{3\pi}\int_0^{\infty}\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{d}{d\alpha}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)\sin\alpha\,(1-\operatorname{th}\alpha h)\,d\alpha \tag{4.2}$$

$$\psi_1\Big|_{z=0}=\frac{4\omega}{3\pi}x\sqrt{1-r^2}\left(1+\frac{1}{15\pi}\frac{S_5}{h^5}-\frac{11+7r^2}{210\pi}\frac{S_7}{h^7}+\cdots\right)\quad\text{при } r<1$$

Присоединенный момент инерции в первом приближении есть

$$J=\frac{8}{45}\left(1+\frac{S_5}{15\pi}\frac{1}{h^5}-\frac{S_7}{14\pi}\frac{1}{h^7}+\cdots\right) \tag{4.3}$$

Легко показать, как и раньше, что последующие приближения добавляют в формулах (4.2) и (4.3) лишь члены восьмой и высших степеней от h^{-1}.

Таблица дает значения $\lambda=J/J_{\infty}$ для разных h. Точность в 2% обеспечивается, если брать здесь $h>1.017$.

5. Условие безотрывности удара. Координата точки приложения импульса $x_0 = M/P$, где M — импульсный момент. Тогда

$$x_0 = -\frac{2}{15}\frac{\omega a^2}{U}\frac{1+\frac{S_5}{15\pi}\frac{1}{h_1^5}-\ldots}{1+\frac{S_3}{3\pi}\frac{1}{h_1^3}-\frac{S_5}{5\pi}\frac{1}{h_1^5}} \qquad \left(h_1 = \frac{h}{a}\right) \tag{5.1}$$

Точка x_1 пересечения мгновенной оси вращения с осью x найдется из уравнения $U - \omega x_1 = 0$. Как это и должно быть, точки x_0 и x_1 находятся по разные стороны от оси y.

Отрыв диска от поверхности жидкости произойдет, если хотя бы в одной точке импульсивное давление, даваемое выведенными формулами, станет отрицательным, что невозможно, так как жидкость идеальная. Итак, условие безотрывности удара

$$\frac{2U}{\pi}\sqrt{1-r_1^2}\left[1+\frac{S_3}{3\pi}\frac{1}{h_1^3}-\frac{S_7}{45\pi}\left(7+5r_1^2\right)\frac{1}{h_1^5}\cdots\right]-$$

$$-\frac{4\omega x}{3\pi}\sqrt{1-r_1^2}\left(1+\frac{1}{15\pi}\frac{S_5}{h_1^5}\right)\geqslant 0 \qquad \left(r_1 = \frac{r}{a}\right) \tag{5.2}$$

всюду на поверхности диска (ясно, что тогда импульсивное давление будет положительно во всем объеме жидкости). Очевидно, что для выполнения неравенства (5.2) всюду на поверхности диска необходимо и достаточно, чтобы оно было выполнено в окрестности точки $x = a$, $y = 0$ (считая, что $\omega > 0$ и $U > 0$), т. е. чтобы выполнялось неравенство

$$U\left(1+\frac{S_3}{3\pi}\frac{1}{h_1^3}-\frac{4S_5}{15\pi}\frac{1}{h_1^5}+\cdots\right)-\frac{2\omega a}{3}\left(1+\frac{S_5}{15\pi}\frac{1}{h_1^5}-\cdots\right)\geqslant 0 \tag{5.3}$$

Учитывая (5.1), получаем из (5.3) условие безотрывности удара:

$$|x_0| \leqslant \frac{a}{5}\frac{1+\frac{S_3}{3\pi}\frac{1}{h_1^3}-\frac{4S_5}{15\pi}\frac{1}{h_1^5}+\cdots}{1+\frac{S_3}{3\pi}\frac{1}{h_1^3}-\frac{S_5}{5\pi}\frac{1}{h_1^5}+\cdots} = \frac{a}{5}\left(1-\frac{S_5}{15\pi}\frac{1}{h_1^5}+\ldots\right)$$

В случае $h = \infty$ не приводит к отрыву лишь удар в точке, находящейся в круге радиуса $1/5\,a$ с центром в центре диска. В случае конечной глубины жидкости этот круг уменьшается, хотя и весьма мало для $h > a$.

В заключение заметим, что при помощи примененного здесь метода можно аналогично рассмотреть соответствующую плоскую задачу.

Общий вывод. При вертикальном ударе круглого диска о слой идеальной жидкости можно практически пренебречь влиянием дна на основные характеристики удара и принять $h = \infty$, если $h \geqslant 1.1a$. При этом погрешность в определении присоединенной массы, присоединенного момента инерции, максимального давления не превзойдет 6%.

Поступила 9 XI 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М. В. Удар пластинки о воду конечной глубины. Труды ЦАГИ, вып. 1952, 1935.
2. Гуревич М. И. Удар плоской пластинки о жидкость, наполняющую канал в форме полуцилиндра. ПММ, т. III, вып. 2, 1939.
3. Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье.