Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ДВИЖЕНИИ СОСУДА, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОГО ЖИДКОСТЬЮ; УЧЕТ НЕМАЛОСТИ ДВИЖЕНИЯ ПОСЛЕДНЕЙ

Г. С. Нариманов
(Москва)

При решении ряда задач динамики твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью, возникает необходимость в учете немалости движения жидкости. Основная гипотеза, используемая обычно в теории рассматриваемых явлений, о малости всех параметров движения, оказывается весьма грубой, когда в процессе исследуемого движения происходит резонансное возбуждение какой-либо из собственных частот колебания жидкости в полости. Неучет конечности параметров движения жидкости приводит в этих случаях к появлению в результатах расчета больших величин параметров и приведенных инерционных характеристик, что противоречит исходной предпосылке о малости движения.

Кроме того, в настоящее время известны практически интересные случаи неустойчивости «в малом» систем твердое тело + жидкость. Необходимость исследования характеристик движения подобных систем также требует разработки методов учета немалости колебаний жидкости.

И, наконец, для уточнения механизма возбуждения различных форм собственных колебаний свободной поверхности жидкости при движении сосуда также необходимо проводить соответствующее уточнение уравнений движения, поскольку линеаризованные уравнения движения вообще не содержат для ряда форм собственных колебаний связи их с движением стенок полости.

Указанной задаче приближенного учета влияния немалости параметров движения жидкости, частично заполняющей полость твердого тела, посвящено содержание настоящей статьи.

§ 1. Основные предпосылки. Будем рассматривать движение твердого тела, обладающего цилиндрической полостью, частично заполненной идеальной жидкостью, относительно системы координат $O^*x_1^*x_2^*x_3^*$. Связанную систему координат $Ox_1x_2x_3$ расположим так, чтобы ось Ox_3 была параллельна образующей боковой поверхности полости (фиг. 1).

Потенциальную функцию поля массовых сил представим в виде:

$$U = -\mathbf{jR}^*$$

где $\mathbf{j}$ — суммарный вектор ускорения поля массовых сил, $\mathbf{R}^*$ — радиус-вектор относительно точки O^*. Уравнение возмущенной свободной поверхности жидкости Σ запишем так:

$$x_3 - C = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) f_i(x_1 x_2) \qquad (1.1)$$

Здесь функции $f_i(x_1x_2)$ являются нормированными собственными функциями краевой задачи:

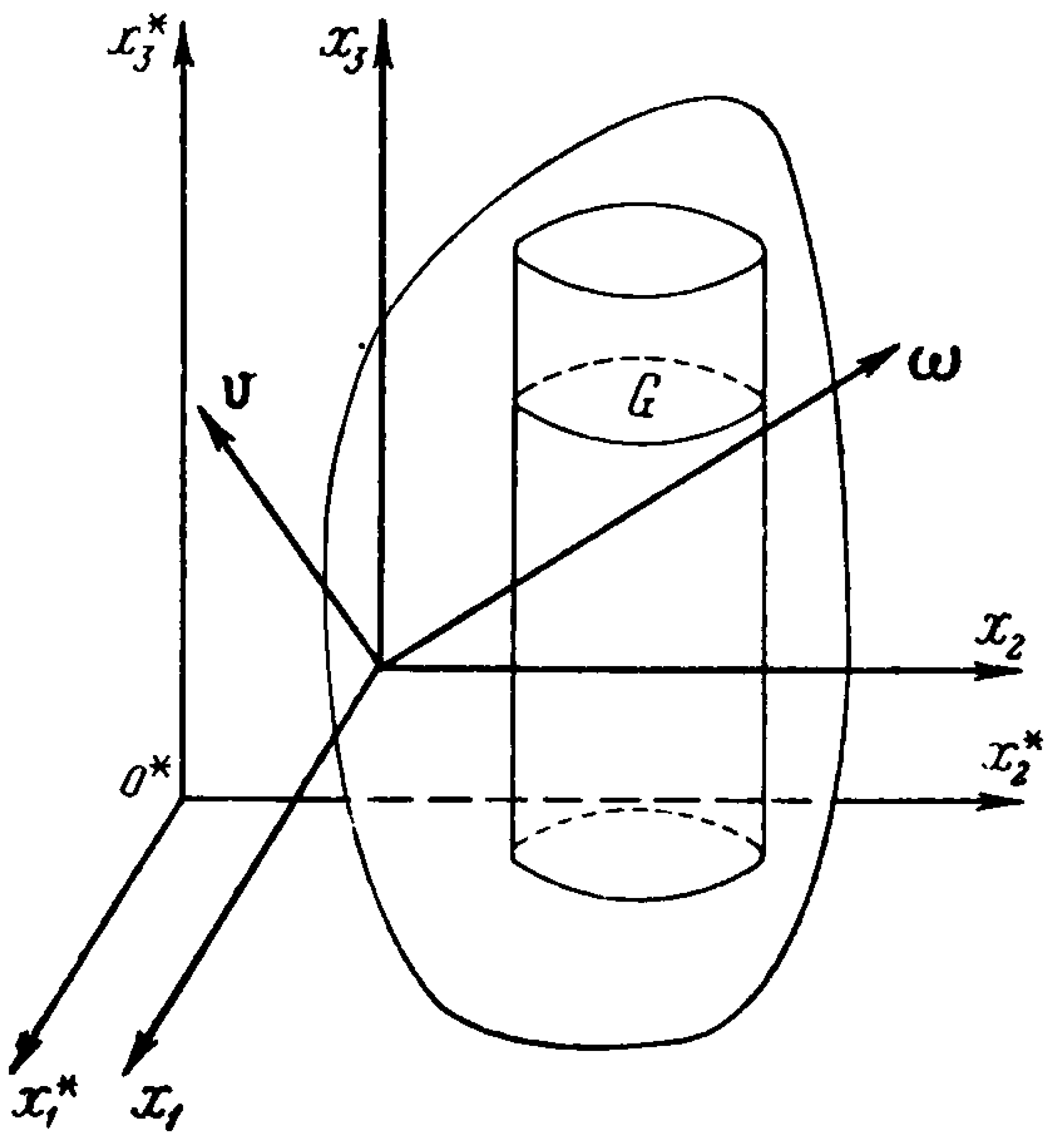
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \lambda^2 f = 0, \quad \left[\frac{\partial f}{\partial n}\right]_l = 0 \qquad (1.2)$$

где l — замкнутая кривая пересечения плоскости невозмущенной свободной поверхности Σ_0 с боковой поверхностью полости, ограничивающая область G. Проекции осей Ox_1 и Ox_2 на плоскость Σ_0 будем обозначать через Ox_1' и Ox_2'.

Движение жидкости полагаем безвихревым. Граничные условия для потенциала скоростей Φ имеют вид:

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right]_\zeta = \mathbf{vn} + [\omega\times\mathbf{R}]\,\mathbf{n}, \qquad \left[\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right] = \mathbf{vn} + [\omega\times\mathbf{R}]\,\mathbf{n} + u_n \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость точки O, вектор ω — угловая скорость вращения твердого тела относительно этой точки O, ζ — смачиваемая поверхность полости, u_n — нормальная составляющая к свободной поверхности относительной скорости жидкости, h — высота столба жидкости при невозмущенном ее состоянии.



Фиг. 1

Далее предположим, что все параметры движения твердого тела и жидкости, за исключением одного параметра a_1 (получаемые результаты не теряют общности и для случая, если вместо параметра a_1 принят любой другой параметр a_i), а также величины j_1 и j_2 являются настолько малыми, что произведениями и квадратами их можно пренебречь. Относительно же параметра a_1 полагаем, что квадрат его величины имеет тот же порядок малости, как и величины остальных параметров. Основываясь на этом, будем в дальнейших выкладках удерживать лишь члены, величины которых имеют порядок не менее чем третья степень величины порядка a_1.

Выражение u_n тогда запишется так:

$$u_n = \sum_{i=1}^{\infty} \dot a_i f_i - \tfrac{1}{2}\,\dot a_1 a_1^2 f_1 (\nabla f_1)^2 \tag{1.4}$$

Здесь ∇ — линейный дифференциальный оператор. На основании (1.3) и (1.4) функцию Φ можно представить так:

$$\Phi = \mathbf{vR}^* + \omega\Omega + \sum_{i=1}^{\infty} a_i A_i - \dot a_1 a_1^2 A + \mathrm{const} \tag{1.5}$$

Здесь Ω — гармоническая векторная функция, A_i $(i = 1, 2, \ldots)$ и A — гармонические функции, удовлетворяющие соответственно условиям

$$\left[\frac{\partial\Omega}{\partial n}\right]_S = [\mathbf{R}\times\mathbf{n}], \qquad \left[\frac{\partial A_i}{\partial n}\right]_\zeta = 0, \qquad \left[\frac{\partial A_i}{\partial n}\right]_\Sigma = f_i\,(x_1 x_2)$$

$$\left[\frac{\partial A}{\partial n}\right]_\zeta = 0, \qquad \left[\frac{\partial A}{\partial n}\right]_\Sigma = \tfrac{1}{2}\, f_1 (\nabla f_1)^2 \tag{1.6}$$

где S — полная поверхность жидкой массы, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали поверхности жидкости.

§ 2. Выражения функций Ω и A_i через параметры a_i. Мы условились удерживать лишь величины не выше третьего порядка малости от величины a_1, поэтому представим зависимость Ω и A_i от a_i в виде отрезков степенных рядов по величинам a_i, в которых опущены все нелинейные члены, за исключением члена, зависящего от a_1^2:

$$\Omega = \Omega_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \Omega_j a_j + \Omega_{11} a_1^2, \qquad A_i = A_{i0} + \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} a_j + A_{i11} a_1^2 \tag{2.1}$$

Левую часть условия (1.6) для функции Ω на поверхности Σ представим в виде

$$\left[\frac{\partial \Omega}{\partial n}\right]_\Sigma = \left[1 + \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{\partial f_j}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{\partial f_j}{\partial x_2}\right)^2\right]^{-1/2} \left[\frac{\partial \Omega}{\partial x_3} - \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{\partial f_j}{\partial x_1} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{\partial f_j}{\partial x_2}\right] \tag{2.2}$$

Далее, учитывая возможность следующего представления функции $L(x_1 x_2 x_3)$ на поверхность Σ через ее значения на поверхности $\Sigma_0 \mid x_3 = C$ с точностью, соответствующей формулам (2.1):

$$[L]_\Sigma = [L]_{x_3=C} + \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{\partial L}{\partial x_3}\right]_{x_3=C} f_j a_j + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2}\right]_{x_3=C} f_1^2 a_1^2 \tag{2.3}$$

а также подставляя Ω согласно (2.1) в (2.2), получим

$$\left[\frac{\partial \Omega}{\partial n}\right] = \left[1 + \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{\partial f_j}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{\partial f_j}{\partial x_2}\right)^2\right] \left\{\left[\frac{\partial \Omega_0}{\partial x_3}\right]_{x_3=C} + \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{\partial \Omega_j}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial x_3^2} f_j\right]_{x_3=C} a_j + \left[\frac{\partial \Omega_{11}}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_3^2} f_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \Omega_0}{\partial x_3^3} f_1^2\right]_{x_3=C} a_1^2 -$$

$$- \left[\frac{\partial \Omega_0}{\partial x_1}\right]_{x_3=C} \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{\partial f_j}{\partial x_1} - \left[\frac{\partial \Omega_0}{\partial x_2}\right]_{x_3=C} \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{\partial f_j}{\partial x_2} - \left[\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial x_1 \partial x_3} f_1\right]_{x_3=C} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} a_1^2 -$$

$$\left. - \left[\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial x_2 \partial x_3} f_1\right]_{x_3=C} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} a_1^2\right\} \tag{2.4}$$

Для правой части условия (1.6) на поверхности Σ имеем

$$[[\mathbf{R} \times \mathbf{n}]]_\Sigma = \left[1 + \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{\partial f_j}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{\partial f_j}{\partial x_2}\right)^{-1/2}\right]^2 \left\{\mathbf{e}_1\left(x_2 + x^3 \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{\partial f_j}{\partial x_2}\right) - \right.$$

$$\left. - \mathbf{e}_2\left(x_3 \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{\partial f_j}{\partial x_1} + x_1\right) + \mathbf{e}_3\left(x_2 \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{\partial f_j}{\partial x_1} - x_1 \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{\partial f_j}{\partial x_2}\right)\right\} \tag{2.5}$$

где $\mathbf{e}_k$ $(k = 1, 2, 3)$ — единичные орты системы $Ox_1x_2x_3$. Приравнивая выражения (2.4) и (2.5), а затем коэффициенты при подобных членах по параметрам a_i в выражениях (2.4) и (2.5), получим граничные условия, определяющие гармонические векторные функции Ω_0, Ω_j и Ω_{11}:

$$\left[\frac{\partial \Omega_0}{\partial n}\right]_{S_0} = [\mathbf{R} \times \mathbf{n}] \tag{2.6}$$

$$\left[\frac{\partial \Omega_j}{\partial x_3}\right]_{x_3=C} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(f_j \frac{\partial \Omega_0}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(f_j \frac{\partial \Omega_0}{\partial x_2}\right) + [\operatorname{grad} f_j \times \mathbf{R}]$$

$$\left[\frac{\partial \Omega_j}{\partial n}\right]_\varsigma = 0 \tag{2.7}$$

$$\left[\frac{\partial \Omega_{11}}{\partial x_3}\right]_{x_3=C} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(f_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} f_1^2 \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial x_1 \partial x_3}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(f_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} + \frac{1}{2} f_1^2 \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial x_2 \partial x_3}\right) +$$

$$+ \left(\mathbf{e}_1 f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \mathbf{e}_2 f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right), \quad \left[\frac{\partial \Omega_{11}}{\partial n}\right]_\varsigma = 0 \tag{2.8}$$

Проведя аналогичные преобразования с функцией A_i, получим

$$\left[\frac{\partial A_{i0}}{\partial x_3}\right]_{x_3=C} = f_i(x_1x_2), \qquad \left[\frac{\partial A_{i0}}{\partial n}\right]_{\zeta} = 0 \tag{2.9}$$

$$\left[\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_3}\right]_{x_3=C} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(f_j\frac{\partial A_{i0}}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(f_j\frac{\partial A_{i0}}{\partial x_2}\right), \quad \left[\frac{\partial A_{ij}}{\partial n}\right]_{\zeta} = 0 \tag{2.10}$$

$$\left[\frac{\partial A_{i11}}{\partial x_3}\right]_{x_3=C} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(f_1\frac{\partial A_{i1}}{\partial x_1} + \frac{1}{2}f_1^2\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(f_1\frac{\partial A_{i1}}{\partial x_2} + \frac{1}{2}f_1^2\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}f_i(\nabla f_1)^2, \qquad \left[\frac{\partial A_{i11}}{\partial n}\right]_{\zeta} = 0 \tag{2.11}$$

§ 3. Составление уравнений движения. Для количества движения жидкой массы $\mathbf{K}_1$ и ее кинетического момента $\mathbf{G}_1$ получим [1]

$$\mathbf{K}_1 = \rho\int_\tau \nabla\Phi d\tau = \mathbf{v}m_1 + [\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{L}_{10}] + \rho[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}^{(1)}]a_1 + \rho\sum_{i=1}^{\infty}\dot{a}_i\mathbf{R}^{(i)} + \mathbf{e}_3\rho\dot{a}_1a_1 \tag{3.1}$$

$$\mathbf{G}_1 = \rho\int_\tau[\mathbf{R}\times\nabla\Phi]d\tau = [\mathbf{L}_{10}\times\mathbf{v}] + \rho[\mathbf{R}^{(1)}\times\mathbf{v}]a_1 +$$

$$+(J_{10}{}^\circ, \boldsymbol{\omega}) + (J_{11}{}^\circ, \boldsymbol{\omega})a_1 + \rho\sum_{i=1}^{\infty}\dot{a}_i\boldsymbol{\Omega}_0^{(i)} + \rho\dot{a}_1\sum_{i=2}^{\infty}a_i\boldsymbol{\theta}_i^{(1)} +$$

$$+\rho a_1\sum_{i=2}^{\infty}\dot{a}_i\boldsymbol{\theta}_1^{(i)} + \rho\dot{a}_1a_1\boldsymbol{\theta}_1^{(1)} + \rho\dot{a}_1a_1^2\boldsymbol{\theta}_{11}^{(1)} \tag{3.2}$$

Здесь τ — область, занятая жидкостью, ρ — плотность жидкости, $\mathbf{L}_{10}$ — статический момент жидкой массы относительно точки O при невозмущенном состоянии свободной поверхности.

Кроме того, в выражениях (3.1) и (3.2) приняты следующие обозначения:

$$\boldsymbol{\theta}^{(j)} = \iint_G \boldsymbol{\theta} f_j dG, \qquad \boldsymbol{\theta}_i = \boldsymbol{\Omega}_i + \frac{\partial\boldsymbol{\Omega}_0}{\partial x_3}f_i, \qquad \boldsymbol{\theta}_{11} = \boldsymbol{\Omega}_{11} + \frac{\partial\boldsymbol{\Omega}_1}{\partial x_3}f_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\Omega}_0}{\partial x_3^2}f_1^2 \tag{3.3}$$

$J_{10}{}^\circ$ — тензор инерции жидкой массы при невозмущенном состоянии свободной поверхности с компонентами

$$(J_{10}^\circ)_{jk} = \rho\int_{\tau_0}\operatorname{grad}\Omega_{0j}\operatorname{grad}\Omega_{0k}d\tau$$

где τ_0 — область, занятая жидкостью с невозмущенной поверхностью, J_{11}° — симметричный тензор с компонентами

$$(J_{11}{}^\circ)_{jk} = \rho\int_{\tau_0}(\operatorname{grad}\Omega_{1j}\operatorname{grad}\Omega_{0k} + \operatorname{grad}\Omega_{0j}\operatorname{grad}\Omega_{1k})d\tau$$

Далее, обозначив через m_0 суммарную массу твердого тела и жидкости, через $\mathbf{L}_0$ и $J_0{}^\circ$ соответственно суммарный статический момент и суммарный тензор инерции осносительно точки O твердого тела и жидкости при невозмущенном состоянии свободной поверхности, а также используя выражения (3.1) и (3.2), получим уравнение количества движения и уравнение момента количества движения в виде

$$m\dot{\mathbf{v}} + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{L}_0] + \rho[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}^{(1)}]\dot{a}_1 + \rho[\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{R}^{(1)}]a_1 + \rho\sum_{i=1}^{\infty}\ddot{a}_i\mathbf{R}^{(i)} +$$

$$+\mathbf{e}_3\rho\frac{d}{dt}(\dot{a}_1a_1) = \mathbf{P} \tag{3.4}$$

$$[\mathbf{L}_0\times\dot{\mathbf{v}}]+(J_0^\circ,\ \dot{\omega})+\rho\sum_{i=1}^{\infty}\ddot{a}_i\Omega_0^{(i)}+\rho[\mathbf{R}^{(1)}\times\mathbf{v}]\dot{a}_1+\rho[\mathbf{R}^{(1)}\times\dot{\mathbf{v}}]a_1+$$
$$+(J_{11}^\circ,\ \omega)\dot{a}_1+(J_{11}^\circ,\ \dot{\omega})a_1+\rho\frac{d}{dt}\sum_{i=2}^{\infty}(\dot{a}_1a_i\theta_i^{(1)}+a_1\dot{a}_i\theta_1^{(i)})+\rho\theta_1^{(1)}\frac{d}{dt}(\dot{a}_1a_1)+$$
$$+\rho\theta_{11}^{(1)}\frac{d}{dt}(\dot{a}_1a_1^2)=\mathbf{M}+\rho\sum_{i=1}^{\infty}a_i[\mathbf{R}^{(i)}\times\mathbf{j}] \qquad (3.5)$$

где $\mathbf{P}$ — сумма внешних сил, $\mathbf{M}$ — сумма внешних моментов относительно точки O.

Для составления остальных уравнений, определяющих изменение формы свободной поверхности, используем условие постоянства давления p на поверхности Σ, а также свойство ортогональности собственных функций задачи (1.2) и постоянной величины

$$\iint_G[p]_\Sigma f_i dG=0 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots) \qquad (3.6)$$

Величину давления выражаем при помощи интеграла Коши

$$[p]_\Sigma=-\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{(\operatorname{grad}\Phi)^2}{2}+U\right]_\Sigma \qquad (3.7)$$

Опуская промежуточные выкладки, которые сводятся к подстановке (3.7) в (3.6), замене Φ при помощи выражения (1.5), а также используя формулы (2.1) и (2.3), приводим систему уравнений, определяющих изменение формы свободной поверхности жидкости:

$$\ddot{a}_iA_{i0}^{(i)}-j_3a_i+\frac{d}{dt}\sum_{k=2}^{\infty}(\dot{a}_1a_kB_{1k}^{(i)}+a_1\dot{a}_kB_{k1}^{(i)})+B_{11}^{(i)}\frac{d}{dt}(\dot{a}_1a_1)+$$
$$+B_{111}^{(i)}\frac{d}{dt}(\dot{a}_1a_1^2)-\mathbf{j}\mathbf{R}^{(i)}+\dot{\mathbf{v}}\mathbf{R}^{(i)}+\dot{\omega}\Omega_0^{(i)}+\theta_1^{(i)}\frac{d}{dt}(\omega a_1)+$$
$$+\frac{1}{2}\dot{a}_1^2[(\nabla A_{10})^2]^{(i)}+\dot{a}_1^2a_1[(\nabla B_{11})(\nabla A_{10})]^{(i)}+\dot{a}_1\sum_{k=2}^{\infty}[(\nabla A_{10})(\Delta A_{k0})]^{(i)}\dot{a}_k+$$
$$+\dot{a}_1\mathbf{v}[\nabla A_{10}]^{(i)}+\dot{a}_1\omega[(\Pi,\ \nabla A_{10})]^{(i)}+f_i^{(i)}\frac{d}{dt}(a_1v_3)=0 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots) \quad (3.8)$$

Здесь Π — аффинный ортогональный тензор:

$$\Pi=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\Omega_0}{\partial x_k}\mathbf{e}_k, \qquad B_{kj}=A_{kj}+\frac{\partial A_{k0}}{\partial x_3}f_j$$
$$B_{111}=A_{111}+\frac{\partial A_{11}}{\partial x_3}f_1+\frac{1}{2}\frac{\partial^2A_{10}}{\partial x_3^2}f_1^2-A \qquad (3.9)$$

Уравнения (3.4), (3.5) и (3.8) в совокупности составляют искомую динамическую систему уравнений движения, содержащих нелинейные члены параметров. Имея в виду дальше рассматривать лишь плоские движения твердого тела, происходящие параллельно плоскости $Ox_2^*x_3^*$, будем рассчитывать лишь отдельные компоненты векторных коэффициентов.

Проекцию на ось Ox_2 векторов $\mathbf{R}^{(i)}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{v}$ будем обозначать соответственно через $x_2^{(i)}$, P, v; проекцию на ось Ox_1 векторов Ω_0, Ω_1, Ω_{11}, $\Omega_0^{(i)}$, $\theta_i^{(1)}$, $\theta_1^{(i)}$, $\theta_{11}^{(1)}$, ω, $\mathbf{M}$ — через Ω_0, Ω_1, Ω_{11}, $\Omega_0^{(i)}$, $\theta_i^{(1)}$, $\theta_1^{(i)}$, $\theta_{11}^{(1)}$, ω, M.

Далее обозначим $(J_0{}^\circ)_{11}$ через J_0, а $(J_{11}{}^\circ)_{11}$ через J_{11}.

Используя условия (1.6) и (1.2), для полости цилиндрической формы получим

$$\Omega_0=2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_2^{(i)}}{\lambda_i}\frac{\operatorname{sh}(\lambda_i x_3)}{\operatorname{ch}(\lambda_i{}^1/_2h)}f_i(x_1x_2)-x_2x_3$$

$$A_{i0}=\frac{1}{\lambda_i}\frac{\operatorname{ch}\lambda_i(x_3+{}^1/_2h)}{\operatorname{sh}\lambda_i h}f_i(x_1x_2) \tag{3.10}$$

Формулы (3.10) далее используются для расчета остальных коэффициентов.

На основании условий (2.7) и (2.10) выражения для Ω_1 и A_{11} примут вид:

$$\Omega_1=2\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{\operatorname{ch}\lambda_j(x_3+{}^1/_2h)}{\lambda_j\operatorname{sh}\lambda_j h}f_j(x_1x_2)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_2^{(i)}}{\lambda_i}\operatorname{th}\frac{\lambda_i h}{2}[\nabla f_1\nabla f_i-\lambda_i{}^2f_1f_i]^{(j)}\right\} \tag{3.11}$$

$$A_{11}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}\lambda_1 h\operatorname{ch}\lambda_j(x_3+{}^1/_2h)}{\lambda_1\lambda_j\operatorname{sh}\lambda_j h}[\Delta f_1{}^2]^{(j)}f_j(x_1x_2) \tag{3.12}$$

В соответствии с выражениями (3.9) и при учете (2.11) имеем

$$B_{k1}^{(i)}=\iint_G\left(A_{k1}+\frac{\partial A_{k0}}{\partial x_3}f_1\right)f_idG=\iint_G A_{i0}\frac{\partial A_{k1}}{\partial x_3}dG+\iint_G f_1f_if_kdG$$

$$B_{111}^{(i)}=\iint_G\left(A_{111}+\frac{\partial A_{11}}{\partial x_3}f_1+\frac{1}{2}\frac{\partial^2A_1}{\partial x_3{}^2}f_1{}^2-A\right)f_idG=$$

$$=\iint_G A_{i0}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(f_1\frac{\partial A_{11}}{\partial x_1}+\frac{1}{2}f_1{}^2\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(f_1\frac{\partial A_{11}}{\partial x_2}+\frac{1}{2}f_1{}^2\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)\right\}dG+$$

$$+\iint_G\frac{\partial A_{11}}{\partial x_3}f_1f_idG+\frac{1}{2}\iint_G\frac{\partial^2A_{10}}{\partial x_3{}^2}f_1{}^2f_idG \tag{3.13}$$

Аналогичным путем, используя выражения (3.3) и (2.8), получаем

$$\Omega_0^{(i)}=x_2{}^{(i)}\left[\frac{2}{\lambda_i}\operatorname{th}\frac{\lambda_i h}{2}-C\right] \tag{3.14}$$

$$\theta_i^{(1)}=\frac{2}{\lambda_1}\operatorname{cth}\lambda_1 h\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x_2{}^{(j)}}{\lambda_j}\operatorname{th}\frac{\lambda_j h}{2}[\nabla f_1\nabla f_j-\lambda_j{}^2f_1f_j]^{(i)}+[x_2f_1]^{(i)} \tag{3.15}$$

$$\theta_1^{(i)}=\frac{2}{\lambda_1}\operatorname{cth}\lambda_i h\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x_2^{(j)}}{\lambda_j}\operatorname{th}\frac{\lambda_j h}{2}[\nabla f_1\nabla f_j-\lambda_j{}^2f_1f_j]^{(i)}+[x_2f_1]^{(i)} \tag{3.16}$$

$$\theta_{11}^{(1)}=\frac{2}{\lambda_1}\operatorname{cth}\lambda_1 h\sum_{i=1}^{\infty}x_2^{(i)}\left\{\left[f_1\nabla f_1\nabla f_i-\frac{\lambda_i^2}{2}f_1{}^2f_i\right]^{(1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\operatorname{th}{}^1/_2\lambda_i h}{\lambda_i}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\operatorname{cth}\lambda_j h}{\lambda_j}[\nabla f_1\nabla f_i-\lambda_i{}^2f_1f_i]^{(j)}[\nabla f_1\nabla f_j-\lambda_j{}^2f_1f_j]^{(1)}\right\}+$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_2^{(i)}}{\lambda_i}\operatorname{th}\frac{\lambda_i h}{2}\sum_{j=1}^{\infty}[\nabla f_1\nabla f_i-\lambda_i{}^2f_1f_i]^{(j)}[f_1{}^2]^{(j)}+\sum_{i=1}^{\infty}x_2{}^{(i)}\lambda_i\operatorname{th}\frac{\lambda_i h}{2}[f_1{}^3]^{(i)} \tag{3.17}$$

$$A_{i0}^{(i)}=\frac{1}{\lambda_i}\operatorname{cth}\lambda_i h \tag{3.18}$$

$$B_{k1}^{(i)}=\frac{\operatorname{cth}\lambda_i h\operatorname{cth}\lambda_k h}{\lambda_i\lambda_k}[\nabla f_1\nabla f_k-\lambda_k{}^2f_1f_k]^{(i)}+[f_1f_k]^{(i)} \tag{3.19}$$

$$B_{1k}^{(i)} = \frac{\operatorname{cth}\lambda_1 \operatorname{cth}\lambda_i h}{\lambda_1\lambda_i}[\nabla f_1 \nabla f_k - \lambda_1^2 f_1 f_k]^{(i)} + [f_1 f_k]^{(i)} \tag{3.20}$$

$$B_{111}^{(i)} = \frac{\operatorname{cth}\lambda_1 h \operatorname{cth}\lambda_i h}{2\lambda_1\lambda_i}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\operatorname{cth}\lambda_j h}{\lambda_j}[\Delta f_1^2]^{(j)}[\nabla f_1 \nabla f_j - \lambda_j^2 f_1 f_j]^{(i)} +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{cth}\lambda_1 h}{\lambda_1} + \frac{\operatorname{cth}\lambda_i h}{\lambda_i}\right)[f_1(\Delta f_1^2 + \lambda_1^2 f_1^2)]^{(i)} \tag{3.21}$$

Далее получаем

$$J_{11} = 2\rho\int_{\tau}\operatorname{grad}\Omega_0 \operatorname{grad}\Omega_1 d\tau = 2\rho\iint_G \Omega_0\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_3}dG =$$

$$= 4\rho\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_2^{(i)}}{\lambda_i}\operatorname{th}\frac{\lambda_i h}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x_2^{(i)}}{\lambda_j}\operatorname{th}\frac{\lambda_j h}{2}[\nabla f_1 \nabla f_j - \lambda_j^2 f_1 f_j]^{(i)}\left(2 - C\lambda_i \operatorname{cth}\frac{\lambda_i h}{2}\right) \tag{3.22}$$

Остальные коэффициенты уравнений (3.8) могут быть представлены в следующем виде:

$$[(\nabla A_{10})(\nabla A_{k0})]^{(i)} = \frac{\operatorname{cth}\lambda_1 \operatorname{cth}\lambda_k h}{\lambda_1\lambda_k}[\nabla f_1 \nabla f_k]^{(i)} + [f_1 f_k]^{(i)} \tag{3.23}$$

$$[(\nabla B_{11})(\Delta A_{10})]^{(i)} = \frac{\operatorname{cth}\lambda_1 h}{\lambda_1}\Big\{2[f_1(\nabla f_1)^2]^{(i)} + \tag{3.24}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}[\Delta f_1^2]^{(j)}\left(\frac{\operatorname{cth}\lambda_1 h \operatorname{cth}\lambda_j h}{\lambda_1\lambda_j}[\nabla f_1 \nabla f_j]^{(i)} + [f_1 f_j]^{(i)}\right)\Big\}$$

$$\left[\frac{\partial A_{10}}{\partial x_2}\right]^{(i)} = \frac{1}{\lambda_1}\operatorname{cth}\lambda_1 h\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right]^{(i)} \tag{3.25}$$

$$[(\nabla A_1)(\nabla\Omega_0)]^{(i)} = \frac{2}{\lambda_1}\operatorname{cth}\lambda_1 h\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x_2^{(j)}}{\lambda_j}\operatorname{th}\frac{\lambda_j h}{2}[\nabla f_1 \nabla f_j]^{(i)} +$$

$$+[x_2 f_1]^{(i)} - \frac{C}{\lambda_1}\operatorname{cth}\lambda_1 h\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right]^{(i)} \tag{3.26}$$

§ 4. Упрощение уравнений движения при дополнительных условиях. Пусть область G обладает двумя взаимно перпендикулярными осями симметрии, направление которых примем за направление осей Ox_1 и Ox_2. Кроме того, начало координат системы $Ox_1x_2x_3$ поместим в точку положения центра масс системы при невозмущенном состоянии жидкости. Будем полагать, что центр масс системы при невозмущенном состоянии жидкости находится на оси симметрии полости.

Легко доказать следующую теорему: если область G обладает осью симметрии, то собственные функции $f_i(x_1x_2)$ задачи (1.2) относительно этой оси являются четными или нечетными функциями, т. е. если эта ось симметрии принята за ось Ox_1, то функции $f_i(x_1x_2)$ удовлетворяют одному из следующих условий:

$$f_i(x_1, -x_2) = f_i(x_1, x_2), \qquad f_i(x_1, -x_2) = -f_i(x_1, x_2)$$

Поскольку оси Ox_1' и Ox_2' являются двумя взаимно перпендикулярными осями симметрии области G, то функции $f_i(x_1, x_2)$ будут четными или нечетными функциями как относительно оси Ox_1, так и относительно оси Ox_2. В дальнейшем будем рассматривать лишь плоские движения твердого тела, происходящие параллельно плоскости Ox_2x_3. При этом если в какой-либо момент времени условия на свободной поверхности жидкости (форма ее и проекция скорости ее частиц на ось Ox_3) являются четными функциями относительно оси Ox_2, то и во все последующее время форма свободной поверхности будет четной функцией относительно этой оси, а стало быть, параметры изменения формы свободной поверхности, соответствующие нечетным относительно оси Ox_2 функциям $f_i(x_1, x_2)$, не будут возбуждаться. Рассматривая в дальнейшем лишь этот случай движения, мы исключим из рассмотрения нечетные относительно оси Ox_2 собственные функции задачи (1.2).

Остальные функции $f_i(x_1, x_2)$ подразделим на две совокупности функций, одна из которых состоит из функций ψ_k $(k=1, 2, \ldots)$, четных по переменной x_2, другая же из функций φ_n $(n=1, 2, \ldots)$, не четных по этой переменной. Уравнение свободной поверхности (1.1) в этом случае примет вид:

$$x_3 - C = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x_1 x_2) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \psi_k(x_1 x_2)$$

Поскольку до разбиения совокупности функций f_i на два класса функций φ_n и ψ_k в выведенных выше формулах использовалась единая система индексаций этих функций $(i=1, 2, \ldots)$, то после введения этого разбиения, т. е. после перехода к фактически двойной системе индексаций функций $f_i(\varphi_n$ и $\psi_k)$, для ликвидации неоднозначности записи формул индексы, относящиеся к функциям ψ_k, будем употреблять со штрихом, в то время как индексы функций φ_n будем записывать без штриха. Так, например, в соответствии с формулой (3.3) получим

$$\theta_{k'}^{(1)} = \iint_G \left(\Omega_{k'} + \frac{\partial \Omega_0}{\partial x_3}\psi_k\right)\varphi_1 dG$$

где функция $\Omega_{k'}$ определяется граничными условиями

$$\left[\frac{\partial \Omega_{k'}}{\partial x_3}\right]_{x_3=C} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\psi_k \frac{\partial \Omega_0}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\psi_k \frac{\partial \Omega_0}{\partial x_2}\right) + [\nabla \psi_k \times \mathbf{R}], \quad \left[\frac{\partial \Omega_{k'}}{\partial n}\right]_{\zeta} = 0$$

Аналогично, функция $A_{i'j}$ определяется граничными условиями

$$\left[\frac{\partial A_{i'j}}{\partial x_3}\right]_{x_3=C} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\varphi_j \frac{\partial A_{i'0}}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\varphi_j \frac{\partial A_{i'0}}{\partial x_2}\right), \quad \left[\frac{\partial A_{i'j}}{\partial n}\right]_{\zeta} = 0$$

где

$$A_{i'0} = \frac{\operatorname{ch} \lambda_{i'}(x_3 + {}^1/_2 h)}{\lambda_{i'} \operatorname{sh} \lambda_{i'} h}\psi_i(x_1 x_2)$$

Покажем, что при принятых геометрических характеристиках области G уравнения движения существенно упрощаются.

Прежде всего докажем, что в этом случае $J_{11} = 0$. Действительно, согласно (3.22) J_{11} является двойной суммой членов, зависящих от интегралов по области G, произведений $f_1 f_j f_i$ и $\nabla f_1 \nabla f_j \nabla f_i$, умноженных на $x_2^{(i)}$ и $x_2^{(j)}$.

В случае, когда функции f_i и f_j принадлежат последовательности функций φ_n $(f_1 = \varphi_1)$, записанные выше тройные произведения функций будут представлять собой нечетные функции и интегралы от них будут равны нулю. Эти интегралы могут быть отличны от нуля лишь в случае принадлежности одной из функций f_i или f_j к классу ψ_k. Однако в этом случае

$$x_2^{(k')} = \iint\limits_G x_2 \psi_k dG = 0 \tag{4.1}$$

т. е. соответствующий член суммы (3.22) будет равен нулю. Это доказывает наше утверждение.

Из формулы (3.14) следует, что коэффициент $\Omega_0^{(i)}$ обращается в нуль при тех же функциях f_i, которые обращают в нуль коэффициент $x_2^{(i)}$. Легко показать на основании формул (3.15) и (3.16), проведя рассуждения, аналогичные изложенным выше, что коэффициенты $\theta_1^{(i)}$ и $\theta_i^{(1)}$ могут быть отличны от нуля только в том случае, если индекс i относится к функции f_i из подпоследовательности функций ψ_k. Это условие является необходимым, но недостаточным:

$$\theta_1^{(n)} = \theta_n^{(1)} = 0 \tag{4.2}$$

Также на основании формул (3.19) и (3.20) следует, что коэффициенты $B_{k1}^{(i)}$ и $B_{1k}^{(i)}$ могут быть отличны от нуля, только лишь когда индексы i и k относятся к функциям разных подпоследовательностей. В противном случае они равны нулю:

$$B_{k1}^{(i)} = B_{1k}^{(i)} = 0, \qquad B_{k'1}^{(i')} = B_{1k'}^{(i')} = 0 \tag{4.3}$$

Из (3.21) следует также, что

$$B_{111}^{(k')} = 0 \tag{4.4}$$

Далее примем, что вектор массовых сил $\mathbf{j}$ направлен строго противоположно оси $0^*x_3^*$ и абсолютная его величина, равная g, не зависит от времени. Угол между осями Ox_3 и $O^*x_3^*$ обозначим через ε. Используя обозначения (4.1) и результаты (4.2)—(4.4), составим уравнения плоского движения твердого тела, содержащего жидкое наполнение, учитывающие в первом приближении немалость колебаний жидкости в полости:

$$m\dot{v}_3 + \rho x_2^{(1)} \frac{d}{dt}(\omega a_1) + \rho \frac{d}{dt}(\dot{a}_1 a_1) = P_3 \tag{4.5}$$

$$m\dot{v} + \rho \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{a}_n x_2^{(n)} = P \tag{4.6}$$

$$J_0\dot{\omega} + \rho x_2^{(1)} \frac{d}{dt}(v_3 a_1) + \rho \sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{a}_n \Omega_0^{(n)} + a_n g x_2^{(n)}) +$$

$$+ \rho \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{\infty} (a_1 b_k \theta_{k'}^{(1)} + a_1 \dot{b}_k \theta_1^{(k')}) + \rho \theta_{11}^{(1)} \frac{d}{dt}(\dot{a}_1 a_1^2) = M \tag{4.7}$$

$$\ddot{a}_n A_{n0}^{(n)} + g a_n + \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{\infty} (\dot{a}_1 b_k B_{1k'}^{(n)} + a_1 \dot{b}_k B_{k'1}^{(n)}) + B_{111}^{(n)} \frac{d}{dt}(\dot{a}_1 a_1^2) + \varepsilon g x_2^{(n)} + \dot{v} x_2^{(n)} +$$

$$+ \dot{\omega}\Omega_0^{(n)} + \dot{a}_1^2 a_1 [(\nabla B_{11})(\nabla A_{10})]^{(n)} + \dot{a}_1 \sum_{k=1}^{\infty} [(\nabla A_{10})(\nabla A_{k'0})]^{(n)} \dot{b}_k = 0 \tag{4.8}$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

$$\ddot{b}_k A_{k'0}^{(k')} + g b_k + B_{11}^{(k')} \frac{d}{dt}(\dot{a}_1 a_1) + \frac{d}{dt}\sum_{n=2}^{\infty}(\dot{a}_1 a_n B_{1n}^{(k')} + a_1 \dot{a}_n B_{n1}^{(k')}) +$$

$$+ \theta_1^{(k')} \frac{d}{dt}(\omega a_1) + \frac{1}{2}\dot{a}_1^2 [(\nabla A_{10})^2]^{(k')} + \dot{a}_1 \sum_{n=2}^{\infty} [(\nabla A_{10})(\nabla A_{n0})]^{(k')} \dot{a}_n +$$

$$+ \dot{a}_1 \left[+ v \frac{\partial A_{10}}{\partial x_2} \right]^{(k')} + \dot{a}_1 \omega [(\nabla A_{10})(\nabla \Omega_0)]^{(k')} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots) \qquad (4.9)$$

В общем случае уравнения (4.5)—(4.9) представляют собой совокупную систему связанных между собой уравнений, решение которых можно искать лишь методом редукции. В линейной постановке задачи [1] с движением твердого тела было связано лишь изменение тех параметров движения жидкости, функции формы которых f_i не обращали в нуль коэффициент $x_2^{(i)}$. Изменение же остальных параметров не зависело от движения твердого тела, как и от изменения других параметров, и описывалось системой не связанных между собой уравнений.

Таким образом, учет в первом приближении нелинейных членов в уравнениях движения позволяет более полно и точно учесть связи движения твердого тела и жидкости, уточнив механизм возбуждения колебаний бо́льшего числа параметров, описывающих движения жидкости.

Уравнения (4.5)—(4.9) могут быть существенно упрощены при следующих дополнительных предположениях. Во-первых, будем полагать возможным пренебречь составляющей скорости $\mathbf{v}$ по оси Ox_3 в уравнении (4.7). Во-вторых, в уравнениях (4.9) будем пренебрегать членами, имеющими порядок величины a_1^3, по сравнению с членами порядка a_1^2. Допустимость более грубого учета малых величин в этих уравнениях, определяющих изменение параметров b_k, обосновывается тем, что указанные параметры не представлены в других уравнениях линейными членами, входя лишь в нелинейные комбинации параметров. А в этом случае учет зависимости параметров b_k от членов порядка выше a_1^2 приведет к появлению в уравнениях (4.7) и (4.8) членов порядка выше a_1^3, которыми было условлено пренебрегать. Очевидно, что все произведения параметров v, ω, a_i, $\dot{a}_i$, $\ddot{a}_i$ $(i > 1)$ на параметр a_1 или его производные будут иметь порядок величины a_1^3 и потому мы их опустим в уравнениях (4.9).

При сделанных упрощениях уравнения (4.7) и (4.9) преобразуются к виду

$$J_0 \dot{\omega} + \rho \sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{a}_n \Omega_0^{(n)} + a_n g x_2^{(n)}) + \rho \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{\infty} (\dot{a}_1 b_k \theta_{k'}^{(1)} + a_1 \dot{b}_k \theta_1^{(k')}) +$$

$$+ \rho \theta_{11}^{(1)} \frac{d}{dt}(\dot{a}_1 a_1^2) = M \qquad (4.10)$$

$$\ddot{b}_k A_{k'0}^{(k')} + g b_k + B_{11}^{(k')} \frac{d}{dt}(\dot{a}_1 a_1) + \frac{\dot{a}_1^2}{2} [(\nabla A_{10})^2]^{(k')} = 0 \qquad (4.11)$$

Упростим обозначения коэффициентов

$$J_0 = J,\ \Omega_0^{(n)} = \Omega^{(n)},\quad \theta_{k'}^{(1)} = \theta_k,\quad \theta_1^{(k')} = \theta^{(k)},\ \theta_{11}^{(1)} = \theta$$

$$B_{1k'}^{(n)} = B_{1k}^{(n)},\ B_{k'1}^{(n)} = B_{k1}^{(n)},\ B_{11}^{(k')} = B_1^{(k)},\ B_{111}^{(n)} = B^{(n)},\ A_{n0}^{(n)} = A_n,\ A_{k'0}^{(k')} = B_k$$

$$[(\nabla B_{11})(\nabla A_{10})]^{(n)} = C^{(n)},\quad [(\nabla A_{10})(\nabla A_{k'0})]^{(n)} = D_k^{(n)},\quad \frac{1}{2}[(\nabla A_{10})^2]^{(k')} = F^{(k)}$$

Используя эти обозначения, окончательно перепишем систему нелинейных уравнений, решающих поставленную задачу

$$m\ddot{x} + \rho \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{a}_n x_2^{(n)} = P \tag{4.12}$$

$$J\ddot{\varepsilon} + \rho \sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{a}_n \Omega^{(n)} + a_n g x_2^{(n)}) + \rho \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{\infty} (\dot{a}_1 b_k \theta_k + a_2 \dot{b}_k \theta^{(k)}) +$$

$$+ \rho\theta \frac{d}{dt}(\dot{a}_1 a_1^2) = M \tag{4.14}$$

$$\ddot{a}_n A_n + g a_n + \ddot{x} x_2^{(n)} + \ddot{\varepsilon}\Omega^{(n)} + \varepsilon g x_2^{(n)} + \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{\infty} (\dot{a}_1 b_k B_{1k}^{(n)} + a_1 \dot{b} B_{k1}^{(n)}) +$$

$$+ B^{(n)} \frac{d}{dt}(\dot{a}_1 a_1^2) + C^{(n)} \dot{a}_1^2 a_1 + \dot{a}_1 \sum_{k=1}^{\infty} \dot{b}_k D_k^{(n)} = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4.14}$$

$$\ddot{b}_k B_k + g b_k + B_1^{(k)} \frac{d}{dt}(\dot{a}_1 a_1) + F^{(k)} \dot{a}_1^2 = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{4.15}$$

§ 5. Значения коэффициентов при нелинейных членах для полости в виде кругового цилиндра. Для круговой формы области G собственные функции краевой задачи (1.2), нечетные по переменной x_2, φ, имеют вид:

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\xi_{ns}}{r_0 \sqrt{\xi_{ns}^2 - n^2}\, J_n(\xi_{ns})} J_n\left(\xi_{ns} \frac{r}{r_0}\right) \sin n\alpha \quad (n=1, 3, 5, \ldots;\ s=1, 2, \ldots) \tag{5.1}$$

а функции ψ (четные по переменной x_2) — такой вид:

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\xi_{ms}}{r_0 \sqrt{\xi_{ms}^2 - m^2}\, J_m(\xi_{ms})} J_m\left(\xi_{ms} \frac{r}{r_0}\right) \cos m\alpha \quad (m = 0, 2, 4, \ldots;\ s = 1, 2, \ldots) \tag{5.2}$$

Таким образом, в данном случае при обозначении той или иной функции из класса φ или ψ вместо одинарного индекса следует писать двойной (ns или ms). В формулах (5.1) и (5.2) введены обозначения:

ξ_{ns}, ξ_{ms} — корни уравнений $J_n'(\xi) = 0$, $J_m'(\xi) = 0$,

J_n, J_m — функции Бесселя первого рода соответствующего порядка,

r, α — полярные координаты точки в плоскости Ox_1x_2 (угол α отсчитывается от оси Ox_1)

r_0 — радиус окружности.

Непосредственный расчет коэффициентов уравнений движения показывает, что коэффициенты, выражающие связь изменения каждого из параметров a_{ns} и b_{ms} с изменением другого параметра или с движением твердого тела, отличны от нуля только при $n = 1$ или $m = 0$, или $m = 2$.

Учитывая это, опускаем из рассмотрения параметры a_{ns} и b_{ms} при $n \neq 1$, $m \neq 0$ и $m \neq 2$.

Значения коэффициентов при нелинейных членах уравнений рассчитаем только при $s=1$, что позволяет опустить и этот индекс.

Таблица 1

$\frac{h}{r_0}$	$r_0^{-1}\theta_0$	$r_0^{-1}\theta_2$	$r_0^{-1}\theta^{(0)}$	$r_0^{-1}\theta^{(2)}$	$r_0\theta$
2	0.617	—0.099	0.472	—0.227	0.726
1	0.617	—0.099	0.472	—0,237	0.647
0.5	0.758	—0.081	0.491	—0.252	0.570
0.2	1.087	—0.033	0.534	—0.261	0.490

Таблица 2

$\frac{h}{r_0}$	$r_0B_{10}^{(1)}$	$r_0B_{01}^{(1)}$	$r_0B_{12}^{(1)}$	$r_0B_{21}^{(1)}$	$r_0^3B^{(1)}$	$r_0^3C^{(1)}$	$r_0D_0^{(1)}$	$r_0D_2^{(1)}$
2	0.709	—0.142	—0.593	—0.0728	0.494	—1.05	0.668	—0.789
1	0.749	—0.317	—0.610	—0.0530	0.565	—1.15	0.686	—0.809
0.5	1.049	—0.163	—0.738	0.111	1.22	—1.98	0.817	—0.972
0.2	3.396	—1.175	—1.733	1.435	10.4	—11.9	1.826	—2.29

В таблицах 1—3 содержатся безразмерные величины коэффициентов при нелинейных членах уравнений, получаемых из системы (4.12)—(4.15) при $s=1$. При этом $n=1$; $m=0{,}2$.

Таблица 3

$\frac{h}{r_0}$	$r_0B_1^{(0)}$	$r_0B_1^{(2)}$	$r_0F^{(0)}$	$r_0F^{(2)}$
2	—0.0127	—0.0832	—0.0265	—0.134
1	—0.0302	—0.0536	—0.0461	—0.126
0.5	—0.161	0.110	—0.196	—0.062
0.2	—1.17	1.43	—1.36	0.437

Для приведения к безразмерной величине каждый из коэффициентов умножался на r_0 в соответствующей степени. Безразмерные величины указанных коэффициентов зависят только от относительной величины высоты столба жидкости; однако эта зависимость существенна лишь при $h/r_0 < 2$, а при $h/r_0 \geqslant 2$ они практически постоянны.

Поступила 2 VII 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Нариманов Г. С. О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью. ПММ, т. XX, вып. 1, 1956.