Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ЛЯПУНОВА НА ЛИНЕЙНЫЕ КАНОНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. А. Якубович
(Ленинград)

§ 1. Систему $2k$ линейных канонических дифференциальных уравнений

$$\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \dot{q}_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

где H — квадратическая форма переменных p_i, q_i, можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{J}\mathrm{H}(t)\,x \tag{1.1}$$

где x — вектор-решение, $\mathrm{H}(t)$ — симметрическая матрица

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_k \\ -\mathrm{I}_k & 0 \end{pmatrix}$$

I_k — единичная матрица порядка k. Будем предполагать, что элементы матрицы $\mathrm{H}(t)$ — кусочно-непрерывные вещественные периодические функции с периодом $\omega > 0$, $\mathrm{H}(t+\omega) = \mathrm{H}(t)$.

В виде системы (1.1) можно записать часто встречающуюся систему уравнений второго порядка

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \mathrm{P}(t)\,y = 0 \tag{1.2}$$

Здесь y — вектор порядка k, $\mathrm{P}(t)$ — симметрическая матрица порядка k вещественных кусочно-непрерывных периодических функций,

$$\mathrm{P}(t+\omega) = \mathrm{P}(t)$$

Обозначим $\mathrm{L} = \{\mathrm{H}(t)\}$ линейное пространство всех матриц $\mathrm{H}(t)$ указанного выше вида, N — множество тех «особых» матриц $\mathrm{H}(t)$, для которых соответствующая система (1.1) имеет корни[1] $\rho = \pm 1$. Множество всех $\mathrm{H}(t) \overline{\in} \mathrm{N}$ разобьем на четыре подмножества по следующей схеме:

Обозначение множества	Число пар корней: на отрицательной полуоси	на положительной полуоси
$\{0,0\}$	четное	четное
$\{1,0\}$	нечетное	четное
$\{0,1\}$	четное	нечетное
$\{1,1\}$	нечетное	четное

[1] Корни характеристичного уравнения $\det[\mathrm{X}(\omega) - \rho \mathrm{I}_{2k}] = 0$, где $\mathrm{X}(t)$ — матрица фундаментальной системы $(\mathrm{X}(0) = \mathrm{I}_{2k})$, для сокращения будем называть просто корнями.

Множества $\{1,0\}$, $\{0,1\}$, $\{1,1\}$ состоят целиком из «неустойчивых» матриц $\mathrm{H}(t)$ (соответствующие системы (1.1) имеют решения, не ограниченные при $t \to \infty$). Поэтому любое достаточное условие принадлежности $\mathrm{H}(t)$ одному из этих множеств является одновременно достаточным условием неустойчивости системы (1.1).

Множество $\{0,0\}$ при $k=1$ является множеством всех «сильно устойчивых» $\mathrm{H}(t)$, при $k>1$ это множество включает в себя все области устойчивости, но также и содержит «неустойчивые» $\mathrm{H}(t)$.

Введем следующее обозначение:

$$F_+ = \det(\mathrm{X} - \mathrm{I}_{2k}), \qquad F_- = \det(\mathrm{X} + \mathrm{I}_{2k}). \tag{1.3}$$

Таким образом, N — множество систем (1.1), для которых выполнено одно из уравнений $F_+ = 0$, $F_- = 0$. При непрерывных деформациях матрицы $\mathrm{H}(t) \,\overline{\in}\, \mathrm{N}$ корни могут сходить с действительной оси или приходить на действительную ось лишь четверками. Поэтому четность числа пар корней на действительной положительной и действительной отрицательной полуосях не меняется, пока мы не пересечем N.

Покажем, что принадлежность матрицы $\mathrm{H}(t)$ одному из множеств $\{i, j\}$ определяется знаками чисел F_+ и F_- по следующей схеме.

Множество	F_-	F_+
$\{0,0\}$	+	+
$\{1,0\}$	—	+
$\{0,1\}$	+	—
$\{1,1\}$	—	—

(1.4)

Как известно[1, 2, 3], корни системы (1.1) распадаются на четверки вида $r_j^{\pm 1} e^{\pm i\varphi_j}$, пары вида $e^{\pm i\psi_j}$ и пары вида $\mu_j^{\pm 1}$ ($r_j > 0$; φ_j, ψ_j, μ_j вещественны, $r_j \neq 1$, $\mu_j \neq \pm 1$, φ_j, $\psi_j \neq m\pi$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Поэтому

$$F_+ = \Pi\,(r^2{}_j - 2_j r \cos\varphi_j + 1)(r_j^{-2} - 2r_j^{-1}\cos\varphi_j + 1) \times$$
$$\times (2 - 2\cos\psi_j)\,[2 - (\mu_j + \mu_j^{-1})]$$

Знак F_+ определяется последними сомножителями и. равен $(-1)^s$, где s — число положительных μ_j, т. е. число пар корней на действительной положительной полуоси. Точно так же знак F_- равен $(-1)^\sigma$, где σ равно числу пар корней на действительной отрицательной полуоси. Тем самым доказана схема (1.4).

Из схемы (1.4) следует, что для неустойчивости достаточно выполнения хотя бы одного из неравенств $F_- < 0$, $F_+ < 0$.

Мы покажем, что для широкого класса систем (1.1) можно указать метод, позволяющий в конечное число шагов указать, какому из множеств $\{i, j\}$ принадлежит соответствующая система.

Будем говорить, что система (1.1) [или матрица $\mathrm{H}(t)$] удовлетворяет условиям (A), если каждая из краевых задач

$$\frac{dx}{dt} = \lambda \mathrm{J}\mathrm{H}(t)\,x, \qquad x(\omega) = \pm x(0) \tag{1.5}$$

имеет действительный спектр, расположенный симметрично относительно начала координат.

Будем говорить, что система (1.1) [или матрица $H(t)$] удовлетворяет условиям (B), если матрицу $H(t)$ можно представить в виде $H(t) = H_0(t) + H_1(t)$ так, что система $dx/dt = JH_0(t)x$ интегрируется в явном виде (например, $H_0(t) = \mathrm{const}$) и каждая из краевых задач

$$\frac{dx}{dt} = J[H_0(t) + \lambda H_1(t)]x, \qquad x(\omega) = \pm x(0) \tag{1.6}$$

имеет действительный спектр, расположенный симметрично относительно начала координат.

Очевидно, что условия (B) шире, чем условия (A).

Примеры систем, удовлетворяющих условиям (A):

1. Матрица $H(t)$ удовлетворяет условиям[1]:

(а) $H(t) \geqslant 0$;

(б) не существует постоянного вектора $c \neq 0$ такого, что $H(t)c \equiv 0$;

(в) существует неособая постоянная матрица K такая, что $JH(-t) \equiv K^{-1}JH(t)K$ [например, $H(-t) \equiv H(t)$].

2. Матрица $H(t)$ удовлетворяет условиям (а), (б) примера 1, а условие (в) имеет вид: существует неособая постоянная матрица K такая, что $JH(t) \equiv -K^{-1}JH(t)K$.

3. Матрица $H(t)$ имеет вид[2]:

$$H(t) = \begin{pmatrix} H_1(t) & 0 \\ 0 & H_2(t) \end{pmatrix}, \quad H_i(t) \geqslant 0, \quad H_i(t)c \neq 0 \quad \text{при } c \neq 0 \quad (i = 1,2)$$

4. Система (1.2) с матрицей $P(t) \geqslant 0$ такой, что не существует постоянного вектора $c \neq 0$, для которого $P(t)c \equiv 0$.

5. Система (1.2) с нечетной матрицей $P(t)$ такой, что $P(t)c \neq 0$ при $c \neq 0$.

В дальнейшем для простоты мы ограничимся лишь случаем систем, удовлетворяющих условиям (A), однако все дальнейшее справедливо и для систем, удовлетворяющих условиям (B), а также для произвольной системы (1.2). В последнем случае параметр λ можно вводить следующим образом:

$$\ddot{y} + Cy + \lambda[P(t) - C]y = 0$$

где C — подходящим образом выбранная симметрическая матрица.

Покажем, что в приведенных примерах 1—5 системы удовлетворяют условиям (A)[3].

Покажем вначале, что условия $H(t) \geqslant 0$, $H(t)c \not\equiv 0$ гарантируют, что краевые задачи (1.5) имеют действительный спектр.

Для решения x задачи (1.5) имеем

$$\frac{d}{dt}(Jx, x) = (\lambda^* - \lambda)(Hx, x)$$

и так как $(Jx, x)_\omega - (Jx, x)_0 = 0$, то

$$(\lambda^* - \lambda)\int_0^\omega (Hx, x)\,dt = 0$$

---

[1] Мы будем писать, как обычно, $H \geqslant 0$, если для всех векторов c $(Hc, c) \geqslant 0$, и $H > 0$, если $(Hc, c) > 0$.

[2] Не нужно думать, что в этом случае система (1.1) распадается на две подсистемы.

[3] Весьма близкие рассуждения имеются у М. Г. Крейна [4].

Если $\lambda^* \neq \lambda$, то в силу $\mathrm{H}(t) \geqslant 0$ $\mathrm{H}(t)x \equiv 0$. Тогда $\dot{x}=0$, $x=c=$ $=\mathrm{const}$ и $\mathrm{H}(t)c\equiv 0$. Противоречие показывает, что $\lambda^*=\lambda$.

Пусть $\mathrm{X}(t, \lambda)$ — матрица фундаментальной системы решений уравнения (1.5), $\mathrm{X}(0, \lambda)=\mathrm{I}_{2k}$. Тогда из условия (В) в примере 1 следует, что $\mathrm{X}(t, -\lambda)\equiv \mathrm{K}^{-1}\mathrm{X}(-t, \lambda)\mathrm{K}$ и уравнение

$$\det[\mathrm{X}(\omega, \lambda)-\rho \mathrm{I}_{2k}]=0 \qquad (\rho=\pm 1) \tag{1.7}$$

инвариантно относительно замены λ на $-\lambda$. Поэтому спектр симметричен относительно начала координат и система примера 1 удовлетворяет условиям (А).

Точно так же и из условия (В) в примере 2 следует, что

$$\mathrm{X}(t, -\lambda)\equiv \mathrm{K}^{-1}\mathrm{X}(t, \lambda)\mathrm{K}$$

и уравнение (1.7) (при любом ρ) инвариантно относительно замены λ на $-\lambda$.

Пример 3 — частный случай примера 2. Матрица K имеет вид:

$$\mathrm{K}=\begin{pmatrix} \mathrm{I}_k & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_k \end{pmatrix}$$

Пример 4 — частный случай примера 3:

$$\mathrm{H}(t)=\begin{pmatrix} \mathrm{P}(t) & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_k \end{pmatrix}$$

Наконец, в примере 5 преобразование М. Г. Крейна[4]

$$z=\mathrm{Q}(t)y+\dot{y}, \quad \mathrm{Q}=\int_{t_0}^{t}\mathrm{P}(t)\,dt$$

позволяет записать (1.2) в виде системы (1.1), $x=y+z$ с матрицей

$$\mathrm{H}(t)=\begin{pmatrix} \mathrm{Q}^2 & -\mathrm{Q} \\ -\mathrm{Q} & \mathrm{I}_k \end{pmatrix}$$

удовлетворяющей условиям примера 1: $\mathrm{H}(-t)=\mathrm{H}(t)$.

Рассмотрим систему, удовлетворяющую условиям (А). Обозначим

$$F_{\pm}(\lambda)=\det[\mathrm{X}(\omega, \lambda)\mp \mathrm{I}_{2k}] \tag{1.8}$$

Тогда $F_{\pm}=F_{\pm}(1)$. Очевидно, что $F_{\pm}(\lambda)$ — целые функции λ порядка $\leqslant 1$. Так как $\lambda=0$ может быть лишь нулем четной кратности функции $F_{\pm}(\lambda)$ (матрица X четного порядка) и в силу предположенной четности спектра наряду с нулем $\lambda_j^{\pm}$ имеется нуль $-\lambda_j^{\pm}$, то по теореме Адамара справедливо разложение

$$F_{\pm}(\lambda)=f_{\pm}\lambda^{2m_{\pm}}\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda^2}{(\lambda_j^{\pm})^2}\right) \tag{1.9}$$

Так как $F_{-}(0)=\det[2\mathrm{I}_{2k}]=2^{2k}$, то $f_{-}=2^{2k}$, $m_{-}=0$

Пусть

$$\begin{gathered} \mathrm{X}(t, \lambda)=\mathrm{I}_{2k}+\lambda \mathrm{X}_1(t)+\lambda^2\mathrm{X}_2(t)+\ldots \\ \mathrm{X}_{j+1}(t)=\int_0^t \mathrm{JH}(s)\mathrm{X}_j(s)\,ds, \qquad \mathrm{X}_0(t)\equiv \mathrm{I}_{2k} \end{gathered} \tag{1.10}$$

Для простоты дальнейших формул будем считать, что

$$\det \mathrm{H}_{\text{ср}} > 0 \qquad \left(\mathrm{H}_{\text{ср}}=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\mathrm{H}(t)\,dt\right) \tag{1.11}$$

хотя это предположение совсем не обязательно. Тогда, учтя, что

$$X_1(t) = J\int_0^t H(s)\,ds$$

имеем

$$f_+ = \omega^{2k}\det H_{ср}, \qquad m_+ = 2k \tag{1.12}$$

Из разложения (1.9) следует, что

$$F_\pm(\lambda) = f_\pm \lambda^{2m_\pm}(1 - A_1^\pm\lambda^2 + A_2^\pm\lambda^4 - \ldots) \tag{1.13}$$

где все $A_j^\pm > 0$. Числа $A_j^\pm$ можно определять последовательно; при этом для определения $A_j^\pm$ достаточно знать $X_1(t), \ldots, X_{2j+1}(t)$. На основании замечания М. Г. Крейна [5] из разложения (1.9) следует, что коэффициенты $A_j^\pm$ удовлетворяют неравенствам

$$\frac{A_{n+1}^\pm}{A_n^\pm} \leqslant \frac{n}{n+1}\,\frac{A_n^\pm}{A_{n-1}^\pm} \qquad (A_0^\pm = 1) \tag{1.14}$$

Это самый существенный пункт. Из (1.14), как и в [5], следует, что коэффициенты $A_j^\pm\,(j=0, 1, \ldots)$ имеют лишь один максимум, т. е. существует номер $n_0 \geqslant 0$, такой, что

$$1 = A_0^\pm < A_1^\pm < \ldots < A_{n_0}^\pm, \qquad A_{n_0}^\pm \geqslant A_{n_0+1}^\pm > A_{n_0+2}^\pm > \ldots \tag{1.15}$$

Лишь это последнее обстоятельство нам нужно для дальнейшего. Дальнейшие рассуждения проводятся так же, как в [5], и почти так же, как в [6].

Из (1.13) следует

$$F_\pm = f_\pm(1 - A_1^\pm + A_2^\pm - \ldots) \tag{1.16}$$

Обозначим

$$F_\pm^{(n)}(\lambda) = f_\pm \lambda^{2m_\pm}[1 - \lambda^2 A_1^\pm + \ldots + (-1)^n \lambda^{2n} A_n^\pm], \qquad F_\pm^{(n)} = F_\pm^{(n)}(1) \tag{1.17}$$

Тогда

$$F_\pm = F_\pm^{(n)} - f_\pm[(A_{n+1}^\pm - A_{n+2}^\pm) + (A_{n+3}^\pm - A_{n+4}^\pm) + \ldots] \quad \text{при четном } n$$

$$F_\pm = F_\pm^{(n)} + f_\pm[(A_{n+1}^\pm - A_{n+2}^\pm) + (A_{n+3}^\pm - A_{n+4}^\pm) + \ldots] \quad \text{при нечетном } n$$

Если $n \geqslant n_0 - 1$, то все скобки положительны и

$$F_\pm < F_\pm^{(n)} \quad \text{при четном } n$$
$$F_\pm > F_\pm^{(n)} \quad \text{при нечетном } n$$

Поэтому

$$\begin{array}{llll} \text{если} & F_\pm^{(n)} \leqslant 0 & \text{при четном } n, & \text{то } F_\pm < 0 \\ \text{если} & F_\pm^{(n)} \geqslant 0 & \text{при нечетном } n, & \text{то } F_\pm > 0 \end{array} \tag{1.18}$$

Здесь предполагалось, что $n \geqslant n_0 - 1$. Однако легко видеть [5], что каждое из неравенств для $F_\pm^{(n)}$ в (1.18) влечет за собой неравенство $n \geqslant n_0 + 1$ и тем более $n \geqslant n_0 - 1$. Таким образом, утверждения (1.18) справедливы без предположения $n \geqslant n_0 - 1$.

Так как $F_\pm^{(n)} \to F_\pm$ при $n \to \infty$, то справедливы также утверждения, обратные утверждениям (1.18).

Вспоминая (1.4), получаем теорему.

Теорема 1. Пусть $H(t)$ удовлетворяет условиям (A) и $\det H_{ср} > 0$. Для принадлежности матрицы $H(t) \in N$ множеству $\{i, j\}$ необходимо и достаточно выполнения при некоторых n_1 и n_2 условий:

$$\begin{array}{lll} \text{Множество} & \text{Необходимые и достаточные условия} & \\ \{0,\ 0\} & F_-^{(2n_1+1)} \geqslant 0, & F_+^{(2n_2+1)} \geqslant 0 \\ \{1,\ 0\} & F_-^{(2n_1)} \leqslant 0, & F_+^{(2n_2+1)} \geqslant 0 \\ \{0,\ 1\} & F_-^{(2n_1+1)} \geqslant 0, & F_+^{(2n_2)} \leqslant 0 \\ \{1,\ 1\} & F_-^{(2n_1)} \leqslant 0, & F_-^{(2n_2)} \leqslant 0 \end{array} \tag{1.19}$$

В частности, каждое из неравенств $F_-^{(2n)} \leqslant 0$, $F_+^{(2n)} \geqslant 0$ является достаточным условием неустойчивости.

Тем самым мы получили исчерпывающие серии критериев, аналогичные критериям Ляпунова.¹ Применение теоремы 1 к скалярному уравнению (1.2) с функцией $p(t) \geqslant 0$ дает в точности метод Ляпунова [6].

Отметим, что из выполнения неравенств (1.19) при некоторых n_1 и n_2 следует их выполнение при $n_1' > n_1$, $n_2' > n_2$.

Отметим также еще раз, что от условия $\det \mathrm{H_{cp}} > 0$ легко освободиться; можно получить также аналогичную теорему для систем, удовлетворяющих условиям (B), и для произвольной системы (1.2).

§ **2.** Выведем явные формулы для $A_n^{\pm}$. Из (1.10) имеем

$$\mathrm{X}(\omega, \lambda) = \mathrm{I}_{2k} + \lambda \mathrm{X}_1 + \lambda^2 \mathrm{X}_2 + \ldots, \quad \mathrm{X}_j = \mathrm{X}_j(\omega) \tag{2.1}$$

Обозначим

$$f(\lambda, \varphi) = e^{-ik\varphi} \det [\mathrm{X}(\omega, \lambda) - e^{i\varphi} \mathrm{I}_{2k}] \tag{2.2}$$

Так как характеристичное уравнение $\det[\mathrm{X}(\omega, \lambda) - \rho \mathrm{I}_{2k}] = 0$ возвратное, то $\operatorname{Im} f(\lambda, \varphi) = 0$ при $\operatorname{Im} \lambda = 0$. Легко видеть, что и, обратно, из вещественности $f(\lambda, \varphi)$ при $0 < \varphi < \pi$ и вещественном λ следует, что характеристичное уравнение возвратное. При $\varphi \neq 0$

$$f(\lambda, \varphi) = f_0 \det [\mathrm{I}_{2k} + \lambda \mathrm{X}_1' + \lambda^2 \mathrm{X}_2' + \ldots] \tag{2.3}$$

где

$$f_0 = (-1)^k 2^k (1 - \cos \varphi)^k, \qquad \mathrm{X}_j' = \frac{1}{1 - e^{i\varphi}} \mathrm{X}_j \tag{2.4}$$

При $\varphi = 0$ в предположении (1.11), используя $\mathrm{X}_1 = \omega \mathrm{J H_{cp}}$, имеем

$$f(\lambda, 0) = \lambda^{2k} \omega^{2k} \det \mathrm{H_{cp}} \det [\mathrm{I}_{2k} + \lambda \mathrm{X}_1'' + \lambda^2 \mathrm{X}_2'' + \ldots] \tag{2.5}$$

где

$$\mathrm{X}_j'' = \mathrm{X}_1^{-1} \mathrm{X}_{j+1} = \frac{1}{\omega} \mathrm{H_{cp}}^{-1} \mathrm{J}^{-1} \mathrm{X}_{j+1} \qquad (j = 0, 1, \ldots) \tag{2.6}$$

Пусть вначале $\varphi \neq 0$. Обозначим $\rho_j(\lambda)$ собственные значения матрицы $\lambda \mathrm{X}_1' + \lambda^2 \mathrm{X}_2' + \ldots$ Тогда $\rho_j(0) = 0$ и при достаточно малых λ имеем

$$f(\lambda, \varphi) = f_0 \prod_{j=1}^{2k} [1 + \rho_j(\lambda)]$$

$$\ln\left[\frac{1}{f_0} f(\lambda, \varphi)\right] = \sum_{j=1}^{2k} \ln\left[1 + \rho_j(\lambda)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sigma_n(\lambda) \tag{2.7}$$

---

¹ Анализ работы Ляпунова [6] показал, что условия (A) или (B) являются, по-видимому, наиболее общими условиями, которые дают возможность исследовать системы (1.1) и (1.2) методом, анологичным методу Ляпунова [6]. Вместе с тем использование замечания М. Г. Крейна [4] и теоремы Адамара о целых функциях позволяет получить нужные нам соотношения (1.15) непосредственно, без сложных выкладок по изучению явного вида коэффициентов $\mathrm{A}_n^{\pm}$ через коэффициенты системы дифференциальных уравнений. Эти выкладки, исключительно сложные уже для скалярного уравнения (1.2) (см. [6], стр. 415—435), в рассматриваемом случае провести было бы, по-видимому, совершенно невозможно.

Прим. при корректуре

где

$$\sigma_n(\lambda)=\sum_{j=1}^{2k}\rho_j(\lambda)^n=\operatorname{sp}[\lambda X_1'+\lambda^2X_2'+\ldots]^n \tag{2.8}$$

Пусть

$$\sigma_n(\lambda)=\sum_{r=1}^{\infty}\lambda^r\sigma_n^{(r)}$$

Тогда при $r<n$ $\sigma_n^{(r)}=0$ и при $r\geqslant n$

$$\sigma_n^{(r)}=\sum\operatorname{sp}[X_{p_1}'\ldots X_{p_n}'] \qquad (p_1+\ldots+p_n=r) \tag{2.9}$$

где сумма распространена на все целые числа $p_j\geqslant 1$ такие, что $p_1+\ldots+p_n=r$.

Подставляя в (2.7) и меняя порядок суммирования, получим

$$\ln\left[\frac{1}{f_0}f(\lambda,\varphi)\right]=\sum_{r=1}^{\infty}a_r\lambda^r \qquad \left(a_r=\sum_{n=1}^{r}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sigma_n^{(r)}\right) \tag{2.10}$$

Из (2.10) следует, что

$$f(\lambda,\varphi)=f_0\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}f_r\lambda^r\right) \qquad \left(f_r=\sum_{m=1}^{r}\frac{1}{m!}b_r^{(m)}\right) \tag{2.11}$$

$$b_r^{(m)}=\sum a_{r_1}\ldots a_{r_m} \qquad (r_j\geqslant 1,\quad r_1+\ldots+r_m=r) \tag{2.12}$$

Таким образом, по матрицам X_j' определяются числа $\sigma_n^{(r)}$ [из формул (2.9)], затем по формулам (2.10), (2.11) и (2.12) определяются последовательно $a_r, b_r^{(m)}$ и f_r.

Обозначим

$$s_n^{(r)}=\sum\operatorname{sp}[X_{p_1}\ldots X_{p_n}] \qquad (p_j\geqslant 1,\quad p_1+\ldots+p_n=r) \tag{2.13}$$

Покажем, что числа $s_n^{(r)}$ связаны некоторыми соотношениями. Из (2.4), (2.9) и (2.10) имеем

$$\sigma_n^{(r)}=\frac{1}{\psi^n}s_n^{(r)},\qquad a_r=\sum_{n=1}^{r}\frac{(-1)^{n-1}}{n\psi^n}s_n^{(r)},\qquad \psi=1-e^{i\varphi} \tag{2.14}$$

Так как $f_0^{-1}f(\lambda,\varphi)>0$ при достаточно малых λ, то из (2.10) следует, что a_r вещественны.

Но для того, чтобы функция

$$B(\varphi)=b_0+\frac{b_1}{\psi}+\ldots+\frac{b_r}{\psi_r}$$

где b_j вещественны и $\psi=1-e^{i\varphi}$, была вещественна для всех φ $0<\varphi\leqslant\pi$, необходимо и достаточно, чтобы многочлен

$$R(\varphi)=b_0(1-\rho)^r+b_1(1-\rho)^{r-1}+\ldots+b_r$$

был чётной степени и возвратным, $r=2m$,

$$R(\rho)=a_0\rho^{2m}+\ldots+a_{2m} \qquad (a_{2m-j}=a_j,\quad j=0,1,\ldots,m-1)$$

При этом

$$B(\varphi)=\frac{(-1)^m}{2^m(1-\cos\varphi)^m}[a_0\cos m\varphi+a_1\cos(m-1)\varphi+\ldots+a_m]$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы числа b_j удовлетворяли соотношениям

$$b_n=(-1)^n\sum_{j=n}^{2m}C_n^j b_j,\qquad C_n^j=n!\,/\,j!(n-j)!$$

В рассматриваемом случае $a_r = B(\varphi)$, $b_n = \frac{(-1)^n}{n} s_n^{(r)}$. Поэтому

$$\frac{1}{n} s_n^{(2r)} + \sum_{j=n}^{2r} \frac{(-1)^{j-1}}{j} C_n^j s_j^{(2r)} = 0 \tag{2.15}$$

Из сравнения (1.8) и (2.2) следует, что

$$F_{-}(\lambda) = (-1)^k f(\lambda, \pi) \tag{2.16}$$

Таким образом, $f(\lambda, \pi)$ — четная функция λ [см. (1.13)] и из (2.10) и (2.11) вытекает, что $a_{2r+1} = 0$, $f_{2r+1} = 0$ $(r = 0, 1, \ldots)$ при $\varphi = \pi$. Из (2.12) следует также, что $b_{2r}^{(m)} = 0$ при $m > r$. Из (2.11), (2.4) и (2.16) имеем

$$F_{-}(\lambda) = 2^{2k}\left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} f_{2r}\lambda^{2r}\right)$$

Следовательно,

$$A_r^{-} = (-1)^r f_{2r}$$

Мы получили следующий порядок определения коэффициентов A_r^{-}.

1. По формулам (1.10) определяются матрицы $X_j(t)$ и $X_j = X_j(\omega)$.
2. По формулам (2.13) определяются числа $s_n^{(2r)}$; при этом некоторые из чисел $s_n^{(2r)}$ могут определяться из соотношения (2.15).
3. $a_{2r} = \sum_{n=1}^{2r} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n} s_n^{(2r)}$
4. $b_{2r}^{(m)} = \sum a_{2r_1} \ldots a_{2r_m}$ $\quad (r_j \geqslant 1,\ r_1 + \ldots + r_m = r)$
5. $A_r^{-} = (-1)^r \sum_{m=1}^{r} \frac{1}{m!} b_{2r}^{(m)}$

В частности, при $r = 1$ имеем $s_1^{(2)} = \operatorname{sp} X_2$, $s_2^{(2)} = \operatorname{sp} X_1^2$. Соотношение (2.15) дает $s_1^{(2)} = \frac{1}{2} s_2^{(2)}$. Поэтому

$$a_2 = \frac{1}{2} s_1^{(2)} - \frac{1}{8} s_2^{(2)} = \frac{1}{8} \operatorname{sp} X_1^2$$

Далее $b_2^{(1)} = a_2$, $A_1^{-} = -b_2^{(1)}$

$$A_1^{-} = -\frac{1}{8} \operatorname{sp} X_1^2 \tag{2.17}$$

Выражение для коэффициента A_2^{-} уже значительно сложнее. Это выражение содержит X_1, X_2, X_3, X_4. Соотношения (2.15) позволяют выразить A_2^{-} через X_1, X_2, X_3. Именно

$$A_2^{-} = \frac{1}{4} \operatorname{sp} X_1 X_3 - \frac{3}{16} \operatorname{sp} X_2^2 - \frac{5}{64} \operatorname{sp} X_1^4 + \frac{1}{128} [\operatorname{sp} X_1^2]^2 \tag{2.18}$$

Выведем формулы для A_n^{+}. Из (1.12) и (1.13) следует

$$F_{+}(\lambda) = f_{+}\lambda^{2k}(1 - \lambda^2 A_1^{+} + \lambda^4 A_2^{+} - \ldots) \tag{2.19}$$

Из (1.8), (2.2) и (2.5) имеем

$$F_{+}(\lambda) = f(\lambda, 0) = \lambda^{2k}\omega^{2k} \det H_{\text{ср}} \det(I_{2k} + \lambda X_1'' + \ldots) \tag{2.20}$$

Сравнивая с (2.3), получим, что $F_{+}(\lambda)$ можно подсчитывать по тем же формулам, что и $f(\lambda, \varphi)$, если в последних считать $f_0 = \lambda^{2k}\omega^{2k} \det H_{\text{ср}}$ и заменить X_j' на X_j'', которые определяются по формулам (2.6).

При этом снова в разложениях (2.10) и (2.11) будут присутствовать лишь четные степени λ^r, т. е. все $a_{2r+1}=0$, $f_{2r+1}=0$, $b_{2r}^{(m)}=0$ при $m>r$ и $A_r^+=(-1)^r f_{2r}$.

Мы получаем следующую последовательность формул для определения коэффициентов A_r^+:

1. $\mathrm{X}_j''=\frac{1}{\omega}\,\mathrm{H_{cp}}^{-1}\mathrm{J}^{-1}\mathrm{X}_{j+1}$

2. $\sigma_n^{(2r)}=\sum \mathrm{sp}\,\mathrm{X}_{p_1}''\ldots\mathrm{X}_{p_n}''$ $\quad(p_j\geqslant 1,\ p_1+\ldots+p_n=2r)$

3. $a_{2r}=\sum\limits_{n=1}^{2r}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sigma_n^{(2r)}$

4. $b_{2r}^{(m)}=\sum a_{2r_1}\ldots a_{2r_m}$ $\quad(r_j\geqslant 1,\ r_1+\ldots+r_m=r$

5. $A_r^+=(-1)^r\sum\limits_{m=1}^{r}\frac{1}{m!}b_{2r}^{(m)}$

В частности,

$$A_1^+=\frac{1}{2}\,\mathrm{sp}\left(\frac{1}{\omega}\,\mathrm{H_{cp}}^{-1}\mathrm{J}^{-1}\mathrm{X}_2\right)-\mathrm{sp}\left(\frac{1}{\omega}\,\mathrm{H_{cp}}^{-1}\mathrm{J}^{-1}\mathrm{X}_3\right) \tag{2.21}$$

Вообще A_r^+ выражается через $\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_{2r+1}$.

§ 3. Выведем теперь аналогичные серии достаточных условий устойчивости.

Назовем центральной положительной областью устойчивости O_0^+ ту область устойчивости, которой принадлежат все достаточно малые $\mathrm{H}(t)>0$, и центральной отрицательной областью устойчивости O_0^- ту область устойчивости, которой принадлежат все достаточно малые $\mathrm{H}(t)<0$.

Для матриц $\mathrm{H}(t)$ из O_0^+ все корни первого рода лежат на верхней полуокружности единичной окружности и индекс области в смысле работы[3] равен нулю. Для матриц $\mathrm{H}(t)$ из O_0^- все корни первого рода лежат на нижней полуокружности единичной окружности и индекс области равен нулю.

Теорема 2. Для того чтобы матрица $\mathrm{H}(t)$, удовлетворяющая условиям

$$\mathrm{H}(t)\geqslant 0, \qquad \mathrm{H_{cp}}>0 \tag{3.1}$$

и условиям (A)[1], принадлежала области O_0^+, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого целого r и всех μ, $0\leqslant\mu\leqslant 1$ было выполнено неравенство[2]

$$1-\mu A_1^-+\mu^2A_2^- -\ldots\mu^{2r+1}A_{2r+1}^-\geqslant 0 \tag{3.2}$$

При этом из выполнения неравенства (3.2) для некоторого r следует выполнение этого неравенства для всех $r'>r$.

Доказательство. Необходимость. Из условий (3.1) следует, что при всех достаточно малых $\lambda_0>0$ $\lambda_0\mathrm{H}(t)\in O_0^+$. При $\lambda_0\leqslant\lambda\leqslant 1$ $\lambda_0\mathrm{H}(t)\leqslant\lambda\mathrm{H}(t)\leqslant\mathrm{H}(t)$.

---

[1] Условия (A) при наличии условий (3.1) означают лишь, что спектр каждой из краевых задач (1.5) симметричен относительно начала координат.

[2] М. Г. Крейн указал автору, что аналогичная теорема может быть выведена из результатов работы [4].

На основании теоремы 1 в [7] или аналогичной теоремы М. Г. Нейгауз отсюда следует [1], что при всех $\lambda\,(\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$, а следовательно, и при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ $\lambda \mathrm{H}(t) \in O_0^+$.

Вспоминая определение $F_-(\lambda)$, имеем для всех $\lambda\ (0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ $F_-(\lambda) > 0$. Так как $F_-^{(2r+1)}(\lambda) < F_-(\lambda)$ при достаточно большом r и $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, то для всех достаточно больших r выполнено (3.2).

Достаточность. Из (3.2) следует, что

$$F_-^{(2r+1)}(\lambda) \geqslant 0 \qquad \text{при} \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \tag{3.3}$$

На основании (1.18) для системы с матрицей $\lambda \mathrm{H}(t)$ отсюда следует, что $F_-(\lambda) > 0 \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$.

По теореме М. Г. Крейна [8] при увеличении λ все корни первого рода двигаются по единичной окружности против часовой стрелки. Встреча корней разного рода может произойти лишь в точке $\rho = -1$, тогда $F =_- 0$. Поэтому при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ такой встречи не происходит. Следовательно, $\mathrm{H}(t)$ принадлежит той же области устойчивости, что и $\lambda \mathrm{H}(t)$, при достаточно малом λ, т. е. $\mathrm{H}(t) \in O_0^+$.

Нам осталось доказать последнее утверждение теоремы. Как показано в § 1, из условия (3.3) для $\lambda = 1$ следует, что $n_0 < 2r$. Поэтому

$$A_n^- > A_{n+1}^- \qquad \text{при } n \geqslant 2r+1$$

и, следовательно,

$$(A_0^- - \mu A_1^- \ldots - \mu^{2r+1} A_{2r+1}^-) + (\mu^{2r+2} A_{2r+2}^- - \mu^{2r+3} A_{2r+3}^-) + \ldots$$
$$\ldots + (\mu^{2r'} A_{2r'}^- - \mu^{2r'+1} A_{2r'+1}^-) > 0$$

так как первая скобка неотрицательна, а все следующие положительны. Теорема доказана.

Неравенства (3.2) являются серией достаточных условий, исчерпывающих в O_0^+ все системы «положительного типа» [т. е. удовлетворяющие условиям (3.1)] с симметричным спектром. Если интересоваться лишь достаточными условиями устойчивости, то условия симметрии спектра можно отбросить. Именно рассмотрим систему порядка $4k$

$$\frac{dx'}{dt} = \lambda \mathrm{J}' \mathrm{H}'(t)\, x' \tag{3.4}$$

где

$$\mathrm{J}' = \begin{pmatrix} \mathrm{J} & 0 \\ 0 & \mathrm{J} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}'(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{H}(t) & 0 \\ 0 & \mathrm{H}(-t) \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Эта система канонического вида, распадающаяся на две системы:

$$\frac{dx_1}{dt} \lambda \mathrm{J}\mathrm{H}(t)\, x_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \lambda \mathrm{J}\mathrm{H}(-t)\, x_2$$

Вторая система получается из первой заменой λ на $-\lambda$ и t на $-t$.

---

[1] Автор недавно обнаружил ошибку в доказательствах некоторых утверждений работы [7]. В связи с этим теорема 1 в работе [7] нуждается в исправлениях. Теорема 1 справедлива для областей устойчивости, для которых на верхней полуокружности нет чередования корней разного рода (например, для областей O_0^+ и O_0^-). Если такое чередование есть, то нужно дополнительно потребовать, чтобы верхнюю полуокружность можно было разбить на конечное число дуг, так что у систем с матрицами $\mathrm{H}_1(t)$ и $\mathrm{H}_2(t)$ на каждой из этих дуг: 1) имеется одинаковое число корней первого и второго рода, 2) они следуют в одинаковом порядке и 3) нет чередования корней разного рода. Нуждаются в исправлениях также теорема 4 и следствия из нее.

Обозначим $\{\lambda_n'\}$ спектр краевой задачи для первой системы с краевыми условиями $x(\omega)=\rho x(0)$, $|\rho|=1$ и $\{\lambda_n''\}$ — то же для второй системы. Легко видеть, что $\lambda_n''=-\lambda_n'$.

Для системы (3.4) спектром является множество

$$\{\lambda_n'\}\cup\{\lambda_n''\}$$

поэтому для системы (3.4) спектр каждой из краевых задач (1.5) симметричен относительно начала координат.

Если $\mathrm{H}'(t)\in O_0^+$, то и $\mathrm{H}(t)\in O_0^+$ (эти области — в разных функциональных пространствах).

Поэтому если матрица $\mathrm{H}(t)$ удовлетворяет только условиям (3.1), то неравенства (3.2), где коэффициенты A_n^- подсчитываются для системы с матрицей $\mathrm{H}'(t)$, являются достаточными (но не необходимыми) условиями принадлежности $\mathrm{H}(t)$ центральной положительной области устойчивости.

Очевидно, что для центральной отрицательной области устойчивости справедлива теорема, аналогичная теореме 2 (с заменой условия (3.1) на $\mathrm{H}(t)\leqslant 0$, $\mathrm{H}_{\text{ср}}<0$), и утверждение, аналогичное предыдущему утверждению.

В частности, если $\mathrm{H}(t)$ удовлетворяет условиям (A) и (3.1), то достаточным условием устойчивости является неравенство

$$1-\mu A_1^-\geqslant 0 \qquad (0\leqslant\mu\leqslant 1) \tag{3.6}$$

т. е. неравенство $A_1^-\leqslant 1$ или [см. (2.17)]

$$-\operatorname{sp}\mathrm{X}_1^2\leqslant 8 \tag{3.7}$$

Если

$$\mathrm{H}_{\text{ср}}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta^* & \gamma\end{pmatrix}$$

то неравенство (3.7) переходит в неравенство

$$\omega^2\operatorname{sp}(\alpha\gamma-\beta^2)\leqslant 4$$

являющееся критерием М. Г. Крейна [4].

Если матрица $\mathrm{H}(t)$ удовлетворяет только условиям (3.1), то достаточным условием устойчивости является неравенство (3.6), где коэффициент A_1^- должен быть подсчитан для матрицы $\mathrm{H}'(t)$ из (3.5).

Подставляя его значение, получаем второй критерий М. Г. Крейна[1]

$$\omega^2\operatorname{sp}(\alpha\gamma-\beta^2)\leqslant 2$$

Используя некоторые преобразования М. Г. Крейна и автора, имеющиеся в [4], можно получить теорему, аналогичную теореме 2 для областей устойчивости O_n^+, O_n^-, которые характеризуются тем же расположением корней первого и второго рода, что и области O_0^+, O_0^-, но имеют индекс n в смысле работы [3], отличный от нуля. Можно заменить также условие (3.1) на $\mathrm{H}(t)\geqslant\mathrm{K}$, $\mathrm{K}\in O_n^\pm$ подобно тому, как это сделано в [4]. Мы на этом здесь не будем останавливаться.

---

[1] Это естественно. Указанные критерии М. Г. Крейна являются обобщениями критерия А. М. Ляпунова

$$p(t)\geqslant 0,\quad \omega^2 p_{\text{ср}}\leqslant 4 \tag{*}$$

для уравнения $y''+p(t)y=0$ на канонические системы. Критерий (*) является первым шагом метода А. М. Ляпунова мемуара 1902 г.[6]. Настоящая же работа является попыткой обобщения метода А. М. Ляпунова на канонические системы.

Остановимся лишь в заключение на еще одном возможном варианте получения «исчерпывающей» серии достаточных условий устойчивости.

Для того чтобы система (1.1) имела $2k$ различных корней на единичной окружности, необходимо и достаточно, чтобы вещественная функция $F(\varphi)=f_0^{-1}f(1, \varphi)$ [см. (2.2), (2.4)] имела k нулей на интервале $(0, \pi)$.

Предположим, что система (1.1) удовлетворяет условиям (A'), которые заключаются в том, что краевая задача

$$\frac{dx}{dt}=\lambda JH(t)x, \qquad x(\omega)=e^{i\varphi}x(0) \qquad (0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$$

имеет вещественный спектр, симметричный относительно начала координат. (Системы примеров 2, 3, 4 удовлетворяют условиям (A').) Тогда $f(\lambda, \varphi)$ — четная функция λ и, исходя из ряда для $f(\lambda, \varphi)$, получим при $0<\varphi<\pi$

$$F(\varphi)=1-F_1(\varphi)+F_2(\varphi)-\ldots \tag{3.8}$$

где все $F_j(\varphi)>0$ при $0<\varphi<\pi$. При этом, как и в § 1, получим при $2n\geqslant n_0$

$$F^{(2n)}(\varphi)\leqslant F(\varphi)\leqslant F^{(2n+1)}(\varphi) \tag{3.9}$$

Здесь $F^{(n)}(\varphi)$ — частные суммы ряда (3.8). Число n_0 можно оценить. Если функции $F^{(2n)}(\varphi)$ и $F^{(2n+1)}(\varphi)$ имеют k нулей на интервале $(0, \pi)$, то столько же нулей имеет функция $F(\varphi)$, т. е. система (1.1) устойчива.

Критерии этого типа, однако, весьма громоздки. При этом в отличие от критериев предыдущего типа сложность этих критериев возрастает с увеличением порядка системы.

Поступила 26 II 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Собр. соч. т. II. Изд. АН СССР, 1956, стр. 332—407.
2. Крейн М. Г. Обобщение некоторых исследований А. М. Ляпунова о линейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами. ДАН СССР, т. XXIII, № 3, 1950, стр. 445—448.
3. Гельфанд И. М. и Лидский В. Б. О структуре областей устойчивости линейных канонических систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. УМН, т. X, вып. 1 (63), 1955, стр. 3—40.
4. Крейн М. Г. О признаках устойчивой ограниченности решений периодических канонических систем. ПММ, т. XIX, вып. 6, 1955, стр. 641—680.
5. Якубович В. А. Распространение метода А. М. Ляпунова определения ограниченности решений уравнения $y''+p(t)y=0$, $p(t+\omega)=p(t)$ на случай знакопеременной функции $p(t)$. ПММ, т. XVIII, вып. 6, 1954.
6 Ляпунов А. М. Об одном ряде, встречающемся в теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. Собр. соч., т. II. Изд. АН СССР, 1956.
7. Якубович В. А. О системах дифференциальных уравнений канонического вида с периодическими коэффициентами. ДАН СССР, т. CIII, № 6, 1955, стр. 981—984.
8. Крейн М. Г. Основные положения теории λ-зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Сборник «Памяти А. А. Андронова», Изд. АН СССР, М., 1955, стр. 414—498.