Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ

Г. К. Пожарицкий

(Москва)

В работе исследуется устойчивость движения голономных систем со связями, не зависящими явно от времени.

Предполагается, что на систему, кроме сил консервативных, действуют также диссипативные силы с полной диссипацией. Исследуемые движения относятся к разряду установившихся.

1. Пусть задана голономная механическая система со связями, не зависящими явно от времени. Пусть $q_1, \ldots, q_n$ — независимые параметры, определяющие положение системы, выбраны так, что декартовы координаты точек системы выражаются через независимые параметры под видом функций $x_j = x_j(q_1, \ldots, q_n)$ $(j = 1, \ldots, N)$, не содержащих явно времени.

Если силы, действующие на систему, имеют потенциал, то уравнения ее движения можно записать в форме Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \dot q_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

Если L не содержит явно $q_{k+1}, \ldots, q_n$, то система (1) допускает $n - k$ интегралов:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_{k+1}} = \alpha_{k+1}, \ \ldots, \ \frac{\partial L}{\partial \dot q_n} = \alpha_n$$

Если, кроме того, $q_1^\circ, \ldots, q_k^\circ, \dot q_{k+1}^\circ, \ldots, \dot q_n^\circ$ есть решение системы уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot q_{k+1}} = \alpha_{k+1}, \ \ldots, \ \frac{\partial L}{\partial \dot q_n} = \alpha_n$$

составленных в предположении, что $\dot q_1 = \ldots \dot q_k = 0$, то система (1) допускает решение

$$\begin{gathered} \dot q_1 = 0, \ \ldots, \ \dot q_k = 0, \qquad \dot q_{k+1} = \dot q_{k+1}^\circ, \ \ldots, \ \dot q_n = \dot q_n^\circ \\ q_1 = q_1^\circ, \ \ldots, \ q_k = q_k^\circ, \qquad q_{k+1} = \dot q_{k+1}^\circ (t - t_0), \ \ldots, \ q_n = \dot q_n^\circ (t - t_0) \end{gathered} \tag{2}$$

причем $\dot q_{k+1}^\circ, \ldots, \dot q_n^\circ$ наверняка не все получатся нулями, если $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n$ суть не все нули.

Если на механическую систему, кроме сил консервативных, действуют еще и диссипативные силы с полной диссипацией, то уравнения движения приобретают вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial F}{\partial \dot q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \dot q_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

Здесь

$$F(\dot q_1, \ldots, \dot q_n) = \frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{n} \beta_{ij}\dot q_i \dot q_j$$

представляет собой определенно отрицательную квадратичную форму обобщенных скоростей с постоянными коэффициентами.

Таким образом, консервативная система допускает при определенных условиях движения, в которых обобщенные скорости (циклические) и обобщенные координаты (нециклические) сохраняют свои начальные значения, причем обобщенные скорости суть не все нули.

Нетрудно показать, что (3) не допускают решений типа (2), если не все $\dot q_{k+1}^{\circ}, \ldots, \dot q_n^{\circ}$ равны нулю. Действительно, пусть $q_1(t), \ldots, q_n(t)$, $\dot q_1(t), \ldots, \dot q_n(t)$ — решение системы (3), определяемое начальными условиями

$$q_1(t_0), \ldots, q_n(t_0), \dot q_1(t_0), \ldots, \dot q_n(t_0)$$

Обозначим через $U(q_1, \ldots, q_k)$ потенциальную функцию системы и введем величину

$$r^2 = \min \sum_{i=1}^{k} [q_i(t_0) - q_i']^2$$

где $q_1', \ldots, q_k'$ — любая система значений нециклических координат, обладающая тем свойством, что

$$U(q_1, \ldots, q_k) \to \infty \qquad \text{при } q_1 \to q_1', \ldots, q_k \to q_k'$$

Тогда по любому $\delta > 0$ найдется такой момент $t_1 > t_0$, что будет выполняться неравенство

$$\text{либо} \quad \sum_{i=1}^{n} \dot q_i^2(t_1) < \delta, \quad \text{либо} \quad \sum_{i=1}^{k} [q_i(t_1) - q_i(t_0)]^2 > (1-\delta) r^2 \tag{4}$$

Действительно, так как

$$H(t) - H(t_0) = [T - U]\Big|_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} \sum_{ij=1}^{n} \beta_{ij}\dot q_i(t)\dot q_j(t)\,dt \leqslant -\alpha \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \dot q_i^2(t)\,dt$$

где $\alpha > 0$ — постоянная, то если не найдется такого момента t_1, чтобы выполнялось первое неравенство (4), то последний интеграл с течением времени станет сколь угодно большой по модулю отрицательной величиной. Так как $T > 0$, то это значит, что $U[q_1(t), \ldots, q_k(t)] \to \infty$ при $t \to \infty$ и найдется такой момент t_1, что будет выполняться второе неравенство (4). Так как во всех механических задачах $H(t_0)$ конечна, то функция

$$\psi(t_1) = \sum_{i=1}^{n} [\dot q_i(t_1) - \dot q_i(t_0)]^2 + \sum_{i=1}^{k} [q_i(t) - q_i(t_0)]^2 \tag{5}$$

характеризующая отклонение решения от своих начальных значений, будет удовлетворять

$$\text{либо} \quad \psi(t_1) > \sum_{i=1}^{n} \dot q_i^2(t_0) - 2\sum_{i=1}^{n} |\dot q_i(t_0)|\sqrt{\delta}, \qquad \text{либо} \quad \psi(t_1) > (1-\delta) r^2$$

причем первая часть первого неравенства отлична от нуля, если $\dot q_1^2(t_0) + \ldots + \dot q_n^2(t_0) > 0$, а правая часть второго отлична от нуля, так как $H(t_0)$ конечна. Доказательство закончено.

Так как нижняя граница $\psi(t_1)$ отклонения решения от начальных значений не зависит от величины диссипативных сил, то для систем, на которые они действуют, естественно поставить вопрос о приложении к ним (системам) некоторых дополнительных сил так, чтобы уравнения движения допускали в качестве решения систему функций

$$\begin{gathered} q_1 = 0, \ \ldots, \ q_k = 0, \qquad \dot q_{k+1} = \dot q_{k+1}^{\circ 1}, \ \ldots, \ \dot q_n = \dot q_n^{\circ 1} \\ q_1 = q_1^{\circ 1}, \ \ldots, \ q_k = q_k^{\circ 1}, \qquad q_{k+1} = \dot q_{k+1}^{\circ 1}(t - t_0), \ \ldots, \ q_n = \dot q_n^{\circ 1}(t - t_0) \end{gathered} \tag{6}$$

где $q_1^{\circ 1}, \ldots, q_k^{\circ 1}, \dot q_{k+1}^{\circ 1}, \ldots, \dot q_n^{\circ 1}$ — постоянные, причем $\dot q_{k+1}^{\circ 1}, \ldots, \dot q_n^{\circ 1}$ — не все нули.

Предположим, что эти дополнительные силы $F_1, \ldots, F_n$ входят в правые части уравнений в виде постоянных величин, так что последние имеют вид:

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}\dot q_j + F_i, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \dot q_i \qquad (i = 1, \ldots, k) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_m}\right) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{mj}\dot q_j + F_m, \qquad \frac{dq_m}{dt} = \dot q_m \qquad (m = k+1, \ldots, n) \end{gathered} \tag{7}$$

В дальнейшем индексом m везде будем пользоваться для нумерации уравнений, соответствующих циклическим координатам.

Для того чтобы система функций (6) представляла решение системы (7), необходимо и достаточно, чтобы $q_1^{\circ 1}, \ldots, q_k^{\circ 1}, \dot q_{k+1}^{\circ 1}, \ldots, \dot q_n^{\circ 1}$ представляли решение системы уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_{j=k+1}^{n} \beta_{ij}\dot q_j + F_i = 0, \qquad \sum_{j=k+1}^{n} \beta_{mj}\dot q_j + F_m = 0 \tag{8}$$

Если обратить задачу и по заданным $F_1, \ldots, F_n$ искать решение (6), то последние $n-k$ уравнений послужат для определения $\dot q_{k+1}^{\circ 1}, \ldots, \dot q_n^{\circ 1}$. Так как форма $F(\dot q_1, \ldots, \dot q_n)$ определенно отрицательная, то определитель последних $n-k$ уравнений наверняка отличен от нуля. Поэтому они всегда будут иметь единственное решение, причем среди величин $\dot q_{k+1}^{\circ 1}, \ldots, \dot q_n^{\circ 1}$ найдется хотя бы одна, отличная от нуля, если $F_{k+1}, \ldots, F_n$ — не все нули. После определения $\dot q_{k+1}^{\circ 1}, \ldots, \dot q_n^{\circ 1}$ первые k уравнений системы (8) послужат для определения $q_1^{\circ 1}, \ldots, q_k^{\circ 1}$.

Для того чтобы решение (6) совпадало с системой функций (2), необходимо и достаточно, как нетрудно заметить, чтобы выполнялись равенства

$$\sum_{j=k+1}^{n} \beta_{ij}\dot q_j^{\circ 1} + F_i = 0, \qquad \sum_{j=k+1}^{n} \beta_{mj}\dot q_j^{\circ 1} + F_m = 0 \tag{9}$$

Если F_i удовлетворяют соотношениям (9), то это значит, что при движении, определяемом соотношениями (2), дополнительные силы уравновешивают силы диссипативные.

2. Примем решение (6) за невозмущенное движение. Для исследования этого движения на устойчивость удобно воспользоваться переменными Гамильтона

$$q_1, \ldots, q_n; \qquad p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot q_1}, \ \ldots, \ p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot q_n}, \qquad H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i - L$$

В этих переменных уравнения (7) приобретают вид:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}\frac{\partial H}{\partial p_j} + F_i, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i=1,\ldots,k)\\
&\frac{dp_m}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{mj}\frac{\partial H}{\partial p_j} + F_m, \qquad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_m} \qquad (m=k+1,\ldots,n)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Пусть решению (6) в переменных p_i, q_i отвечает система функций

$$p_1 = p_1^{\circ}, \ \ldots, \ p_n = p_n^{\circ} \tag{6_1}$$

$$q_1 = q_1^{\circ 1}, \ \ldots, \ q_k = q_k^{\circ 1}, \ q_{k+1} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_{k+1}}\right)^{\circ}(t-t_0), \ \ldots, \ q_n = \left(\frac{\partial H}{\partial p_n}\right)^{\circ}(t-t_0)$$

Здесь символ $(z(q_1, \ldots, q_k, p_1, \ldots, p_n))^{\circ}$ означает, что в функцию $z(q_1, \ldots, q_k, p_1, \ldots, p_n)$ на место p_i, q_i подставлены p_i°, $q_i^{\circ 1}$.

Устойчивость движения (6_1) изучим по отношению к переменным $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_k$.

Если положить

$$\eta_i = p_i - p_i^{\circ} \quad (i=1,\ldots,n), \qquad \xi_i = q_i = q_i^{\circ 1} \quad (i=1,\ldots,k)$$

и предположить, что H является голоморфной функцией своих аргументов в окрестности значений (6_1), то уравнения возмущенного движения будут иметь вид:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\eta_i}{dt} = -\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j}\right)^{\circ}\eta_j - \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j}\right)^{\circ}\xi_j + \sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}v_j + X_i \qquad (i=1,\ldots,k)\\
&\frac{d\eta_m}{dt} = \sum_{j=1}^{n}\beta_{mj}v_j + X_m \qquad (m=k+1,\ldots,n)\\
&\frac{\partial\xi_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)^{\circ}\eta_j + \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j}\right)^{\circ}\xi_j + Y_i \qquad (i=1,\ldots,k)
\end{aligned}
\tag{11}
$$

где через X_i, X_m, Y_i обозначены совокупности членов измерения выше первого относительно переменных, а через $v_1, \ldots, v_n$ — линейные формы:

$$v_i = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)^{\circ}\eta_j + \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j}\right)^{\circ}\xi_j \qquad (i=1,\ldots,n)$$

Уравнениям (11) соответствует система первого приближения, которая получится, если в последних отбросить X_i, X_m, Y_i

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\eta_i}{dt} = -\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j}\right)^{\circ}\eta_j - \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j}\right)^{\circ}\xi_j + \sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}v_j \qquad (i=1,\ldots,k)\\
&\frac{d\eta_m}{dt} = \sum_{j=1}^{n}\beta_{jm}v_j \qquad (m=k+1,\ldots,n)\\
&\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)^{\circ}\eta_j + \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j}\right)^{\circ}\xi_j \qquad (i=1,\ldots,k)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Рассмотрим квадратичную форму

$$\frac{1}{2}W = \frac{1}{2}\left[\sum_{ij=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)^{\circ}\eta_i\eta_j + 2\sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\substack{k\\ n}}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j}\right)^{\circ}\eta_i\xi_j + \sum_{ij=1}^{k}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j}\right)^{\circ}\xi_i\xi_j\right]$$

которая представляет собой совокупность членов второй степени в разложении функции $H - (H)^{\circ}$.

Так как эта функция представляет интеграл системы (12), если в последней положить все β_{ij} нулями, то нетрудно проверить, что

$$\frac{1}{2}\frac{dW}{dt}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W}{\partial \eta_i}\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}v_j=\sum_{ij=1}^{n}\beta_{ij}v_i v_j=2F(v_1,\ldots,v_n),\qquad \frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial \eta_i}=v_i$$

есть функция постоянно отрицательная.

Если W есть функция определенно положительная, то на основании последнего соотношения и первой теоремы А. М. Ляпунова об устойчивости можно заключить, что невозмущенное движение устойчиво в первом приближении.

3. Для дальнейшего исследования невозмущенного движения на устойчивость рассмотрим систему линейных форм

$$v_i=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)^{\circ}\eta_j+\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j}\right)^{\circ}\xi_j \qquad (i=1,\ldots,n)$$

$$w_i=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j}\right)^{\circ}\eta_j+\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j}\right)^{\circ}\xi_j \qquad (i=1,\ldots,k)$$

Определитель этой системы форм совпадает с дискриминантом квадратичной формы W.

Если в качестве новых переменных взять $v_1, \ldots, v_n, \xi_1, \ldots, \xi_k$ (ниже будет показано, что это всегда возможно), то формы $w_1, \ldots, w_k$ примут вид:

$$w_i=\sum_{j=1}^{k}\gamma_{ij}\xi_j+\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}v_j$$

Если упомянутый дискриминант отличен от нуля, то формы

$$w_i^{\circ}=\sum_{j=1}^{k}\gamma_{ij}\xi_j$$

будут совместно с формами $v_1, \ldots, v_n$ представлять линейно независимую систему форм. Рассмотрим функцию

$$R=\frac{1}{2}W+\beta\sum_{i=1}^{k}w_i^{\circ}v_i$$

во многом аналогичную функции, предложенной Н. Г. Четаевым [2], и ее производную, взятую в силу уравнений

$$\frac{dR}{dt}=\sum_{ij=1}^{n}\beta_{ij}v_i v_j+\beta\sum_{ij=1}^{k}\gamma_{ij}v_i v_j+\beta\sum_{i=1}^{k}w_i^{\circ}\frac{dv_i}{dt}$$

$$\frac{dv_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)^{\circ}\frac{d\eta_j}{dt}+\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j}\right)^{\circ}\frac{d\xi_j}{dt}=$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)^{\circ}\left[-w_i^{\circ}-\sum_{m=1}^{i}(\delta_{jm}-\beta_{jm})v_m\right]+\sum_{j=k+1}^{n}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)^{\circ}\sum_{m=1}^{n}\beta_{jm}v_m+$$

$$+\sum_{m=1}^{k}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_m}\right)^{\circ}v_m=-\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)^{\circ}w_j^{\circ}+\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{m=1}^{j}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)^{\circ}(\beta_{mj}-\delta_{mj})+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=k+1}^{n}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)^{\circ}\beta_{mj}+\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j}\right)^{\circ}\right]v_i$$

Отметим, что суммирование по j последних слагаемых в квадратной скобке можно производить по n, так как $q_{k+1}, \ldots, q_n$ в H явно не входят.

Обозначая суммы, стоящие в квадратных скобках, через θ_{ij}, имеем

$$\frac{dv_i}{dt}=-\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)^{\circ} w_j^{\circ}+\sum_{j=1}^{n}\theta_{ij}v_j$$

Следовательно,

$$\frac{dR}{dt}=\sum_{ij=1}^{n}\beta_{ij}v_i v_j+\beta\sum_{ij=1}^{k}\gamma_{ij}v_i v_j+\beta\sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\substack{n\\ k}}\theta_{ij}w_i^{\circ}v_j-\beta\sum_{ij=1}^{k}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i p_j}\right)^{\circ}w_i^{\circ}w_j^{\circ}.$$

Дискриминант этой квадратичной формы имеет вид:

$$\begin{vmatrix}
\beta_{11}+\beta\gamma_{11} & \cdots & \beta_{1k}^{*}+\beta\gamma_{1k}^{*} & \cdots & \beta_{1n}^{*} & \beta\theta_{11} & \cdots & \beta\theta_{1k}^{*} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\
\beta_{k1}^{*}+\beta\gamma_{k1}^{*} & \cdots & \beta_{kk}+\beta\gamma_{kk} & \cdots & \beta_{kn}^{*} & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\beta_{n1}^{*} & \cdots & \beta_{nk}^{*} & \cdots & \beta_{nn} & \beta\theta_{n1}^{*} & \cdots & \beta\theta_{nk}^{*} \\
\beta\theta_{11} & \cdots & \beta\theta_{1k}^{*} & \cdots & \beta\theta_{1n}^{*} & -\beta\left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1^2}\right)^{\circ} & \cdots & -\beta\left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_k}\right)^{\circ} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\beta\theta_{1k}^{*} & \cdots & \beta\theta_{kk}^{*} & \cdots & \beta\theta_{nk}^{*} & -\beta\left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_k}\right)^{\circ} & \cdots & -\beta\left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial p_k^{2}}\right)^{\circ}
\end{vmatrix}$$

$$\theta_{ij}^{*}=\tfrac{1}{2}(\theta_{ij}+\theta_{ji}) \quad \text{при } i\leqslant k, \qquad \theta_{ij}^{*}=0 \quad \text{при } i>k$$

$$\beta_{ij}^{*}=\tfrac{1}{2}(\beta_{ij}+\beta_{ji}), \qquad \gamma_{ij}^{*}=\tfrac{1}{2}(\gamma_{ij}+\gamma_{ji})$$

Постоянную β всегда можно выбрать настолько малой по модулю, что при вычислении знаков главных диагональных миноров можно пренебречь членами с высшими степенями β, и поэтому вопрос сведется к определению знаков главных диагональных миноров дискриминанта квадратичной формы

$$S=\sum_{ij=1}^{n}\beta_{ij}v_i v_j-\beta\sum_{ij=1}^{k}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)^{\circ}w_i^{\circ}w_j^{\circ}$$

Нетрудно показать, что последняя форма — определенно отрицательная при $\beta>0$. Действительно, по условию формы $w_1^{\circ}, \ldots, w_k^{\circ}$, $v_1, \ldots, v_n$ линейно независимы. Первая сумма представляет определенно отрицательную квадратичную форму переменных $v_1, \ldots, v_n$. Вторая сумма своими коэффициентами имеет величины

$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)^{\circ}=(b_{ij})^{\circ}$$

где b_{ij} — коэффициенты при произведениях обобщенных импульсов в выражении T — кинетической энергии системы:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{n}\beta_{ij}p_i p_j$$

Так как последняя представляет определенно положительную относительно $p_1, \ldots, p_n$ форму при любых фиксированных $q_1, \ldots, q_k$, то нетрудно убедиться в том, что вторая сумма есть определенно положительная квадратичная форма переменных $w_1^{\circ}, \ldots, w_k^{\circ}$, а S, следовательно, определенно отрицательна.

Если теперь выбрать $\beta > 0$ настолько малой, чтобы dR/dt, взятая в силу уравнений (12), была определенно отрицательной, то dR/dt, взятая в силу уравнений (11), также будет определенно отрицательной. Если $\beta > 0$ также настолько мала, что R определенно положительна, если W определенно положительна, то к функции R, допускающей бесконечно высший предел, можно приложить теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости. Сформулируем результат.

Теорема I. Если W определенно положительна, то движение асимптотически устойчиво.

Замечание. Если W определенно положительна, то ее дискриминант будет отличен от нуля, а формы $v_1,\ldots,v_n, w_1{}^\circ,\ldots,w_k{}^\circ$ будут линейно независимыми.

4. Отбросим теперь предположение о том, что дискриминант формы W отличен от нуля.

Пусть среди форм $v_1,\ldots,v_n$, $w_1{}^\circ,\ldots,w_k{}^\circ$ найдется $n+p$ независимых $v_1,\ldots,v_n, w_1{}^\circ,\ldots,w_p{}^\circ$. Так как формы $v_1,\ldots,v_n$ линейно независимы, то $p \geqslant 0$. Действительно, среди миноров порядка n матрицы форм $v_1,\ldots,v_n$, всегда найдется отличный от нуля минор, а именно, как это показано в 3°, минор

$$\left|\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)^\circ\right| = |(b_{ij})^\circ| > 0$$

и переход от системы форм $v_1,\ldots,v_n$, $w_1,\ldots,w_k$ к системе $v_1,\ldots,v_n$, $w_1{}^\circ,\ldots,w_k{}^\circ$ всегда возможен, причем среди форм $w_1{}^\circ,\ldots,w_k{}^\circ$ найдется ровно p форм, линейно независимых между собой. Пусть это формы $w_1{}^\circ,\ldots,w_p{}^\circ$.

Система уравнений $v_1 = \ldots = v_n = 0$, $w_1 = 0,\ldots, w_k = 0$ представляет по терминологии Э. Картана [3] систему, ассоциированную по отношению к форме W.

Как показал Э. Картан, форма W может быть выражена через любые $n+p$ независимые линейные формы, являющиеся линейными комбинациями любых $n+p$ независимых форм из системы $v_1,\ldots,v_n$, $w_1,\ldots,w_k$, и, следовательно, может быть выражена при помощи форм $v_1,\ldots,v_n$, $w_1{}^\circ,\ldots,w_p{}^\circ$. Так как $R = \beta(w_1{}^\circ v_1 + \ldots + w_k{}^\circ v_k) + {}^1/_2 W$, то она тоже может быть выражена при помощи форм $v_1,\ldots,v_n$, $w_1{}^\circ,\ldots,w_p{}^\circ$.

Нетрудно видеть, что $\beta > 0$ всегда можно выбрать настолько малой, что dR/dt, взятая в силу уравнений первого приближения, будет определенно отрицательной функцией переменных $v_1,\ldots,v_n, w_1{}^\circ,\ldots,w_p{}^\circ$.

Если dR/dt определенно отрицательна, то можно подобрать постоянную $\alpha > 0$ так, что будет выполняться неравенство $dR/dt < \alpha R$ и неравенство $R \leqslant R(t_0)\, e^{\alpha(t-t_0)}$

Если $R(t_0)$ может принимать отрицательные значения (а это всегда будет выполняться при достаточно малой $\beta > 0$, если W может принимать отрицательные значения), то на основании последнего неравенства и теорем о характеристичном числе суммы и произведения мы убеждаемся в том, что система (12) имеет отрицательное характеристичное число. Применяя к системе (11) теорему о неустойчивости для систем, у которых система первого приближения имеет постоянные коэффициенты, принадлежащую А. М. Ляпунову, получаем результат.

Теорема II. Если W может принимать отрицательные значения, то движение неустойчиво.

5. Как известно, для устойчивости движения (2) консервативной системы достаточно, чтобы квадратичная форма

$$\frac{1}{2}\overline{W}=\frac{1}{2}\left[\sum_{j,i=1}^{k}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)^{\circ}\eta_i\eta_j+2\sum_{i,j=1}^{k}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i q_i}\right)^{\circ}\eta_i\xi_j+\sum_{i,j=1}^{k}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j}\right)\xi_i\xi_j\right]$$

была определенно положительной функцией своих переменных $\eta_1,\ldots,\eta_k$, $\xi_1,\ldots,\xi_k$. Движение, однако, может быть иногда устойчивым, когда $\overline{W}$ может принимать и отрицательные значения.

Так как $\overline{W}$ равна квадратичной форме, W в которой $\eta_{k+1},\ldots,\eta_n$ положены нулями, то W может быть определенно положительной лишь в том случае, если $\overline{W}$ определенно положительна относительно своих переменных $\xi_1,\ldots,\xi_k,\eta_1,\ldots,\eta_k$. Если же $\overline{W}$ может принимать отрицательные значения, то и W может принимать таковые.

Если к механической системе приложены еще и диссипативные силы с полной диссипацией, а также дополнительные силы, удовлетворяющие соотношениям (8), то последние мы назовем силами, уравновешивающими диссипативные при движении (2). Сформулируем результат.

I. Если W — функция знакоопределенная, то движение (2), устойчивое при наличии консервативных сил, переходит в асимптотически устойчивое при добавлении диссипативных сил с полной диссипацией и сил, уравновешивающих диссипативные при движении (2).

II. Если $\overline{W}$ может принимать отрицательные значения, то при добавлении диссипативных сил и сил, уравновешивающих диссипативные при движении (2), устойчивость, существовавшая при наличии одних консервативных сил, нарушается, а неустойчивость не стабилизируется.

III. Некоторые движения, для которых $\overline{W}$ определенно положительна относительно $\xi_1,\ldots,\xi_k,\eta_1,\ldots,\eta_k$, устойчивые при наличии одних консервативных сил, теряют устойчивость при добавлении сил, упомянутых выше, если W может принимать отрицательные значения.

6. Пример [2]. Для иллюстрации рассмотрим гибкий вал с насаженным на него в середине, между опорными подшипниками, маховиком. При изгибе вала ортогонально насаженный маховик будет лежать в неизменной плоскости. В этой неподвижной плоскости определим положение центра тяжести полярными координатами r, φ с полюсом в точке O пересечения этой плоскости с прямой, соединяющей подшипники. Отклонение центра тяжести G маховика от его точки P эксцентрической заделки на гибком вале обозначим через e.

Если к валу в подшипниках приложен постоянный момент, направленный вдоль прямой, соединяющий подшипники, а массой вала при составлении уравнений движения можно пренебречь, то живая сила системы и ее потенциальная энергия будут

$$2T=m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+mk^2(\dot{\varphi}+\dot{\psi})^2$$

$$2V=m\mu(r^2+e^2-2re\cos\psi)-2mM(\varphi+\psi)$$

где m — масса маховика, k — центральный (относительно центра тяжести) радиус инерции, μm — характеристика упругой силы гибкого вала, ψ — угол между радиус-вектором и эксцентриситетом e, отсчитываемый от GO согласно принятому положительному вращению, а mM — величина упомянутого постоянного момента.

Если на маховик, кроме того, действуют диссипативные силы с диссипативной функцией

$$F = -\frac{1}{2} m [\alpha\dot\varphi^2 + \beta\dot\psi^2 + \gamma\dot r^2]$$

где α, β, γ — положительные постоянные, то уравнения (7) в данном случае приобретают вид:

$$M - \alpha\dot\varphi^\circ = 0, \quad r^\circ(\dot\varphi^\circ)^2 + \mu r^\circ + \mu e \cos\psi^\circ = 0, \quad M - \mu e r^\circ \sin\psi^\circ = 0 \tag{13}$$

Из первого уравнения получаем $\dot\varphi^\circ = \omega = M/\alpha$. Два последних дают

$$\frac{r^\circ(\mu - \omega^2)}{\mu e} = \cos\psi^\circ, \qquad \frac{M}{\mu e r_0} = \sin\psi^\circ \tag{14}$$

Учитывая, что r° положителен по определению, получаем

$$\cos\psi^\circ > 0 \text{ при } \mu - \omega^2 > 0, \qquad \cos\psi^\circ < 0 \text{ при } \mu - \omega^2 < 0$$

Разберем случай $\mu - \omega^2 > 0$. Перемножая уравнения (14), имеем

$$\sin 2\psi^\circ = \frac{2(\mu - \omega^2)M}{\mu^2 e^2} \tag{15}$$

Для того чтобы ψ° было действительным, необходимо

$$2M(\mu - \omega^2) \leqslant \mu^2 e^2 \tag{16}$$

Если последнее условие выполнено, то уравнение (15) дает для ψ° два значения:

$$\psi_1^\circ = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2(\mu - \omega)^2 M}{\mu^2 e^2}, \qquad \psi_2^\circ = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{2(\mu - \omega^2)M}{\mu^2 e^2}$$

Для получения r° возводим в квадрат уравнения (14), складываем и получаем биквадратное уравнение

$$r^{\circ 4}(\mu - \omega^2) - \mu^2 e^2 r^{02} + M^2 = 0$$

Его корни

$$r_{1,2}^\circ = + \sqrt{\frac{\mu^2 e^2 \pm \sqrt{(\mu^2 e^2)^2 - 4M^2(\mu - \omega^2)^2}}{2(\mu - \omega^2)^2}}$$

Соответствующие ψ_1° и ψ_2° будут действительными при выполнении условия (16).

Если $\mu - \omega^2 > 0$, то $\cos\psi < 0$, поэтому

$$\psi_3^\circ = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{2M(\mu - \omega^2)}{\mu^2 e^2}$$

$$\psi_4^\circ = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{2M(\mu - \omega^2)}{\mu^2 e^2}$$

$$r_{3,4}^\circ = + \sqrt{\frac{\mu^2 e^2 \pm \sqrt{(\mu^2 e^2)^2 - 4M^2(\mu - \omega^2)^2}}{2(\mu - \omega^2)^2}}$$

и величины ψ_3°, ψ_4°, r_3°, r_4° будут действительными при выполнении неравенства $\mu^2 e^2 \geqslant 2M(\omega^2 - \mu)$.

Этим исчерпываются решения системы (13). Введем новые переменные

$$p_1 = m\dot r, \qquad p_2 = mr^2\dot\varphi + mk^2(\dot\varphi + \dot\psi), \qquad p_3 = mk^2(\dot\varphi + \dot\psi)$$

Разрешая последние соотношения относительно $\dot r$, $\dot\varphi$, $\dot\psi$, получаем

$$\dot r = \frac{p_1}{m}, \qquad \dot\varphi = \frac{p_2 - p_3}{mr^2}, \qquad \dot\psi = \frac{p_3}{mk^2} - \frac{p_2 - p_3}{mr^2}$$

Функция $T+V=H$ в переменных p_1, p_2, p_3, r, ψ имеет вид:

$$H=\frac{1}{2}\left[\frac{p_1^2}{m}+\frac{(p_2-p_3)^2}{mr^2}+\frac{p_3^2}{mk^2}+m\mu r^2+m\mu e^2-\right.$$
$$\left.-2\mu mre\cos\psi-2mM(\varphi+\psi)\right]$$

Пусть i-му решению системы (13) соответствуют значения новых переменных p_1^{i0}, p_2^{i0}, p_3^{i0}, ψ_i^0, r_i^0. Введем обозначения

$$\eta_1^i=p_1-p_1^{i0},\quad \xi_2^i=\psi-\psi_i^0,\quad \eta_2^i=p_2-p_2^{i0},\quad \xi_1=r-r_i^0,\quad \eta_3^i=p_3-p_2^{i0}$$

Квадратичная форма W, которая решает поставленную задачу, будет

$$W=\frac{\eta_1^{i2}}{m}+\frac{\eta_2^{i2}}{mr_0^{i2}}+\frac{1}{m}\left(\frac{1}{r_i^{02}}+\frac{1}{k^2}\right)\eta_3^{i2}-\frac{2}{mr_i^{02}}\eta_2^i\eta_3^i+\frac{4\omega}{r_i^0}\eta_2^i\xi_1^i+\frac{4\omega}{r_i^0}\eta_2^i\xi_1^i+$$
$$+m(3\omega^2+\mu)\xi_1^{i2}+2m\mu e\sin\psi_i^0\xi_1^i\xi_2^i+m\mu r_i^0 e\cos\psi_i^0\xi_2^{i2}$$

Рассмотрение последнего члена показывает, что движение при $\cos\psi<0$ будет неустойчивым, т. е. неустойчивыми являются движения, соответствующие двум последним решениям системы (13), когда $\omega^2>\mu$.

Величина μ является в известном смысле критической для квадрата угловой скорости.

Если $\omega^2<\mu$, то невозмущенное движение будет асимптотически устойчивым при совместном выполнении неравенств

$$\Delta_{11}>0,\quad \Delta_{22}>0,\quad \Delta_{33}>0,\quad \Delta_{44}>0,\quad \Delta_{55}>0$$

где Δ_{ii} — главные дисконaльные миноры, Δ — дискриминанта квадратичной формы W:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{mr_i^{02}} & -\frac{1}{mr_i^0} & -\frac{2\omega}{r_i^0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{mr_i^{02}} & \frac{1}{mk^2}+\frac{1}{mr_0^{i2}} & \frac{2\omega}{r_i^0} & 0 \\ 0 & -\frac{2\omega}{r_i^0} & \frac{2\omega}{r_i^0} & m(3\omega^2+\mu) & m\mu e\sin\psi_i^0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu me\sin\psi_i^0 & m\mu er_i^0\cos\psi_i^0 \end{vmatrix} \tag{17}$$

Неравенства (17), как показывают вычисления, сводятся к двум неравенствам:

$$\mu-\omega^2>0,\qquad r_i^{04}(\mu-\omega^2)-M^2>0 \tag{18}$$

Учитывая уравнение, служащее для определения r_1^0, преобразуем второе из неравенств (18) в неравенство $2M(\mu-\omega^2)<\mu^2e^2$, почти в точности совпадающее с (16).

Для r_2^0 второе из неравенств (18) нарушается. Движение в этом случае неустойчиво, в то время как движение r_1^0, ψ_1^0, p_1^{10}, p_2^{10}, p_3^{10} устойчиво асимптотически.

Поступила 25 VI 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ГТТИ, 1951.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения ГТТИ, 1955.
3. Картан Э. Интегральные инварианты. ГТТИ, 1940.