Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ГИБКИХ НИТЯХ (ВЛИЯНИЕ СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИИ)

Н. Кристеску

(Бухарест)

Распространение упруго-пластических волн в гибких нитях рассматривалось Х. А. Рахматулиным[1, 2, 3], Е. В. Рябовой[4] Н. Кристеску[5], а также и другими авторами¹. Для описания механических свойств различных рассматриваемых материалов эти авторы применяют различные соотношения между напряжением T и деформацией ε. Во все эти соотношения не входит скорость деформации $\dot{\varepsilon}$. Но для некоторых материалов в соотношении между напряжением и деформацией влиянием скорости деформации нельзя пренебречь, в особенности в динамических задачах. В этих случаях, кроме упругих и пластических характеристик соответствующего материала, следует учесть и его вязкость. Распространение продольных возмущений в телах, обладающих, помимо упругих или пластических свойств, еще и вязкими свойствами, рассматривалось несколькими авторами (см., например, [6—10], а также и цитированную в этих работах литературу).

Ниже рассматривается задача распространения поперечных волн в нитях механические свойства которых описываются соотношением вида (1.3.).

1. Рассмотрим полубесконечную гибкую нить, движущуюся в пространстве. Предположим, что в момент $t=0$ на конец нити действует нагрузка таким образом, что, помимо возможных продольных возмущений, в нити могут появиться также и поперечные возмущения. Во всяком случае для последних должен быть дан закон изменения во времени направляющих косинусов касательной к нити в ее конце.

Уравнения движения гибкой нити суть

$$\frac{\partial}{\partial s_0}\left(\frac{T}{1+\varepsilon}\frac{\partial x}{\partial s_0}\right)-\rho_0\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+X=0 \qquad (xyz) \tag{1.1}$$

где s_0 — лангранжева координата сечения нити, t — время, X, Y, Z — составляющие внешних сил, а деформация описывается выражением

$$\varepsilon=\frac{ds-ds_0}{ds_0}=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s_0}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial s_0}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial s_0}\right)^2}-1 \tag{1.2}$$

В (1.1) T — напряжение в нити. Оно зависит от деформации и от скорости деформации:

$$T=T(\varepsilon,\ \dot{\varepsilon}) \tag{1.3}$$

Соотношение (1.3) может быть линейным или нелинейным. Мы рассмотрим ниже несколько частных случаев, в которых это соотношение будет линейным. В соотношении (1.3) деформация ε может не фигури-

¹ К сожалению, автор не имел возможности ознакомиться с работами Х. А. Рахматулина (напечатанными в Ученых записках МГУ, 1951), а также и И. Н. Зверева и Дж. У. Крэггса (J. W. Craggs. J. Mech. Phys. Solids, 1954).

ровать явным образом, но во всех нижеследующих рассмотрениях мы будем предполагать, что скорость деформации $\dot{\varepsilon}$ входит явно в это соотношение. Кроме этого предположения, мы не делаем никаких других ограничительных предположений относительно соотношения (1.3). Мы будем пока считать, что это соотношение произвольно; некоторые частные случаи будут рассмотрены впоследствии.

Для нахождения фронтов волн, могущих распространяться по нити, движение которой дается уравнениями (1.1), (1.2) и (1.3), вычислим характеристики этой системы уравнений. Перепишем эту систему в виде

$$\frac{\partial x}{\partial s_0}\frac{\partial^2 x}{\partial s_0^2}+\frac{\partial y}{\partial s_0}\frac{\partial^2 y}{\partial s_0^2}+\frac{\partial z}{\partial s_0}\frac{\partial^2 z}{\partial s_0^2}-(1+\varepsilon)\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}=0 \tag{1.4}$$

$$\frac{T}{1+\varepsilon}\frac{\partial^2 x}{\partial s_0^2}-\rho_0\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\left\{(1+\varepsilon)\left[\frac{\partial T}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}+\frac{\partial T}{\partial \dot{\varepsilon}}\frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial s_0}\right]-T\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}\right\}\frac{\partial x}{\partial s_0}+X=0 \quad (xyz)$$

Обозначим через $V(s_0, t)=0$ уравнения некоторой кривой разрывов в плоскости s_0, t. Характеристики системы (1.4) определятся детерминантом, который после разложения дает

$$(1+\varepsilon)\frac{\partial T}{\partial \dot{\varepsilon}}\left(\frac{\partial V}{\partial s_0}\right)^3\left[\frac{T}{1+\varepsilon}\left(\frac{\partial V}{\partial s_0}\right)^2-\rho_0\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\right]=0 \tag{1.5}$$

Следовательно, для производных максимального порядка, встречающихся в уравнениях (1.4), существуют два вида возможных разрывов: разрывы, могущие распространяться мгновенным образом и удовлетворяющие соотношению $\partial V/\partial s_0=0$, или же разрывы, могущие распространяться с конечной скоростью и удовлетворяющие соотношению

$$\frac{T}{1+\varepsilon}\left(\frac{\partial V}{\partial s_0}\right)^2-\rho_0\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2=0 \tag{1.6}$$

Мы будем заниматься ниже лишь последними разрывами. Для исследования возмущений, могущих распространяться мгновенно и являющихся продольными возмущениями, см. [6, 7], а также и [9, 10].

2. Для получения дифференциальных соотношений, имеющих место на характеристиках (1.6), разрешим систему (1.4) по отношению к производным наибольшего порядка. Присоединим к системе (1.4) следующие соотношения:

$$\begin{aligned} dx_{s_0}&=\frac{\partial x_{s_0}}{\partial s_0}ds_0+\frac{\partial x_{s_0}}{\partial t}dt \\ dx_t&=\frac{\partial x_t}{\partial s_0}ds_0+\frac{\partial x_t}{\partial t}dt \end{aligned} \quad (xyz) \tag{2.1}$$

Здесь

$$x_{s_0}=\frac{\partial x}{\partial s_0},\quad x_t=\frac{\partial x}{\partial t},\ \ldots \tag{2.2}$$

Таким образом, получим

$$-(1+\varepsilon)\frac{\partial T}{\partial \dot{\varepsilon}}\frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial s_0}+[\xi x_{s_0}+\eta y_{s_0}+\zeta z_{s_0}]-(1+\varepsilon)\left[\frac{T}{1+\varepsilon}-\rho_0\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2\right]\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}=0$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s_0^2}=\frac{\xi(1+\varepsilon)-x_{s_0}[\xi x_{s_0}+\eta y_{s_0}+\zeta z_{s_0}]}{(1+\varepsilon)^2[T/(1+\varepsilon)-\rho_0(ds_0/dt)^2]}+\frac{1}{1+\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0} \quad (xyz)$$

в которых ξ, η и ζ даны соотношениями

$$\xi = -\rho_0 \left[dx_{s_0} - dx_t \frac{ds_0}{dt} \right] \frac{1}{dt} + \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} \left[T - (1+\varepsilon) \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right] \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0} x_{s_0} - X \qquad (xyz)$$

Из (2.2) следует, что на характеристиках (1.6), уравнения которых можно переписать и в виде

$$\frac{T}{1+\varepsilon} - \rho_0 \left(\frac{ds_0}{dt} \right)^2 = 0 \tag{1.6'}$$

удовлетворяются дифференциальные соотношения

$$-(1+\varepsilon) \frac{\partial T}{\partial \dot{\varepsilon}} \frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial s_0} + [\xi x_{s_0} + \eta y_{s_0} + \zeta z_{s_0}] = 0$$

$$\frac{1}{x_{s_0}} \left[dx_{s_0} - dx_t \frac{ds_0}{dt} + X dt \right] = \frac{1}{y_{s_0}} \left[dy_{s_0} - dy_t \frac{ds_0}{dt} + Y dt \right] =$$

$$= \frac{1}{z_{s_0}} \left[dz_{s_0} - dz_t \frac{ds_0}{dt} + Z dt \right] \tag{2.3}$$

Обозначим через α, β и γ коэффициенты скачков, соответствующие вторым производным от x, y и z, с одной и с другой стороны фронта волны. Ввиду того, что $\partial\varepsilon/\partial s_0$ непрерывно, из первого соотношения (1.4) следует, что

$$x_{s_0}\alpha + y_{s_0}\beta + z_{s_0}\gamma = 0 \tag{2.4}$$

и, следовательно, приведенные выше волны являются поперечными. Они распространяются со скоростью

$$c(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = \pm \sqrt{\frac{T(\varepsilon, \dot{\varepsilon})}{\rho_0 [1+\varepsilon]}} \tag{2.5}$$

Следовательно, скорость распространения зависит от $\dot{\varepsilon}$ лишь через напряжение. Эта скорость вообще не постоянна.

При переходе через фронт волны производная от скорости деформации непрерывна, что следует из последних трех соотношений (1.4) или же из первого соотношения (2.3). Следовательно, на фронте поперечных волн разрывны лишь вторые производные от координат. Поперечные волны влияют, таким образом, только на форму нити и не вызывают могущих распространяться удлинений.

Интересно отметить, что если в соотношении (1.3) скорость деформации не участвует, то в соответствующей нити распространяются с отличной от скорости (2.5) конечной скоростью также и фронты продольных волн [5]. Следовательно, случай, когда скорость деформации не участвует, не получается в качестве частного случая из случая, когда эта скорость участвует.

Полное решение задачи о распространении поперечных волн, когда даны условия на конце нити, может быть получено путем численного интегрирования уравнений (2.3) на характеристиках (1.6′). Для этого присоединяются также соотношения, следующие из условия, что на характеристиках производные dx/dt, dy/dt и dz/dt были непрерывными. Если отметить нулевым индексом значение соответствующей величины до прохождения фронта волны и писать без индекса значение той же величины после прохождения этой волны, то получаем условие

$$x_{s_0} \frac{ds_0}{dt} + x_t = x_{s_0}{}^0 \frac{ds_0}{dt} + x_t{}^0 \qquad (xyz) \tag{2.6}$$

Численное решение системы (2.3), (1.6′) и (2.6) затруднительно. Однако в некоторых частных случаях, например при отсутствии внешних сил, в случае плоского движения или когда распределение деформаций в нити заранее известно, следовательно, тогда, когда из-за условий на конце нити поперечные волны не сопровождаются могущими распространяться продольными возмущениями, это интегрирование облегчается.

Обратим также внимание на то, что выявленные выше поперечные волны не являются ударными волнами. В случае ударных волн, т. е. когда благодаря условиям на конце нити существуют могущие распространяться разрывы касательной к нити, приведенные выше рассмотрения, а также и соотношение (2.5) остаются в силе ввиду того, что считаем, что ударная волна является, собственно говоря, пучком волн второго порядка, скорости распространения которых совпадают. Поперечные ударные волны могут иметь место и в случае, когда во время распространения благодаря возрастанию деформации или скорости деформации скорость (2.5) растет. Иногда для облегчения интегрирования системы (2.3), (1.6′) и (2.6) вдоль фронта волн считают, что этот фронт является ударной волной.

3. Рассмотрим теперь несколько наиболее часто применяемых частных случаев соотношения (1.3). Мы дадим несколько случаев линейных соотношений, применяемых главным образом в реологии.

а) Рассмотрим в первую очередь упруго-вязкие материалы (с так называемой «запаздывающей упругостью» или «модель Фойгта»), для которых соотношение между напряжением и деформацией имеет вид:

$$T = E\varepsilon + \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \tag{3.1}$$

В (3.1) E и μ будут считаться постоянными. Величина E характеризует упругие свойства соответствующего материала, а μ — вязкие свойства.

Поперечные волны распространяются в этих нитях со скоростью

$$c(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = \sqrt{\frac{E\varepsilon + \mu\dot{\varepsilon}}{\rho_0 [1+\varepsilon]}} \tag{3.2}$$

Таким образом, видно, что скорость деформации влияет на скорость распространения. С возрастанием или с убыванием скорости деформации возрастает или убывает скорость распространения. Чем больше вязкость материала, тем более выраженным является это влияние.

Скорость распространения (3.2) может быть постоянной, если деформация в каждом сечении нити удовлетворяет дифференциальному уравнению $E\varepsilon + \mu\dot{\varepsilon} = T_0(1+\varepsilon)$, где T_0 — постоянная. Таким образом, необходимо, чтобы распределение деформаций в нити выражалось экспоненциальным соотношением, получающимся из приведенного выше дифференциального уравнения. Однако для произвольного распределения деформаций скорость распространения (3.2) не является постоянной.

Исследование распространения продольных возмущений в стержнях из материала, удовлетворяющего соотношению вида (3.1), произведено И. Н. Зверевым[9] и Дж. А Моррисоном[10]. Очевидно, что рассмотрения этих авторов полностью применимы и к нитям. Следуя их рассмотрениям, можно получить распределение напряжений и деформаций в нити. После этого исследование распространения по нити поперечных волн производится довольно легко. Отметим, что, в то время как фронт продольных возмущений распространяется мгновенно, фронт поперечных волн распространяется с конечной скоростью (3.2).

b) Рассуждения из предыдущего примера могут быть повторены совершенно аналогичным образом и для ряда других частных случаев соотношения (1.3). Так, для вязких нитей берем $T = \mu\dot{\varepsilon}$, для вязко-пластических материалов с линейным упрочнением — соотношение $T = T_s + E_1(\varepsilon - \varepsilon_s) + \mu\dot{\varepsilon}$, для вязко-пластических материалов с экспоненциальным упрочнением — соотношение $T = k\varepsilon^{\eta} + \mu\dot{\varepsilon}$ и т. д. Аналогичные рассмотрения можно провести и для случая нелинейных соотношений (1.3).

Следует, однако, заметить, что для одной и той же нити для различных участков кривой $T = T(\varepsilon)$ нужно, вообще говоря, применять различные соотношения между напряжением и деформацией. Для малых значений деформации влиянием скорости деформации можно иногда пренебречь, и тогда теория характеристик применима и к исследованию продольных волн[1—5].

Поступила 27 IX 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. О косом ударе по гибкой нити с большими скоростями при наличии трения. ПММ, т. IX, вып. 6, 1945.
2. Рахматулин Х. А. Об ударе по гибкой нити, ПММ, т. XI, вып. 3, 1947.
3. Рахматулин Х. А. Поперечный удар по гибкой нити телом заданной формы. ПММ, т. XVI, вып. 1, 1952.
4. Рябова Е. В. Поперечный удар с переменной скоростью по гибкой нити. Вестн. МГУ, 10, 1953.
5. Кристеску Н. О волнах нагрузки и разгрузки, возникающих при движении упругой или пластической гибкой нити. ПММ, т. XVIII, вып. 3, 1954.
6. Lee E. H., Morrison J. A. A comparison of the Propagation of Longitudinal Waves in Rods of Viscoelastic Materials. J. of Polymer Science, XIX, Issue no. 91, 1956.
7. Шилькрут Д. И. О распространении волн в невполне упругой среде. Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, т. 4, 1956.
8. Соколовский В. В. Распространение упруго-вязко-пластических волн в стержнях. ПММ, т. XII, вып. 3, 1948.
9. Зверев И. Н. Распространение возмущений в вязко-упругом и вязко-пластическом стержне. ПММ, т. XIV, вып. 3, 1950.
10. Morrison J. A. Wave Propagation in Rods of Voigt Material and Visco-Elastic Materials with three parameter Models. J. of Appl. Math., XIV, 2, 1956.